ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 13–26 *Is. 71. P. 13–26*

УДК 517.95

ДЕЯКІ ФОРМУЛИ ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ В ПРОСТОРАХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Тарас БОКАЛО, Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: tbokalo@gmail.com, ol_buhrii@i.ua

Доведено формули інтегрування частинами спеціального вигляду для функцій з узагальнених просторів Соболєва. Також отримано формулу узагальненої похідної від композиції деяких функцій у сенсі розподілів.

Ключові слова: узагальнені простори Лебега та Соболєва, інтегрування частинами, узагальнена похідна від композиції функцій.

1. Вступ. При доведенні, зокрема, теореми єдиності розв'язку мішаних задач для нелінійних параболічних рівнянь треба використовувати формули інтегрування частинами спеціального вигляду (див. [1, с. 326]). Ці формули виконуються, зокрема, для функцій з деяких просторів Соболєва $W^{1,p}$, $p > 1$. Останнім часом параболічні рівняння почали вивчати в узагальнених просторах Соболєва $W^{1,p(x)}$, де $p = p(x)$ – деяка функція. Тому виникла потреба отримання формули інтегрування частинами для функцій з таких просторів.

Мета нашої праці – отримати формули інтегрування частинами спеціального вигляду для функцій з узагальнених просторів Соболєва. Цьому присвячена четверта частина статті. При отриманні таких формул виникає потреба обчислити похідну композиції функцій спеціального вигляду, що належать $W^{1,p(x)}$. Вирішенню цієї проблеми присвячено третю частину статті.

У випадку $p(x) \equiv \text{const}$ схожі формули інтегрування частинами отримано в [1, 2], похідні композиції функцій знайдено в [3, 4].

2. Деякі допоміжні факти з аналізу. Нехай $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – обмежена область з кусково гладкою межею, $T > 0$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, де $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$. Норму банахового простору B позначимо $||\cdot; B||$, спряжений до B простір – B^*, а скалярний добуток між B^* та B – $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$. Для спрощення замість, наприклад, $u(\cdot, t)$ писатимемо просто $u(t)$.

Узагальнені простори Лебега були введені в [5]. Їхні властивості досліджували, зокрема, в [5]-[8]. Нагадаємо деякі з них. Спершу визначимо простір

$$L^{\infty}_{+}(\Omega) = \{v \in L^{\infty}(\Omega) :\ \mathrm{ess}\inf_{x\in\Omega} v(x) > 1\}.$$

Далі для кожної функції $r \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ через r_0 та r^0 позначатимемо такі числа, що $r_0 \equiv \mathrm{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} r(x)$ та $r^0 \equiv \mathrm{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} r(x)$, а через r' – таку функцію, що $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ майже для всіх $x \in \Omega$.

Визначимо функціонал $\rho_q(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_q(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{q(x)}\,dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{q(x)}(\Omega)$ називатимемо множину таких вимірних функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}^1$, для яких $\rho_q(v,\Omega) < +\infty$. Відомо, що функціонал ρ_q слабко напівнеперервний знизу на $L^{q(x)}(\Omega)$ (див. [5, с. 208]). Крім того, $L^{q(x)}(\Omega)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою

$$||v; L^{q(x)}(\Omega)|| = \inf\{\lambda > 0 \,:\, \rho_q(v/\lambda,\Omega) \le 1\}.$$

Зазначимо таке: якщо $r(x) \ge q(x)$, то $L^{r(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$. Спряженим до $L^{q(x)}(\Omega)$ є простір $L^{q'(x)}(\Omega)$.

Зауваження 1. Нехай

$$S_q(s) = \left\{ \begin{array}{ll} s^{q_0}, & s \in [0,1], \\ s^{q^0}, & s > 1, \end{array} \right. \qquad S_{1/q}(s) = \left\{ \begin{array}{ll} s^{1/q^0}, & s \in [0,1], \\ s^{1/q_0}, & s > 1, \end{array} \right.$$

і $q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$. В лемі 1 [7, с. 168] показано, що для довільної функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ матимемо виконання нерівностей:

1) $||v; L^{q(x)}(\Omega)|| \le S_{1/q}(\rho_q(v,\Omega))$ при $\rho_q(v,\Omega) < +\infty$;

2) $\rho_q(v,\Omega) \le S_q(||v; L^{q(x)}(\Omega)||)$ при $||v; L^{q(x)}(\Omega)|| < +\infty$.

Узагальненим простором Соболєва $W^{1,q(x)}(\Omega)$ називатимемо множину функцій $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, узагальнені похідні яких існують і $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n} \in L^{q(x)}(\Omega)$. Аналогічно до введених визначимо простори функцій $L^{\infty}_{+}(Q_{0,T})$, $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$, $W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$ та функціонал $\rho_q(\cdot, Q_{0,T})$.

Нагадаємо, що (див. [6, с. 594]) узагальнена нерівність Гельдера для двох функцій $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ та $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, де $p \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, має вигляд

$$\int\limits_\Omega u(x)v(x)dx \leqslant K_1 ||u; L^{p(x)}(\Omega)||\; ||v; L^{p'(x)}(\Omega)||,$$

де $K_1 = 1 + 1/p_0 - 1/p^0 > 0$ – стала, яка не залежить від u та v.

Нам буде потрібний такий результат.

Лема 1. *(Узагальнена нерівність Гельдера для трьох функцій). Нехай* $p, q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ *такі функції, що* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = const < 1$ *для* $x \in \Omega$, *число* $k > 1$ *задано рівністю*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{k} = 1, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Якщо $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, $w \in L^k(\Omega)$, *то* $uvw \in L^1(\Omega)$ *і*

$$\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)w(x)\ dx \leqslant K_2 S_{1/p}\Big(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}\ dx\Big) S_{1/q}\Big(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^{q(x)}\ dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega} |w(x)|^k\ dx\Big)^{1/k},$$

де $K_2 > 0$ *– стала, яка не залежить від* u, v, w.

Доведення. Нехай $k' \overset{\text{def}}{=} \frac{k}{k-1}$ – спряжене до k число. Тоді

$$\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)w(x)\ dx \leqslant \Big(\int\limits_{\Omega} |u(x)v(x)|^{k'}\ dx\Big)^{\frac{1}{k'}} \cdot \Big(\int\limits_{\Omega} |w(x)|^k\ dx\Big)^{\frac{1}{k'}}. \tag{2}$$

Зрозуміло, що з (1) $k = \frac{p(x)q(x)}{p(x)q(x)-p(x)-q(x)}$, а тому $k' = \frac{p(x)q(x)}{p(x)+q(x)}$. Тоді

$$\frac{p(x)}{k'} = \frac{p(x)(p(x)+q(x))}{p(x)q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} + 1 > 1. \tag{3}$$

Маючи (3) та зауваження 1, можна продовжити праву частину нерівності (2). Одержимо

$$\Big(\int\limits_{\Omega} |u(x)v(x)|^{k'}\ dx\Big)^{\frac{1}{k'}} \cdot \Big(\int\limits_{\Omega} |w(x)|^k\ dx\Big)^{\frac{1}{k'}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(K_1 \cdot ||\ |u|^{k'}; L^{p(x)/k'}(\Omega)|| \cdot ||\ |v|^{k'}; L^{(p(x)/k')'}(\Omega)||\Big)^{\frac{1}{k'}} \cdot \Big(\int\limits_{\Omega} |w(x)|^k\ dx\Big)^{\frac{1}{k'}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(C_1 \cdot S_{1/(p/k')}(\rho_p(u;\Omega)) \cdot S_{1/(p/k')'}(\rho_q(v;\Omega))\Big)^{\frac{1}{k'}} \cdot \Big(\int\limits_{\Omega} |w(x)|^k\ dx\Big)^{\frac{1}{k'}} = C_1^{\frac{1}{k'}} \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot D_3,$$

де

$$D_1 = \Big(S_{1/(p/k')}(\rho_p(u;\Omega))\Big)^{\frac{1}{k'}},\ \ D_2 = \Big(S_{1/(p/k')'}(\rho_q(v;\Omega))\Big)^{\frac{1}{k'}},\ \ D_3 = \Big(\int\limits_{\Omega} |w(x)|^k\ dx\Big)^{\frac{1}{k'}}.$$

Оскільки $\frac{p_0}{k'} \leqslant \frac{p(x)}{k'} \leqslant \frac{p^0}{k'}$, то

$$D_1 = \begin{cases} \Big(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}\ dx\Big)^{\frac{1}{p^0}}, & \rho_p(u;\Omega) \leqslant 1, \\ \Big(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}\ dx\Big)^{\frac{1}{p_0}}, & \rho_p(u;\Omega) > 1, \end{cases} = S_{1/p}(\rho_p(u;\Omega)).$$

Оскільки $\frac{1}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{q} = \frac{1}{k'} - \frac{1}{q} = \frac{q-k'}{k'q}$, то $\frac{p}{k'} = \frac{q}{q-k'}$, $(\frac{p}{k'})' = \frac{\frac{q}{q-k'}}{\frac{q}{q-k'}-1} = \frac{q}{k'}$. Тоді $\frac{q_0}{k'} \leqslant (\frac{p(x)}{k'})' \leqslant \frac{q^0}{k'}$, тому

$$D_2 = \begin{cases} \Big(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^{q(x)}\ dx\Big)^{\frac{1}{q^0}}, & \rho_q(u;\Omega) \leqslant 1, \\ \Big(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^{q(x)}\ dx\Big)^{\frac{1}{q_0}}, & \rho_q(u;\Omega) > 1, \end{cases} = S_{1/q}(\rho_q(v;\Omega)).$$

Лему доведено. □

Нехай $r \in L_+^\infty(\Omega)$, $u, v \in L^{r(x)}(\Omega)$, $\mu \in L^\infty(\Omega)$,

$$I(\lambda) = \int\limits_\Omega \frac{\mu(x)}{r(x)} |u(x) + \lambda v(x)|^{r(x)} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Лема 2. *Функція $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є диференційовною в звичайному розумінні функцією і*

$$I'(\lambda) = \int\limits_\Omega \mu(x)|u(x) + \lambda v(x)|^{r(x)-2}(u(x) + \lambda v(x))v(x)\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Доведення. Нехай I – функція з (4), I' – функція з (5), $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Тоді для кожного $x \in \Omega$ з теореми Лагранжа про скінченні прирости випливає існування числа $\theta(x) \in [0, 1]$ такого, що

$$D = \frac{I(\lambda + \varepsilon) - I(\lambda)}{\varepsilon} - I'(\lambda) = \int\limits_\Omega \Big[\frac{\mu}{r\varepsilon} \Big(|u + (\lambda + \varepsilon)v|^{r(x)} - |u + \lambda v|^{r(x)} \Big) -$$

$$- \mu |u + \lambda v|^{r(x)-2}(u + \lambda v)v \Big] dx = \int\limits_\Omega \Big[\mu |\eta|^{r(x)-2} \eta v - \mu |u + \lambda v|^{r(x)-2}(u + \lambda v)v \Big] dx,$$

де $\eta = \theta(u + (\lambda + \varepsilon)v) + (1 - \theta)(u + \lambda v) = u + \lambda v + \theta\varepsilon v$.

Далі використаємо оцінку

$$\big| |\xi_1|^{r(x)-2}\xi_1 - |\xi_2|^{r(x)-2}\xi_2 \big| \leqslant C_2(|\xi_1| + |\xi_2|)^{r(x)-1-\alpha(x)}|\xi_1 - \xi_2|^{\alpha(x)},$$

де $C_2 > 0$ – стала, $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant \min\{1, r(x) - 1\}$, яка випливає з теореми 2.1 [9, с. 2]. Нехай α – таке число, що $0 < \alpha < \min\{1, r_0 - 1\}$. Тоді

$$|D| \leqslant \int\limits_\Omega |\mu| C_2(|u + \lambda v + \theta\varepsilon v| + |u + \lambda v|)^{r(x)-1-\alpha}|\theta\varepsilon v|^\alpha |v|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int\limits_\Omega (|u| + |v|)^{r(x)-1-\alpha}|\varepsilon|^\alpha |v|^{\alpha+1}\, dx,$$

де стала C_3 залежить від α, але не залежить від u, v, ε. Враховуючи те, що $r(x)-1>\alpha$, $r(x) > \alpha + 1$, $\frac{r(x)}{\alpha+1} > 1$, використаємо узагальнену нерівність Гельдера для двох функцій

$$|D| \leqslant C_3|\varepsilon|^\alpha ||(|u| + |v|)^{r(x)-1-\alpha}; L^{(\frac{r(x)}{\alpha+1})'}(\Omega)|| \cdot ||\, |v|^{\alpha+1}; L^{\frac{r(x)}{\alpha+1}}(\Omega)||.$$

Наявні тут норми скінченні, бо $u, v \in L^{r(x)}(\Omega)$,

$$(\alpha + 1)\frac{r(x)}{\alpha + 1} = r(x),$$

$$(r(x) - 1 - \alpha)\Big(\frac{r(x)}{\alpha + 1}\Big)' = (r(x) - 1 - \alpha)\frac{\frac{r(x)}{\alpha+1}}{\frac{r(x)}{\alpha+1} - 1} = r(x).$$

Отже, $|D| \leqslant C_4|\varepsilon|^\alpha$, де C_4 – стала, яка залежить від λ, α, u, v, але не залежить від ε. Тому $D \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ та I' є похідною I. $\square$

Використаємо цю лему для доведення важливих для нас фактів. Нехай Y – дійсний банахів простір, Y^* – спряжений до Y простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ – скалярний добуток між Y^* та Y, $J : Y \to \mathbb{R}$ – деякий функціонал. Нагадаємо кілька понять.

Означення 1. *Оператор* $B : Y \to Y^*$ *називається диференціалом Гато від функціонала* J*, якщо для будь-яких* u, $v \in Y$: $\langle Bu, v\rangle_Y = \frac{d}{d\lambda} J(u+\lambda v)|_{\lambda=0}$.

Означення 2. *Функція* $J^* : Y^* \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *називається спряженою опуклою функцією до* J*, якщо*

$$J^*(v) = \sup_{w\in Y}\{\langle v, w\rangle_Y - J(w)\} \quad v \in Y^*. \tag{6}$$

Нагадаємо таке (див. [10, с. 264]): якщо $f : X \to \mathbb{R}$ – опукла функція, де X – топологічний векторний простір, то точка x є точкою мінімуму f тоді, і лише тоді, коли $0 \in \partial f(x)$, де $\partial f(x)$ – субдиференціал функції f в точці x. Крім того (див. [10, с. 268]), якщо f – власна опукла функція, то субдиференціал $\partial f(x)$ складається лише з однієї точки тоді, і лише тоді, коли оператор $B^+ f : X \to X^*$ є похідною за Гато від f в точці x, де $\langle (B^+ f)(x), v\rangle_X = \lim\limits_{\lambda\to+0} \frac{f(x+\lambda v)-f(x)}{\lambda}$. Наслідком цих міркувань є таке зауваження.

Зауваження 2. Якщо $J : Y \to \mathbb{R}$ – випуклий вгору функціонал з диференціалом Гато $B : Y \to Y^*$, то максимум J на Y досягається в точці $w \in Y$ такій, що $Bw = 0$.

Для прикладу розглянемо такий простір Y та функціонал J: $Y = L^{r(x)}(\Omega)$,

$$J(u) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_\Omega \mu(x)\frac{1}{r(x)}|u(x)|^{r(x)}\,dx, \quad u \in L^{r(x)}(\Omega), \tag{7}$$

де $r \in L^\infty_+(\Omega)$, $\mu \in L^\infty(\Omega)$. Тоді $Y^* = L^{r'(x)}(\Omega)$, диференціал за Гато – це оператор $B : Y \to Y^*$, який має вигляд (тут застосуємо лему 2)

$$\langle Bu, v\rangle_Y = \Big(\frac{d}{d\lambda}\int\limits_\Omega \mu(x)\frac{1}{r(x)}\cdot|u(x)+\lambda v(x)|^{r(x)}\,dx\Big)\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\mu(x)|u(x)+\lambda v(x)|^{r(x)-2}(u(x)+\lambda v(x))\cdot v(x)\Big)\Big|_{\lambda=0}\,dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \mu(x)|u(x)|^{r(x)-2}u(x)\cdot v(x)\,dx = \langle \mu(x)|u|^{r(x)-2}u, v\rangle_Y, \quad u, v \in Y,$$

тобто

$$Bu = \mu|u|^{r(x)-2}u, \quad u \in Y. \tag{8}$$

Знайдемо спряжений до (7) функціонал. Для цього нам потрібне зауваження 2. Отож, згідно з означенням 2 (див. зображення (6))

$$J^*(v) = \sup_{w\in L^{r(x)}(\Omega)}\Big\{\int\limits_\Omega vw\,dx - \int\limits_\Omega \mu(x)\frac{1}{r(x)}|w|^{r(x)}\,dx\Big\} =$$

$$= \sup_{w\in L^{r(x)}(\Omega)}\Big\{\int\limits_\Omega \Big(vw - \mu(x)\frac{1}{r(x)}|w|^{r(x)}\Big)\,dx\Big\}, \quad v \in L^{r'(x)}(\Omega). \tag{9}$$

Нехай $v \in L^{r'(x)}(\Omega)$ – фіксоване. Введемо позначення

$$F(w) = \int\limits_\Omega \Big(vw - \mu(x)\frac{1}{r(x)}|w|^{r(x)}\Big)\,dx, \quad w \in L^{r(x)}(\Omega). \tag{10}$$

Тоді згідно з (9) матимемо

$$J^*(v) = \sup_{w \in L^{r(x)}(\Omega)} F(w). \tag{11}$$

Зрозуміло, що F – випуклий вгору функціонал. Тому для того аби відшукати супремум функціонала $F(w)$ (згідно з зауваженням 2), знайдемо його похідну Гато $B_1 w$ в точці w та прирівняємо її до нуля. Отже, використовуючи означення 1, одержимо таке рівняння на знаходження w:

$$\langle B_1 w, z\rangle_Y = \frac{d}{ds} F(w+sz)\Big|_{s=0} = 0 \quad \forall z \in Y. \tag{12}$$

Аналогічно як (8) отримаємо, що

$$B_1 w = v - \mu\, w|w|^{r(x)-2}.$$

Тому (12) набуде вигляду

$$v = \mu\, w|w|^{r(x)-2} \quad \text{майже скрізь в} \quad \Omega. \tag{13}$$

З (13) одержимо, що $w = \frac{v}{\mu}\Big(\frac{|v|}{\mu}\Big)^{\frac{2-r(x)}{r(x)-1}}$ – точка максимуму F. Тому

$$J^*(v) = F\Big(\frac{v}{\mu}\Big(\frac{|v|}{\mu}\Big)^{\frac{2-r(x)}{r(x)-1}}\Big) = \int\limits_\Omega \Big(v(x)\frac{v(x)}{\mu(x)}\Big(\frac{|v(x)|}{\mu(x)}\Big)^{\frac{2-r(x)}{r(x)-1}} - \frac{\mu(x)}{r(x)}\Big|\frac{v(x)}{\mu(x)}\Big|^{\frac{r(x)}{r(x)-1}}\Big)dx.$$

Після нескладних перетворень одержимо

$$J^*(v) = \int\limits_{Q_{0,T}} \mu(x)^{1-r'(x)} \frac{1}{r'(x)} |v(x)|^{r'(x)}\, dxdt, \quad v \in L^{r'(x)}(\Omega). \tag{14}$$

3. Узагальнена похідна від композиції функцій. Нехай виконуються умови попереднього підрозділу.

Лема 3. *Нехай* $q \in L^\infty_+(Q_{0,T})$, $\theta \in C^1(\mathbb{R})$, $|\theta'(t)| \leqslant M$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$. *Якщо* $u \in W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$, *то* $\theta(u) \in W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$ *і, крім того,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\theta(u) = \theta'(u)\,\frac{\partial u}{\partial t} \quad \textit{майже всюди в } Q_{0,T}. \tag{15}$$

Аналогічна формула виконується і для похідних за змінними $x_1, \ldots, x_n$.

Доведення. Оскільки $u \in W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$, то існує така послідовність функцій $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{Q_{0,T}})$, що $u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$ і $u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ майже всюди в $Q_{0,T}$. Очевидно, що $\theta(u_m) \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$ і маємо $|\theta(u_m) - \theta(u)| \leqslant M|u_m - u|$, тому $\theta(u_m)$ збіжна до $\theta(u)$ в просторі $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$. Крім того,

$$\theta'(u_m)\frac{\partial u_m}{\partial t} - \theta'(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \theta'(u_m)\Big(\frac{\partial u_m}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big) + \Big(\theta'(u_m) - \theta'(u)\Big)\frac{\partial u}{\partial t} \overset{\text{def}}{=} A_m + B_m.$$

Зрозуміло, що $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ майже всюди в $Q_{0,T}$. Також $|B_m|^{q(x,t)} \leqslant (2M|u_t|)^{q(x,t)} \in$ $\in L^1(Q_{0,T})$. Тому за теоремою Лебега $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$. Крім того,

$$|A_m|^{q(x,t)} \leqslant M^{q(x,t)}\Big|\frac{\partial u_m}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big|^{q(x,t)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{в просторі} \quad L^1(Q_{0,T}).$$

Тоді $A_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в просторі $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$. Тому $\theta'(u_m)\frac{\partial u_m}{\partial t} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \theta'(u)\frac{\partial u}{\partial t}$ сильно в $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$, зокрема, $\theta'(u)\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$.

Доведемо тепер (15). Нехай $\varphi \in D(Q_{0,T})$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \theta'(u)u_t\varphi\, dxdt = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \theta'(u_m)\frac{\partial u_m}{\partial t}\varphi\, dxdt =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\theta(u_m)\Big)\varphi\, dxdt = -\lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \theta(u_m)\varphi_t\, dxdt = -\int\limits_{Q_{0,T}} \theta(u)\varphi_t\, dxdt.$$

Отже, в сенсі розподілів (а з леми дю Буа-Реймонда і в сенсі рівності майже скрізь) матимемо (15). □

Зауваження 3. Якщо $q(x,t) \equiv \mathrm{const}$, θ задовольняє умову Ліпшиця на $\mathbb{R}$, похідна θ існує всюди за винятком, можливо, скінченної множини точок $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ та є обмеженою і $u \in W^{1,q}(Q_{0,T})$, то $\theta(u) \in W^{1,q}(Q_{0,T})$ і виконується формула (15) (в сенсі розподілів на $Q_{0,T}$; див. [3, с. 50]).

Введемо допоміжне позначення. Нехай скрізь далі $r \in L^\infty_+(\Omega)$ та

$$(\mathcal{R}u)(x) = \frac{1}{r(x)-1}|u(x)|^{r(x)-2}u(x), \quad x \in \Omega. \tag{16}$$

Зауваження 4. Правило (16) задає нелінійний оператор $\mathcal{R} : L^{r(x)}(\Omega) \to L^{r'(x)}(\Omega)$. Зрозуміло, що $\mathcal{R}$ є обмеженим.

Зауваження 5. Нехай $k \in L^\infty(\Omega)$. Тоді існують такі сталі M_1, M_2, $M_3 > 0$, що для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ та майже для всіх $x \in \Omega$ виконуються оцінки:

$$||a|^{k(x)} - |b|^{k(x)}| \leqslant M_1|a-b|(|a|^{k(x)-1} + |b|^{k(x)-1}), \quad \text{де } k(x) \geqslant 1, \tag{17}$$

(див. [9, с. 3] для $k \equiv \mathrm{const}$),

$$|a \pm b|^{k(x)} \leqslant M_2(|a|^{k(x)} + |b|^{k(x)}), \quad \text{де } k(x) \geqslant 0, \tag{18}$$

(див. [11, с. 67] для $k \equiv \mathrm{const}$),

$$|\,|a|^{k(x)-2}a - |b|^{k(x)-2}b| \leqslant C_5 \cdot (|a| + |b|)^{k(x)-2}|a-b|, \quad \text{де} \quad k(x) \geqslant 2, \tag{19}$$

(див. [9, с. 3] для $k \equiv \mathrm{const}$).

Лема 4. *Нехай $r \in L^\infty_+(\Omega)$ та $r_0 \geqslant 3$, оператор $\mathcal{R}$ визначено в (16),*

$$U_1 \overset{def}{=} \{u \in L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T}) \;\mid\; u_t \in L^2(Q_{0,T})\},$$

$||u||_{U_1} = ||u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})|| + ||u_t; L^2(Q_{0,T})||$. *Тоді для всіх $u \in U_1$ виконується (взята в сенсі розподілів на $Q_{0,T}$) формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}u\Big) = |u|^{r(x)-2}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{20}$$

Крім того, $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{R}u) : U_1 \to L^1(Q_{0,T})$.

Доведення. Оскільки $\overline{C^1(\overline{Q}_{0,T})} = U_1$, то візьмемо таку послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ з $C^1(\overline{Q}_{0,T})$, що $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в U_1. Тоді $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ обмежена в U_1, тобто $\exists C_6>0$: $||u^m||_{U_1} \leqslant C_6 \ \forall\, m\in\mathbb{N}$, звідки

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|u^m|^{2(r(x)-2)} + |u^m_t|^2\Big]\, dxdt \leqslant C_7 \quad \forall\, m\in\mathbb{N}. \tag{21}$$

Оскільки для всіх $x\in\Omega$ функція $\tau\mapsto|\tau|^{r(x)-2}\tau$ диференційовна при $r_0\geqslant 3$, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}u^m\Big) = |u^m|^{r(x)-2}\frac{\partial u^m}{\partial t} \tag{22}$$

в класичному розумінні похідної. Покажемо, що

$$|u^m|^{r(x)-2}u^m_t \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} |u|^{r(x)-2}u_t \quad \text{сильно в } L^1(Q_{0,T}). \tag{23}$$

Як і в лемі 3 матимемо

$$|u^m|^{r(x)-2}u^m_t - |u|^{r(x)-2}u_t = |u^m|^{r(x)-2}(u^m_t-u_t) + (|u^m|^{r(x)-2}-|u|^{r(x)-2})u_t = A_m + B_m.$$

Зазначимо таке: оскільки $|u^m|^{r(x)-2}$, $|u|^{r(x)-2}$, u^m_t, $u_t\in L^2(Q_{0,T})$, то всі доданки з останньої рівності належать простору $L^1(Q_{0,T})$. Використавши нерівність Гельдера та (21), одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |A_m|\, dxdt \leqslant \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{2(r(x)-2)}\, dxdt\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u^m_t-u_t|^2\, dxdt\Big)^{\frac12} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{C_7}||u^m_t-u_t; L^2(Q_{0,T})|| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Оскільки $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})$, то і сильно в $L^{2(r_0-2)}(Q_{0,T})$, тому можна вважати, що $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ майже скрізь в $Q_{0,T}$. Отож, $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ майже скрізь в $Q_{0,T}$.

Використавши (17) (в нас $r(x)-2\geqslant 1$, бо $r(x)\geqslant 3$), одержимо

$$|B_m| = ||u^m|^{r(x)-2} - |u|^{r(x)-2}|\cdot|u_t| \leqslant M_1|u^m-u|\cdot(|u^m|^{r(x)-3}+|u|^{r(x)-3})|u_t|.$$

Знайдемо $\beta(x)$ з умови $\frac{1}{2(r(x)-2)}+\frac{1}{\beta(x)}+\frac12=1$. Матимемо, що $\beta(x)=\frac{2(r(x)-2)}{r(x)-3}=$ $=2+\frac{2}{r(x)-3}$. Тоді $2(r(x)-2)$, $\beta(x)$, $2>1$ і тому з потрійної нерівності Гельдера (див. лему 1), оцінок (18), (21) та зауваження 1 отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |B_m|\, dxdt \leqslant K_2M_1\cdot S_{1/(2(r-2))}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u^m-u|^{2(r(x)-2)}\, dxdt\Big)\times$$
$$\times S_{1/\beta}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} (|u^m|^{r(x)-3}+|u|^{r(x)-3})^{\beta}\, dxdt\Big)\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u_t|^2\, dxdt\Big)^{\frac12} \leqslant$$
$$\leqslant C_8\, S_{1/(2r-4)}(S_{2r-4}(||u^m-u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})||))\times$$
$$\times S_{1/\beta}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} (|u^m|^{2(r(x)-2)}+|u|^{2(r(x)-2)})\, dxdt\Big)\cdot||u_t; L^2(Q_{0,T})|| \leqslant$$
$$\leqslant C_9\, S_{1/(2r-4)}(S_{2r-4}(||u^m-u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})||)) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тому (23) виконується. Щоб завершити доведення цієї леми, треба визначити збіжність

$$\mathcal{R}u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{R}u \quad \text{в} \quad L^1(Q_{0,T}). \tag{24}$$

Використовуючи (19), матимемо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathcal{R}u^m - \mathcal{R}u|\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} \frac{1}{r(x)-1} \cdot |\, |u^m|^{r(x)-2}u^m - |u|^{r(x)-2}u|dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_{10} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m - u| \cdot (|u^m| + |u|)^{r(x)-2}\, dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_{11} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m - u| \cdot (|u^m|^{r(x)-2} + |u|^{r(x)-2})\, dxdt = I_1^m + I_2^m,$$

де

$$I_1^m = C_{11} \cdot \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{r(x)-2}|u^m - u|\, dxdt, \qquad I_2^m = C_{11} \cdot \int\limits_{Q_{0,T}} |u|^{r(x)-2}|u^m - u|\, dxdt.$$

Далі оцінимо I_1^m та I_2^m, використовуючи нерівність Гельдера.

$$I_1^m = C_{11} \cdot \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{r(x)-2}|u^m - u|\, dxdt \leqslant C_{11} \cdot \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{2(r(x)-2)}\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u^m - u|^2\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{12} \cdot ||u^m - u; L^2(Q_{0,T})||. \tag{25}$$

Оскільки $r(x) \geqslant 3$, то $2(r(x)-2) \geqslant 2$. Тому

$$\exists C_{13} > 0 : \quad ||u^m - u; L^2(Q_{0,T})|| \leqslant C_{13}\, ||u^m - u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})||. \tag{26}$$

Застосуємо (26) до (25), одержимо

$$0 \leqslant I_1^m \leqslant C_{14} \cdot ||u^m - u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})|| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, $I_1^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Аналогічно одержимо, що $I_2^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тому виконується (24).

Нехай $\varphi \in D(Q_{0,T})$. Тоді з (22), (23) та (24)

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |u|^{r(x)-2}u_t\varphi\, dxdt = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{r(x)-2}u_t^m\varphi\, dxdt =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}u^m\Big)\varphi\, dxdt = -\lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \mathcal{R}u^m\, \varphi_t\, dxdt = -\int\limits_{Q_{0,T}} \mathcal{R}u\, \varphi_t\, dxdt.$$

Отож, в сенсі розподілів (а з леми дю Буа-Реймонда і в сенсі рівності майже скрізь) матимемо (20). □

Зауваження 6. ([4, с. 66]) Якщо $r(x) \equiv \mathrm{const}$, $r \in [2,3)$,

$$U_2 = \{u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \;\mid\; u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))\},$$

$||u||_{U_2} = ||u; L^\infty(0,T; L^2(\Omega))|| + ||u_t; L^\infty(0,T; L^2(\Omega))||$, то формула (20) з леми 4 також виконується.

4. Інтегрування частинами композиції функцій. Для зручності наступний відомий факт ми наведемо з доведенням.

Лема 5. *(лема* [1, с. 376-377]*). Якщо Y – дійсний банахів простір, $J\ : Y \to \mathbb{R}$ – опуклий диференційовний за Гато функціонал з диференціалом Гато $B : \ Y \to Y^*$, функція $J^* : Y^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ визначена в (6), то*

$$J^*(Bu) = \langle Bu, u\rangle_Y - J(u) \quad \forall\, u \in Y, \tag{27}$$

$$J^*(Bu_2) - J^*(Bu_1) \geqslant \langle Bu_2 - Bu_1, u_1\rangle_Y \quad \forall\, u_1, u_2 \in Y, \tag{28}$$

$$J^*(Bu_2) - J^*(Bu_1) \leqslant \langle Bu_2 - Bu_1, u_2\rangle_Y \quad \forall\, u_1, u_2 \in Y. \tag{29}$$

Доведення. **1.** Доведемо (27). З означення B випливає, що

$$J(w) - J(u) \geqslant \langle Bu, w - u\rangle_Y \quad \forall\, u, w \in Y, \tag{30}$$

тому $\langle Bu, w\rangle_Y - J(w) \leqslant \langle Bu, u\rangle_Y - J(u)$. Тоді з (6)

$$J^*(Bu) = \sup_{w \in Y} \{\langle Bu, w\rangle_Y - J(w)\}.$$

Об'єднуючи це з попередньою нерівністю, одержуємо, що супремум досягається в точці $w = u$.

2. Доведемо (28) та (29). Взявши в (30) $u = u_2$, $w = u_1$, одержимо

$$J(u_1) - J(u_2) \geqslant \langle Bu_2, u_1 - u_2\rangle_Y = \langle Bu_2, u_1\rangle_Y - \langle Bu_2, u_2\rangle_Y \quad \forall\, u_1, u_2 \in Y.$$

Отож, $J(u_1) - \langle Bu_1, u_1\rangle_Y - J(u_2) + \langle Bu_2, u_2\rangle_Y \geqslant \langle Bu_2, u_1\rangle_Y - \langle Bu_1, u_1\rangle_Y$, тому з (27)

$$-J^*(Bu_1) + J^*(Bu_2) \geqslant \langle Bu_2 - Bu_1, u_1\rangle_Y \quad \forall\, u_1, u_2 \in Y.$$

Тобто (28) доведено. Тепер поміняємо в (28) u_1 і u_2 місцями

$$J^*(Bu_1) - J^*(Bu_2) \geqslant \langle Bu_1 - Bu_2, u_2\rangle_Y,$$

домножимо на (-1)

$$-J^*(Bu_1) + J^*(Bu_2) \leqslant \langle Bu_2 - Bu_1, u_2\rangle_Y$$

і одержимо (29). □

Розглянемо наш частковий випадок, коли $Y = L^{r(x)}(\Omega)$, де $r \in L^\infty_+(\Omega)$, J задано в (7), B пораховано в (8), а J^* – в (14). Нехай $\mu(x) = \frac{1}{r(x)-1}$, $x \in \Omega$, тоді

$$J^*(Bv) = J^*(\mathcal{R}u) = \int\limits_\Omega \Big(\frac{1}{r(x)-1}\Big)^{1-r'(x)} \frac{1}{r'(x)} \Big|\frac{1}{r(x)-1}|u|^{r(x)-2}u\Big|^{r'(x)}\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \frac{1}{(r(x)-1)r'(x)} |u|^{(r(x)-1)r'(x)}\, dx = \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)}\, dx$$

і тому нерівність (28) набуде вигляду

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_2|^{r(x)}\, dx - \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_1|^{r(x)}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)-1}(|u_2|^{r(x)-2}u_2 - |u_1|^{r(x)-2}u_1)u_1\, dx \tag{31}$$

для всіх $u_1, u_2 \in L^{r(x)}(\Omega)$. Аналогічно нерівність (29) набуде вигляду

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|u_2|^{r(x)}\,dx - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|u_1|^{r(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)-1}(|u_2|^{r(x)-2}u_2 - |u_1|^{r(x)-2}u_1)u_2\,dx \tag{32}$$

для всіх $u_1, u_2 \in L^{r(x)}(\Omega)$.

Теорема 1. *Якщо* $r(x) \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, $u \in L^{r(x)}(Q_{0,T})$, $(|u|^{r(x)-2}u)_t \in L^{r'(x)}(Q_{0,T})$, *то для всіх* $\tau, s \in [0,T]$

$$\int\limits_{s}^{\tau} dt \int\limits_{\Omega} u\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{R}(u))\,dx = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|u(\tau)|^{r}\,dx - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|u(s)|^{r}\,dx. \tag{33}$$

Доведення. Припустимо, що виконуються умови теореми. Оскільки $u \in L^{r(x)}(Q_{0,T})$, то $|u|^{r(x)-2}u \in L^{r'(x)}(Q_{0,T})$. Крім того, $(|u|^{r(x)-2}u)_t \in L^{r'(x)}(Q_{0,T})$. З теореми 1 [12, с. 311] випливає, що $L^{r'(x)}(Q_{0,T}) \subset L^{\frac{r_0}{r_0-1}}(0,T;L^{r'(x)}(\Omega))$. Тоді з леми [13, с. 20] $|u|^{r(x)-2}u \in C([0,T];L^{r'(x)}(\Omega))$. Тому існує $C_{15} > 0$ така, що для всіх $t \in [0,T]$

$$\int\limits_{\Omega} |u(t)|^{r(x)}\,dx = \int\limits_{\Omega} ||u(t)|^{r(x)-2}u(t)|^{r'(x)}\,dx \leqslant C_{15}. \tag{34}$$

Зафіксуємо наші $\tau, s \in [0,T]$.

I. Оскільки $|u|^{r(x)-2}u \in C([0,T];L^{r'(x)}(\Omega))$, то функція $\widetilde{u}$ така, що

$$|\widetilde{u}(t)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t) = \begin{cases} |u(\tau)|^{r(x)-2}u(\tau), & t \in [\tau, T+1], \\ |u(t)|^{r(x)-2}u(t), & t \in [s,\tau], \\ |u(s)|^{r(x)-2}u(s), & t \in [-1,s], \end{cases}$$

є така, що $|\widetilde{u}|^{r(x)-2}\widetilde{u} \in C([-1,T+1];L^{r'(x)}(\Omega))$. Крім того, $\widetilde{u} \in L^{r(x)}(Q_{-1,T+1})$, $(|\widetilde{u}|^{r(x)-2}\widetilde{u})_t \in L^{r'(x)}(-1,T+1;L^{r'(x)}(\Omega))$ (бо похідна – це нуль, або така ж похідна від u).

II. Приймемо в (32) $u_2(x) = \widetilde{u}(x,t)$, $u_1(x) = \widetilde{u}(x,t-h)$, $(x,t) \in Q_{s,\tau}$. Матимемо

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t)|^{r(x)}\,dx - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)-1}\Big(|\widetilde{u}(t)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t) - |\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t-h)\Big)\widetilde{u}(t)\,dx,$$

де $t \in (s,\tau)$, $h \in (0,1)$. Зінтегруємо останню нерівність за $t \in (s_1,\tau_1) \subset \Big(s-\frac{1}{2}, \tau+\frac{1}{2}\Big)$

$$\int\limits_{s_1}^{\tau_1} dt \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t)|^{r}\,dx - \int\limits_{s_1}^{\tau_1} dt \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{Q_{s_1,\tau_1}} \frac{1}{r(x)-1}\Big(|\widetilde{u}(t)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t) - |\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t-h)\Big)\widetilde{u}(t)\,dxdt. \tag{35}$$

Оскільки

$$\int\limits_{s_1}^{\tau_1} z(t-h)dt = \int\limits_{s_1-h}^{\tau_1-h} z(y)dy = \int\limits_{s_1-h}^{s_1} z(y)dy + \int\limits_{s_1}^{\tau_1} z(y)dy - \int\limits_{\tau_1-h}^{\tau_1} z(y)dy,$$

то з (35) одержимо (один інтеграл скоротиться)

$$\int\limits_{\tau_1-h}^{\tau_1} dt \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t)|^{r(x)}\,dx - \int\limits_{s_1-h}^{s_1} dt \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t)|^{r(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{Q_{s_1,\tau_1}} \frac{1}{r(x)-1}\Big(|\widetilde{u}(t)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t) - |\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t-h)\Big)\widetilde{u}(t)\,dxdt.$$

Поділимо цю рівність на $h > 0$ і спрямуємо $h \to +0$. Використовуючи теорему Лебега про властивості інтегралів та означення похідної, матимемо

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(\tau_1)|^{r(x)}\,dx - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(s_1)|^{r(x)}\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{s_1,\tau_1}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}(\widetilde{u})(t)\Big)\widetilde{u}(t)\,dxdt, \qquad (36)$$

для майже всіх $s_1, \tau_1 \in \Big(s - \frac{1}{2}, \tau + \frac{1}{2}\Big)$.

III. Оскільки $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{R}(\widetilde{u}(t))) = 0$ для $t \notin [s,\tau]$,

$$|\widetilde{u}(s_1)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(s_1) \equiv |\widetilde{u}(s)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(s) \quad \text{для} \quad s_1 \in [-1, s],$$

$$|\widetilde{u}(\tau_1)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(\tau_1) \equiv |\widetilde{u}(\tau)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(\tau) \quad \text{для} \quad \tau_1 \in [\tau, T+1],$$

то з формули (36) одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(\tau)|^{r(x)}\,dx - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(s)|^{r(x)}\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}(\widetilde{u}(t))\Big)\widetilde{u}(t)\,dxdt \qquad (37)$$

для наших s, τ.

IV. Виконавши пункти **II** для **III**, але з використанням (31) для $u_1(x,t) = u(x,t)$, $u_2(x,t) = u(x,t+h)$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(\tau)|^{r(x)}\,dx - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(s)|^{r(x)}\,dx \geqslant \int\limits_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}(\widetilde{u})(t)\Big)\widetilde{u}(t)\,dxdt.$$

Об'єднавши це з (37) та врахувавши, що $\widetilde{u}(t) = u(t)$ при $t \in [s,\tau]$, отримаємо формулу (33). Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Враховуючи лему 4 та попередню теорему, можна стверджувати таке: якщо* $u \in L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})$ *при* $r(x) \geqslant 3$, $u_t \in L^2(Q_{0,T})$, *то*

$$\int\limits_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}u\Big)u\,dxdt = \int\limits_{Q_{s,\tau}} |u|^{r(x)-2}u\,u_t\,dxdt =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|u(\tau)|^{r(x)}\,dx - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r(x)}|u(s)|^{r(x)}\,dx$$

для всіх $\tau, s \in [0,T]$, $s < \tau$.

Нагадаємо ще дві схожі формули, але у випадку $r(x) \equiv \mathrm{const}$.

Зауваження 7. ([1, с. 326]). Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – довільна відкрита множина, $r \equiv \mathrm{const}$, $T > 0$, $W \overset{\mathrm{def}}{=} W_0^{k,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, $1 < r \leqslant p$, $k \geqslant 1$. Припустимо $u \in L^p(0,T;W)$ та $|u|^{r-2}u$, $\frac{\partial}{\partial t}\Big(|u|^{r-2}u\Big) \in L^{p'}(0,T;W')$. Тоді $\forall\, s,\tau \in [0,T]$, $s < \tau$

$$\int\limits_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{r-1}|u|^{r-2}u\Big)u\,dxdt = \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} |u(\tau)|^r\,dx - \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} |u(s)|^r\,dx.$$

Зауваження 8. ([2, с. 315]). Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з гладкою межею, $V \overset{\mathrm{def}}{=} \{v \in W^{1,r}(\Omega) \ : \ v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Якщо $u \in L^r(0,T;V)$, $|u|^{r-2}u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ та $(|u|^{r-2}u)_t \in L^{r'}(0,T;V')$, то $|u|^r \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ і для майже всіх $t \in (s,\tau)$, $s,\tau \in [0,T]$, $s < \tau$ виконується формула

$$\int\limits_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{r-1}|u|^{r-2}u\Big)u\,dxdt = \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} |u(\tau)|^r\,dx - \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} |u(s)|^r\,dx.$$

---

1. *Bernis F.* Qualitative Properties for Some Nonlinear Higher Order Degenerate Parabolic Equations / *Bernis F.* // Houston J. of Math. – 1988. – Vol. 14, №3. – P. 319-352.
2. *Alt H.W.* Quasilinear Elliptic-Parabolic Equations / *Alt H.W., Luckhaus S.* // Math Z. – 1983. – Vol. 183. – P. 311-341.
3. *Киндерлерер Д.* Введения в вариационные неравенства и их приложения / *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* – M: Мир, 1983.
4. *Lions J.-L.* Some Non-linear Evolution Equations / *Lions J.-L., Strauss W.A.* // Bulletin de la S.M.F. – 1965. – T. 93. – P. 43-96.
5. *Orlicz W.* Uber Konjugierte Exponentenfolgen / *Orlicz W.* // Studia Mathematica (Lwow). – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.
6. *Kovacik O.* On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / *Kovacik O., Rakosnik J.* // Czechslovak Math. J. – 41 (116). – 2005. – P. 592-618
7. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / *Бугрій О.М.* // Математичні студії. – 2005. – Т. 24, №2. – С. 167-172.
8. *Buhrii O.M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, № 6. – P. 2335-2331.
9. *Byström J.* Sharp Constants for Some Inequalities Connected to The p-Laplace Operator / *Byström J.* // Jour. of Ineq. in Pure and Appl. Math. – 2005. – Vol. 6, Issue 2. – Article 56.
10. *Aliprantis C.D.* Infinite Dimensional Analysis / *Aliprantis C.D., Border K.C.* – Hitchhicker's Guide. Springer, 2006.
11. *Ладиженська О.А.* Краевые задачи математической физики / *Ладиженська О.А.* – М.: Наука, 1973.
12. *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега / *Бугрій О.М.* // Наук. записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського. – Сер. фіз.-мат. – 2002. – Вип. 1. – С. 310-321.
13. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач / *Лионс Ж.Л.* – М.: Мир, 1972.

SOME INTEGRATING BY PARTS FORMULAS IN VARIABLE INDICES OF NON LINEARITY FUNCTION SPACES

Taras BOKALO, Oleh BUHRII

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: tbokalo@gmail.com, ol_buhrii@i.ua

In the paper, we considered the special type integrating by parts formulas in generalized Sobolev spaces. In addition, there is the weak derivative composition of functions formulas in sense of distributions.

Key words: generalized Lebesgue and Sobolev spaces, integrating by parts, weak derivative composition of function formula.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ СТЕПЕНЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Тарас БОКАЛО, Олег БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: tbokalo@gmail.com, ol_buhrii@i.ua

Доказаны формулы интегрирования по частям специального вида для функций с обобщённых пространств Соболева. Также доказана формула обобщённой производной от композиции функций в смысле распределений.

Ключевые слова: обобщённые пространства Лебега и Соболева, интегрирование по частям, обобщённая производная от композиции функций.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009