ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 70. С. 183–190

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 70. P. 183–190

УДК 517.5

ВЛАСТИВОСТІ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ З НЕВІД'ЄМНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Мирослав ШЕРЕМЕТА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru*

Досліджено близькість до опуклості, зростання і обмеженість l-індексу гіпергеометричної функції з додатними параметрами.

Ключові слова: гіпергеометрична функція, близькість до опуклості, обмеженість l-індексу.

1. Вступ. Аналітична однолиста в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція f називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Умова $\mathrm{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою [1, с.203] для опуклості f. Функція f називається [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0$ $(z \in \mathbb{D})$. Близька до опуклої функція f характеризується тим, що зовнішність G області $f(\mathbb{D})$ можна заповнити променями L, що виходять з ∂G і повністю лежать в G. Кожна близька до опуклої функція є однолистою в $\mathbb{D}$, тому $f'(0) \neq 0$.

Для додатної неперервної на $[0, 1)$ функції l такої, що $l(r) > \beta/(1 - r)$ для всіх $r \in [0, 1)$ і деякого $\beta > 0$, аналітична в $\mathbb{D}$ функція f називається функцією обмеженого l-індексу [1, с. 7], якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : \quad 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{1}$$

Найменше з таких N називається l-індексом і позначається через $N(f, l)$. Якщо $G \subset \mathbb{D}$ та існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що нерівність (1) правильна для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$, то f називатимемо функцією обмеженого l-індексу на (або в) G, а l-індекс позначатимемо через $N(f, l; G)$.

Гіпергеометричною називається [3, с. 62-64] функція

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}A_kz^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{(j+1)(j+\gamma)}\right)z^k, \tag{2}$$

де $\gamma\neq 0,\,-1\,-2,\ldots$. Радіус збіжності ряду (2) дорівнює 1, функція $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ аналітична в $\mathbb{D}$ і є розв'язком [3, с. 62] гіпергеометричного рівняння (Гаусса)

$$z(z-1)w''+((\alpha+\beta+1)z-\gamma)w'+\alpha\beta w=0. \tag{3}$$

Зауважимо, що $F(1,\beta,\beta;z)=1/(1-z)$ є сумою геометричної прогресії.

Виродженою гіпергеометричною називається [3, с. 78] функція

$$F(\alpha,\gamma;z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{j+\alpha}{j+\gamma}\right)\frac{z^k}{k!},\qquad \gamma\neq 0,\,-1\,-2,\ldots$$

Функція $F(\alpha,\gamma;z)$ є цілою і задовольняє [3, с.78] диференціальне рівняння $zw''+$ $+(\gamma-z)w'-\alpha w=0$. З теореми 1 з [4] випливає таке: якщо $0<\alpha\leqslant\gamma$, то вироджена гіпергеометрична функція та всі її похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і $\ln M_{F(\alpha,\gamma;\cdot)}(r)\sim r$ при $r\to+\infty$, де $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$. За цієї ж умови в [5] показано, що l-індекс кожної похідної порядку $n\geqslant 0$ функції $F(\alpha,\gamma;z)$ не перевищує 1 з $l(r)\equiv\max\{\sqrt{e}/(2-\sqrt{e}),\,4(\gamma+n+1)\}$.

Мета нашої праці – отримати подібні результати для гіпергеометричної функції.

2. Близькість до опуклості. Спочатку зауважимо таке: якщо всі похідні аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f є однолистими в $\mathbb{D}$, то f – ціла функція [6]. Тому всі похідні гіпергеометричної функції не можуть бути близькими до опуклих в $\mathbb{D}$. Проте правильне таке твердження.

Твердження 1. *Для будь-якого натурального N існують такі додатні параметри α, β, γ, що всі похідні порядку $n\leqslant N$ гіпергеометричної функції $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$.*

Доведення. Якщо через A_k позначимо тейлорові коефіцієнти функції $F(\alpha,\beta,\gamma;z)=$ $=F(z)$, то $A_{k+1}=\dfrac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+1)(k+\gamma)}A_k$ $(k\geqslant 0)$ і $F^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(k+n)!}{k!}A_{k+n}z^k$ $(n\geqslant 0)$, а отже, $F^{(n)}$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і тільки тоді, коли такою є функція

$$F_n(z)=\frac{F^{(n)}(z)-n!A_n}{(n+1)!A_{n+1}}=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k!(n+1)!}\frac{A_{n+k}}{A_{n+1}}z^k=$$

$$=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\prod_{j=n+1}^{n+k-1}\frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{j+\gamma}\right)\frac{z^k}{k!}=z+\sum_{k=2}^{\infty}A_k^{(n)}z^k\quad(n\geqslant 0).$$

Застосуємо тепер критерій Александера [7, с. 10], який стверджує таке: якщо $a(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ і

$$1\geqslant 2a_2\geqslant\ldots\geqslant ka_k\geqslant(k+1)a_{k+1}\geqslant\cdots>0,$$

то a близька до опуклої в $\mathbb{D}$.

Оскільки $kA_k^{(n)} \geqslant (k+1)A_{k+1}^{(n)}$ тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{(n+k+\alpha)(n+k+\beta)}{k(n+k+\gamma)} \le 1$, тобто $(\gamma-\alpha-\beta-n)k \geqslant (n+\alpha)(n+\beta)$, то остання нерівність правильна для всіх $k \geqslant 1$ за умови $\gamma \geqslant \alpha+\beta+n+(n+\alpha)(n+\beta)$. Якщо виберемо $\gamma = \alpha+\beta+N+ +(N+\alpha)(N+\beta)$, то за критерієм Александера всі функції F_n $(n \le N)$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$. Твердження 1 доведено. $\square$

3. Зростання. У наступному твердженні параметри α, β, γ вважають додатними, але з його доведення видно, що воно правильне і для дійсних параметрів, а у випадку комплексних параметрів можна отримати відповідні оцінки.

Твердження 2. *Для гіпергеометричної функції $F(z) = F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ з додатними параметрами α, β, γ правильні асимптотичні рівності*

$$M_F(r) \asymp \begin{cases} 1, & \alpha+\beta-\gamma<0, \\ \ln\dfrac{1}{1-r}, & \alpha+\beta-\gamma=0, \\ \dfrac{1}{(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}}, & \alpha+\beta-\gamma>0, \end{cases} \quad r\uparrow 1.$$

Доведення. Нехай $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : k+a>0\}$, де $a = \alpha+\beta-\gamma-1$. Тоді для $k \geqslant k_0+1$

$$\ln A_k = \sum_{j=0}^{k_0-1} \ln\frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{(j+1)(j+\gamma)} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \ln\left(\frac{j+a}{j} - \frac{((\gamma+1)a-\alpha\beta+\gamma)j+\gamma a}{j(j+1)(j+\gamma)}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k_0-1} \ln\frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{(j+1)(j+\gamma)} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \ln\frac{j+a}{j} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{((\gamma+1)a-\alpha\beta+\gamma)j+\gamma a}{(j+a)(j+1)(j+\gamma)}\right) =$$

$$= \sum_{j=k_0}^{k-1} \ln\frac{j+a}{j} + O(1) = \int_{k_0}^{k} \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)dx + O(1) =$$

$$= \int_{k_0}^{k} \frac{a}{x+a}dx + O(1) = a\ln(k+a) + O(1) = (\alpha+\beta-\gamma-1)\ln k + O(1), \quad k\to+\infty.$$

Тому існують сталі $0<h\le H<+\infty$ такі, що

$$hk^{\alpha+\beta-\gamma-1} \le A_k \le Hk^{\alpha+\beta-\gamma-1}, \qquad k \geqslant 1. \tag{4}$$

Якщо $\alpha+\beta-\gamma<0$, то $M_F(r) = F(\alpha,\beta,\gamma;r) = O(1)$, $r\uparrow 1$, якщо $\alpha+\beta-\gamma=0$, то $M_F(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$, $r\uparrow 1$.

Нарешті, нехай $\alpha+\beta-\gamma = p > 0$. Розглянемо степеневий ряд $F^*(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k^{p-1}r^k$.

Неважко показати, що

$$F^*(r) = \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x|\ln r|}dx + O(\exp\{\max\{(p-1)\ln x - x|\ln r| : x\geqslant 1\}\}, \quad r\uparrow 1.$$

Але

$$\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x|\ln r|}dx = \left(\frac{1}{|\ln r|}\right)^p \int_{|\ln r|}^\infty t^{p-1}e^{-t}dt \sim \frac{\Gamma(p)}{(1-r)^p}, \quad r \uparrow 1,$$

і

$$\max\{(p-1)\ln x - x|\ln r| : x \geqslant 1\} = \begin{cases} -|\ln r|, & 0 < p \le 1, \\ (p-1)\ln \dfrac{p-1}{e|\ln r|}, & p > 1, \end{cases}$$

тобто $\exp\{\max\{(p-1)\ln x - x|\ln r| : x \geqslant 1\} = o\left(\dfrac{1}{(1-r)^p}\right)$ і $F^*(r) \sim \dfrac{\Gamma(p)}{(1-r)^p}$, $r \uparrow 1$. Отже, $M_F(r) \asymp \dfrac{1}{(1-r)^p}$, $r \uparrow 1$, і твердження 2 доведено. □

4. Обмеженість l-індексу. У дослідженні l-індексу гіпергеометричної функції в $\mathbb{D}_R$, $R < 1$, будемо використовувати таку лему з [5].

Лема 1. *Нехай* $f(z) = 1 + \sum_{k=1}^\infty f_k z^k$ *аналітична в крузі* $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ *функція і* $\sum_{k=1}^\infty |f_k|R^k \le q(R) < 1$. *Тоді* $N(f, l; \mathbb{D}_{R/2}) \le 1$ *з* $l(r) \equiv 2R\dfrac{1+q(R)}{1-q(R)}$.

Твердження 3. *Якщо* $\max\{\alpha\beta,\, \alpha+\beta-1\} \le \gamma$, *то* $N(F, 2; \mathbb{D}_{1/6}) \le 1$, *якщо* $\max\{\gamma,\, \alpha+\beta-1\} \le \alpha\beta$, *то* $N(F, 2; \mathbb{D}_{\gamma/(6\alpha\beta)}) \le 1$.

Доведення. У першому випадку $A_k \le 1$ $(k \geqslant 0)$ і $\sum_{k=1}^\infty A_k(1/3)^k \le 1/2$. Тому за лемою 1 з $R = 1/3$ і $q(R) = 1/2$ маємо $N(F, 2; \mathbb{D}_{1/6}) \le 1$. У другому випадку $\dfrac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+1)(k+\gamma)} \le \le \dfrac{\alpha\beta}{\gamma}$ $(k \geqslant 0)$, а отже, $A_k \le \left(\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^k$ $(k \geqslant 1)$ і $\sum_{k=1}^\infty A_k \left(\dfrac{\gamma}{3\alpha\beta}\right)^k \le 1/2$. Тому за лемою 1 з $R = \gamma/(3\alpha\beta)$ і $q(R) = 1/2$ маємо $N(F, 2; \mathbb{D}_{\gamma/(6\alpha\beta)}) \le 1$. Твердження 3 доведено. □

Для оцінки l-індексу гіпергеометричної функції в $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_R$ з $R = 1/6$ чи $R = \gamma/(3\alpha\beta)$ використаємо той факт, що ця функція задовольняє диференціальне рівняння (3).

Твердження 4. *Якщо* $\max\{\alpha\beta,\, \alpha+\beta-1\} \le \gamma$, *то для похідної* $F^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ *гіпергеометричної функції* $F(z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ *правильна оцінка* $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{1/6}) \le 1$, *де* $l(r) = 9(\gamma+n+1)/(1-r)$.

Доведення. Оскільки функція F є розв'язком рівняння (3), то для $1/6 \le |z| < 1$ маємо

$$\frac{|F''(z)|}{2!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^2 \le \frac{\alpha+\beta+1+\gamma/|z|}{2|1-z|}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right) +$$

$$+\frac{\alpha\beta/|z|}{2|1-z|}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^2 |F(z)| \le \left(\frac{7\gamma+2}{18(\gamma+1)} + \frac{6\gamma}{162(\gamma+1)^2}\right) \times$$

$$\times \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right), |F(z)|\right\} < \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right), |F(z)|\right\}. \qquad (5)$$

Підставимо F в (3) і продиференціюємо $m \geqslant 1$ разів. Отримаємо тотожність

$$z(z-1)F^{(m+2)}(z) + ((\alpha+\beta+1+2m)z - (\gamma+m))F^{(m+1)}(z) +$$
$$+(m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta)F^{(m)}(z) \equiv 0, \qquad (6)$$

звідки, як вище,

$$\frac{|F^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m+2} \le \left(\frac{7\gamma+8m+2}{9(m+2)(\gamma+1)} + \frac{6(m+1)\gamma+6m^2}{81(m+2)(m+1)(\gamma+1)^2}\right)\times$$
$$\times \max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m+1}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m+1}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m}\right\}. \qquad (7)$$

З (5) і (7) легко випливає, що для всіх $n \geqslant 2$, $1/6 \le |z| < 1$

$$\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{n} \le \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right), |F(z)|\right\},$$

тобто $N(F, l; \mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/6}) \le 1$ з $l(r) = 9(\gamma+1)/(1-r)$.

Для $n \geqslant 1$ і $j \geqslant 0$ тотожність (6) перепишеться у вигляді

$$z(z-1)F^{(n+j+2)}(z) + ((\alpha+\beta+1+2n+2j)z - (\gamma+n+j))F^{(n+j+1)}(z) +$$
$$+((n+j)(n+j+\alpha+\beta)+\alpha\beta)F^{(n+j)}(z) \equiv 0. \qquad (8)$$

Звідси, як звичайно, отримуємо

$$\frac{|F^{(n+j+2)}(z)|}{(j+2)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j+2} \le$$
$$\le \left(\frac{7\gamma+8n+8j+2}{9(j+2)(\gamma+n+1)} + \frac{6(n+j+1)\gamma+6(n+j)^2}{81(j+2)(j+1)(\gamma+n+1)^2}\right)\times$$
$$\times \max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j+1}, \frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j}\right\} <$$
$$< \max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j+1}, \frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j}\right\}. \qquad (9)$$

Звідси випливає, що для кожного $n \geqslant 1$ і всіх $m \geqslant 2$

$$\frac{|F^{(n+m)}(z)|}{m!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{m} \le \max\left\{\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right), |F^{(n)}(z)|\right\}$$

тобто $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/6}) \le 1$ з $l(r) = 9(\gamma+n+1)/(1-r)$. Твердження 4 доведено. □

Твердження 5. *Якщо* $\max\{\gamma, \alpha+\beta-1\} \le \alpha\beta$, *то для похідної* $F^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ *гіпергеометричної функції* $F(z) = F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *правильна оцінка* $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{\gamma/(6\alpha\beta)}) \le 1$, *де* $l(r) = \dfrac{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}{\gamma(1-r)}$.

Доведення. Для $\gamma/(6\alpha\beta) \le |z| < 1$ аналогом нерівності (5) є така нерівність

$$\frac{|F''(z)|}{2!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^2 \le \left(\frac{7\alpha\beta+2}{18(\alpha\beta+1)\alpha\beta/\gamma} + \frac{6(\alpha\beta)^2}{162\gamma(\alpha\beta)^2(\alpha\beta+1)^2/\gamma^2}\right)\times$$

$$\times \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right), |F(z)|\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{7\alpha\beta+2}{18(\alpha\beta+1)} + \frac{\alpha\beta}{27(\alpha\beta+1)^2}\right)\max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right), |F(z)|\right\} <$$

$$< \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right), |F(z)|\right\}. \qquad (5')$$

Використовуючи тотожності (6) і (8), подібно доводяться такі аналоги нерівностей (7) і (9) :

$$\frac{|F^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m+2} \le$$

$$\le \left(\frac{7\alpha\beta+8m+2}{9(m+2)(\alpha\beta+1)} + \frac{2(m+1)\gamma+2m^2}{27(m+2)(m+1)(\alpha\beta+1)^2}\right)\times$$

$$\times \max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m+1}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m}\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m+1}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m}\right\} \qquad (7')$$

і

$$\frac{|F^{(n+j+2)}(z)|}{(j+2)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{j+2} \le$$

$$\le \left(\frac{7\alpha\beta+8n+8j+2}{9(j+2)(\alpha\beta+n+1)} + \frac{2(n+j+1)\alpha\beta+2(n+j)^2}{27(j+2)(j+1)(\alpha\beta+n+1)^2}\right)\times$$

$$\times \max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}\right)^{j+1}, \frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}\right)^{j}\right\} <$$

$$< \max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}\right)^{j+1}, \frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}\right)^{j}\right\}. \qquad (9')$$

З нерівностей (5'), (7') і (9'), як у доведенні твердження 4, для всіх $n \geqslant 0$ отримуємо нерівність $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{\gamma/(6\alpha\beta)}) \le 1$ з $l(r) = \dfrac{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}{\gamma(1-r)}$. Твердження 5 доведено. $\square$

5. Висновки. З доведень тверджень 3-5 видно, що подібні результати можна отримати і у випадку комплексних параметрів α, β, γ. Ми розглянули додатні α, β, γ для того, щоб за певних досить простих умов на параметри гіпергеометрична функція $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ володіла властивостями, наведеними у твердженнях 1-5.

Наприклад, правильна така теорема.

Теорема. *Якщо* $\gamma \geqslant \alpha+\beta+\alpha\beta$, *то гіпергеометрична функція* $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *є обмеженою, близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$ *і* l*-індекс* $N(F,l) \le 1$ *з* $l(r) = 9(\gamma+1)/(1-r)$. *Якщо* $\gamma = \alpha+\beta \geqslant \alpha\beta$, *то* $M_F(r) \asymp \ln \dfrac{1}{1-r}\,(r \uparrow 1)$ *і* $N(F,l) \le 1$ *з* $l(r) = 9(\gamma+1)/(1-r)$. *Якщо ж* $\gamma < \alpha+\beta \le \alpha\beta$, *то* $M_F(r) \asymp \dfrac{1}{(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}}\,(r\uparrow 1)$ *і* $N(F,l) \le 1$ *з* $l(r) = 9\alpha\beta(\alpha\beta+1)/(\gamma(1-r))$.

Справді, з доведення твердження 1 видно, що за умови $\gamma \geqslant \alpha+\beta+\alpha\beta$ функція $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$. З цієї умови випливає, що $\alpha+\beta < \gamma$, і тому за твердженням 2 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ є обмеженою. Нарешті, оскільки $\gamma \geqslant \alpha+\beta-1$ і $\gamma \geqslant \alpha\beta$, то за твердженнями 3-4 $N(F,2;\mathbb{D}_{1/6}) \le 1$ і $N(F^{(n)}, 9(\gamma+n+1)/(1-r); \mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/6}) \le 1$. Неважко показати [1, с. 23] таке: якщо $l_*(r) \le l^*(r)$ і $N(f,l_*;G) \le N$, то $N(f,l^*;G) \le N$, оскільки $9(\gamma+n+1)/(1-r) > 2$, то першу частину теореми доведено. Подібно доводяться дві інші частини теореми.

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплесного переменного / *Голузин Г.М.* – М.: Наука, 1966.
2. *Sheremeta M.M.* Analytic functions of bounded index / *Sheremeta M.M.* – Lviv: VNTL Publishers, 1999.
3. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции / *Кузнецов Д.С.* – М.: Высшая школа, 1965.
4. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II / *Shah S.M.* // J. Math. Anal. and Appl. – 1989. – Vol. 142. – P. 422-430.
5. *Шеремета З.М.* Обмеженість l-індексу аналітичних функцій, зображених степеневими рядами / *Шеремета З.М., Шеремета М.М.* // Вісник Львів. у-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 208-213.
6. *Shah S.M.* Univalent functions with univalent derivatives / *Shah S.M., Trimble S.Y.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 75. – P. 153-157.
7. *Goodman A.W.* Univalent functions / *Goodman A.W.* Mariner Publishing. Co. – 1983. – Vol. II.

PROPERTIES OF THE HYPERGEOMETRIC FUNCTION WITH POSITIVE PARAMETERS

Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Close-to-convexity, growth and l-index boundedness of the hypergeometric function with positive parameters are investigated.

Key words: hypergeometric function, close-to-convexity, l-index boundedness.

СВОЙСТВА ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Исследованы близость к выпуклости, рост и ограниченность l-индекса гипергеометрической функции с положительными параметрами.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, близость к выпуклости, ограниченность l-индексу.

Стаття надійшла до редколегії 22.04.2008

Прийнята до друку 12.06.2009