ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 70. С. 159–182

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 70. P. 159–182

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Галина ТОРГАН

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com*

Одержано деякі достатні умови існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку в необмеженій за просторовими змінними області.

Ключові слова: нелінійне параболічне рівняння, мішана задача.

Рівняння з другою похідною за часом і четвертими похідними за просторовими змінними вигляду

$$u_{tt} = div\ \sigma(\nabla u) + \triangle u_t - \delta^2 \triangle^2 u, \tag{1}$$

де $\sigma \geqslant 0$, $0 < \delta < 1$, моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. У працях [1], [2] розглянуто частковий випадок рівняння (1), коли наявна одна просторова змінна. Зазначимо, що задачі для рівнянь типу (1) з різними нелінійностями досліджено у [3]-[9].

У цій праці одержано деякі достатні умови існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку з другою похідною за часовою змінною в необмеженій за просторовими змінними області.

Нехай Ω – необмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $\Omega^R = \Omega \cap B^R$, де $B^R = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| < R\}$, $Q_T^R = \Omega^R \times (0,T)$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$. Припустимо, що для довільного додатного R область Ω^R регулярна в сенсі Кальдерона [12, с. 44].

В області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами і вільним членом

$$A(u) \equiv u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t) u_{t x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t) |u_{t x_i}|^{p-2} u_{t x_i})_{x_i} +$$
$$+ a_0(x,t) |u_t|^{q-2} u_t + c_0(x,t) u = f(x,t) \tag{2}$$

з початковими умовами

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad u_t(x,0)=u_1(x) \tag{3}$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial\widetilde{\nu}}\bigg|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \tag{4}$$

де $\widetilde{\nu}$ – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega\times(0,T)$, $p>1$, $q>1$.

Нехай $L^r_\nu(\Omega)$ – замикання множини функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$||u||_{L^r_\nu(\Omega)}=\left(\int\limits_\Omega |u|^r e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx\right)^{1/r}, \quad r\in[1,+\infty);$$

$H^2_{0,\nu}(\Omega)$ – замикання множини функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$||u||_{H^2_{0,\nu}(\Omega)}=\left(\int\limits_\Omega \left[|u|^2+\sum_{i,j=1}^n |u_{x_ix_j}|^2\right]e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx\right)^{1/2};$$

$W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)$ – замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$||u||_{W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)}=\left(\int\limits_\Omega \left[|u|^p+\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p\right]e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx\right)^{1/p};$$

$W^{1,p}_0(\Omega)$ – замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$||u||_{W^{1,p}_0(\Omega)}=\left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p dx\right)^{1/p};$$

$$W^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega})=\left\{u:\ u\in W^{1,p}_0(K) \ \text{ для довільної } \ K\subset\Omega\right\};$$

$$V_0(\Omega^R)=H^2_0(\Omega^R)\cap H^4(\Omega^R)\cap W^{1,2p-4}(\Omega^R)\cap W^{1,p}_0(\Omega^R)\cap L^{2q-2}(\Omega^R)$$

при $p>2$ і

$$V_0(\Omega^R)=H^2_0(\Omega^R)\cap H^4(\Omega^R)\cap W^{1,p}_0(\Omega^R)\cap L^{2q-2}(\Omega^R)$$

при $p\in(1,2)$. Припустимо виконання таких умов:

(A): $a_{ij},\ a_{ijt},\ a_{ijtt},\ a_i,\ a_{it},\ a_0,\ a_{0t}\in L^\infty(Q_T)$, $D^k a^{sl}_{ij}(\cdot)$, $D^1a_{ij}(\cdot,0)$, $D^1a_i(\cdot,0)\in$ $\in L^\infty(\Omega)$, $|k|\leqslant 2$, $i,j,s,l\in\{1,...,n\}$, де $D^k=\dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|k|=\alpha_1+...+\alpha_n$, $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$a_0(x,t)\geqslant A_0>0 \ \text{ для майже всіх } \ (x,t)\in Q_T;$$

$$\sum_{i,j=i}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant A_1\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2, \qquad A_1>0$$

для майже всіх $(x,t)\in Q_T$ і всіх $\xi_i\in\mathbb{R}$;

$$\sum_{i,j,s,l=i}^n a^{sl}_{ij}(x)\xi_{ij}\xi_{sl}\geqslant A_2\sum_{i,j=1}^n|\xi_{ij}|^2, \qquad A_2>0$$

для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$,

$$a_{ij}^{sl}(x) = a_{sl}^{ij}(x), \quad a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t) \quad \text{майже для всіх} \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$0 < \nu_1 \leqslant a_i(x,t) \leqslant \nu_2 \quad \text{для майже всіх} \quad (x,t) \in Q_T \quad \text{і всіх} \quad i \in \{1,...,n\};$$

(C): $c_0,\ c_{0t} \in L^\infty(Q_T)$.

Означення 1. *Функцію $u \in L^2((0,T); H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$ таку, що $u_t \in L^p((0,T); W^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega}))\cap$ $\cap L^q((0,T); L^q_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (2)-(4), якщо вона задовольняє (2) в Q_T в сенсі розподілів і задовольняє початкові умови (3).*

Розглянемо допоміжну задачу

$$A(u) = f^R(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^R, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0^R, \quad u_t(x,0) = u_1^R(x), \quad x \in \Omega^R, \tag{6}$$

$$u\big|_{\partial\Omega^R \times (0,T)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\bigg|_{\partial\Omega^R \times (0,T)} = 0, \tag{7}$$

де $R > 1$, $f^R(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_T^R, \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q_T^R, \end{cases}$ $u_0^R(x) = u_0(x)\rho_R(x)$,

$u_1^R(x) = u_1(x)\rho_R(x)$, $\rho_R \in C_0^4(\mathbb{R}^n)$, $\rho_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant R-1, \\ 0, & |x| \geqslant R, \end{cases}$,

$0 \leqslant \rho_R(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Означення 2. *Функцію $u \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega^R))$ таку, що $u_t \in L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R))\cap$ $\cap L^q(Q_T^R)$, $u_{tt} \in L^2(Q_T^R)$ і u задовольняє початкові умови (3) та рівність*

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[u_{tt}v + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i} v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i} v_{x_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_t v + c_0(x,t)uv - f(x,t)v \Bigg] dxdt = 0 \tag{8}$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ і $v \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega^R)) \cap L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (5)-(7).

Приймемо $q_0 = \min\{q', 2\}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(C)**, $q > 1$, $p \in (1,2) \cup (2,+\infty)$, $f \in L^{q_0}(Q_T^R)$, $f_t \in L^2(Q_T^R)$, $u_0^R \in H_0^2(\Omega^R) \cap H^4(\Omega^R)$, $u_1^R \in H_0^1(\Omega^R) \cap H^2(\Omega^R)\cap$ $\cap L^{2q-2}(\Omega^R) \cap W^{1,2p-4}(\Omega^R)$ при $p > 2$ і $u_1 = 0$ при $p \in (1,2)$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (5)-(7).*

Доведення. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Оскільки простір $V_0(\Omega^R)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\varphi^h\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $V_0(\Omega^R)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\varphi^h\}$

ортонормована в $L^2(\Omega^R)$. Розглянемо функції $u^N(x,t) = \sum\limits_{h=1}^{N} c_h^N(t)\varphi^h(x)$, $N \in \mathbb{N}$, де $c_1^N, c_2^N, ..., c_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int\limits_{\Omega^R}\Big[u_{tt}^N\varphi^h + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^N\varphi_{x_sx_l}^h + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^N\varphi_{x_j}^h + a_0(x,t)|u_t^N|^{q-2}u_t^N\varphi^h +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^N|^{p-2}u_{tx_i}^N\varphi_{x_i}^h + c_0(x,t)u^N\varphi^h - f^R(x,t)\varphi^h\Big]dx = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (9)$$

$$c_h^N(0) = u_{0,h}^{R,N}, \qquad c_{ht}^N(0) = u_{1,h}^{R,N}, \qquad h \in \{1,...,N\}, \qquad (10)$$

де

$$u_0^{R,N}(x) = \sum_{h=1}^{N} u_{0,h}^{R,N}\varphi^h(x), \quad \|u_0^{R,N} - u_0^R\|_{H^4(\Omega^R)\cap H_0^2(\Omega^R)} \to 0,$$

$$u_1^{R,N}(x) = \sum_{h=1}^{N} u_{1,h}^{R,N}\varphi^h(x), \quad \|u_1^{R,N} - u_1^R\|_{H^2(\Omega^R)\cap H_0^1(\Omega^R)\cap W_0^{1,2p-2}(\Omega^R)\cap L^{2q-2}(\Omega^R)} \to 0$$

при $N \to \infty$. На підставі теореми Каратеодорі [10, с. 54] існує розв'язок задачі (9), (10), який має абсолютно неперервну похідну на проміжку $[0, t_N]$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N = T$.

Домножимо (9) на c_{ht}^N, підсумуємо за h від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0,T]$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\Big[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^N u_{tx_sx_l}^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^N u_{tx_j}^N + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^N|^p +$$

$$+a_0(x,t)|u_t^N|^q + c_0(x,t)u^N u_t^N - f(x,t)u_t^N\Big]dxdt = 0. \qquad (11)$$

Врахувавши оцінку

$$J_1 := \int\limits_{Q_\tau^R} f^R(x,t)u_t^N dxdt \leqslant \frac{\delta_1\chi_0}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^2 dxdt + \frac{\delta_1(1-\chi_0)}{q}\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^q dxdt +$$

$$+\left(\frac{\chi_0}{2\delta_1} + \frac{1-\chi_0}{q'\delta_1^{\frac{q'}{q}}}\right)\int\limits_{Q_\tau^R}|f(x,t)|^{q_0} dxdt,$$

де $\delta_1 > 0$, $\chi_0 = 1$ при $q \in (1,2]$, $\chi_0 = 0$ при $q > 2$, і умови **(A)**, **(C)**, з (11) легко отримати нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R}\Big[|u_t^N|^2 + A_0\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2\Big]dx + \int\limits_{Q_\tau^R}\Big[2A_1\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^2 + \left(2A_0 - \frac{2\delta_1(1-\chi_0)}{q}\right)|u_t^N|^q +$$

$$+2\nu_1\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^p\Big]dxdt \leqslant \big(C_0 + 2T^2 + \delta_1\chi_0\big)\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^2 dxdt + \left(\frac{\chi_0}{\delta_1} + \frac{2(1-\chi_0)}{q'\delta_1^{\frac{q'}{q}}}\right)\times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau^R} |f^R(x,t)|^{q_0}\,dxdt + \int\limits_{\Omega_0^R} \Big[|u_1^{R,N}|^2 + \frac{A_3+1}{2}\sum_{i,j=1}^n |u_{0x_ix_j}^{R,N}|^2 + 2T|u_0^{R,N}|^2\Big]dx,$$

де $\tau \in (0,T]$, $A_3 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j,s,l=1}^n |a_{ij}^{sl}(x)|^2$, $C_0 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} |c_0(x,t)|^2$. Вибравши $\delta_1 = \frac{A_0 q}{2}$, можемо зробити підінтегральний вираз лівої частини отриманої нерівності додатним. Використовуючи лему Гронуолла-Белмана, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \Big[|u_t^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_ix_j}^N|^2\Big]dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^p + |u_t^N|^q\Big]dxdt \leqslant K_1, \tag{12}$$

де $\tau \in (0,T]$, K_1 – додатна константа, яка не залежить від N. Отже,

$$||u^N||_{L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega^R))} \leqslant K_1,$$

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R))\cap L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))\cap L^q(Q_T^R)\cap L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R))} \leqslant K_1. \tag{13}$$

Продиференціюємо за t рівність (9) (це можливо на підставі умов теореми). Отриману рівність домножимо на c_{htt}^N, підсумуємо за h від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0,T]$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[u_{ttt}^N u_{tt}^N + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{tx_ix_j}^N u_{ttx_sx_l}^N + \sum_{i,j=1}^n \big(a_{ijt}(x,t)u_{tx_i}^N + a_{ij}(x,t)u_{ttx_i}^N\big)u_{ttx_j}^N +$$

$$+\sum_{i=1}^n \big(a_{it}(x,t)|u_{tx_i}^N|^{p-2}u_{tx_i}^N u_{ttx_i}^N + (p-1)a_i(x,t)|u_{tx_i}^N|^{p-2}|u_{ttx_i}^N|^2\big) + a_{0t}(x,t)|u_t^N|^{q-2}u_{tt}^N +$$

$$+(q-1)a_0(x,t)|u_t^N|^{q-2}|u_{tt}^N|^2 + c_{0t}(x,t)u^N u_{tt}^N + c_0(x,t)u_t^N u_{tt}^N - f_t^R(x,t)u_{tt}^N\Big]dxdt = 0. \tag{14}$$

Оцінивши доданки останньої рівності (14) (на підставі умов **(A)**, **(C)**, отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \Big[|u_{tt}^N|^2 + A_2 \sum_{i,j=1}^n |u_{tx_ix_j}^N|^2\Big]dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\big(2\nu_1(p-1) - \delta_2\big)\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^{p-2}|u_{ttx_i}|^2 +$$

$$+A_1\sum_{i=1}^n |u_{ttx_i}^N|^2 + \big(2(q-1)A_0 - \delta_3\big)|u_t^N|^{q-2}|u_t^N|^2\Big]dxdt \leqslant \frac{A_4+1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\Big[\frac{A_5+1}{2}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 + \frac{A_6}{\delta_2}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^p + \frac{A_7}{\delta_3}|u_t|^q + |u_{tt}^N|^2\big(C_1 + C_0 + 1\big) +$$

$$+\big(1+2T^2\big)|u_t^N|^2\Big]dxdt + \int\limits_{\Omega_0^R}\Big[|u_{tt}^N|^2 + \frac{A_3+1}{2}\sum_{i,j=1}^n |u_{1x_ix_j}^{R,N}|^2 + \frac{A_4+1}{2}\sum_{i=1}^n |u_{1x_i}^{R,N}|^2 +$$

$$+2T|u_0^N|^2\Big]dx + \int\limits_{Q_\tau^R} |f_t^R(x,t)|^2 dx, \quad \delta_2 > 0, \quad \delta_3 > 0, \tag{15}$$

де $C_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |c_{0t}(x,t)|^2$, $A_4 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ijt}(x,t)|^2$, $A_5 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ijtt}(x,t)|^2$, $A_6 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} |a_{it}(x,t)|^2$, $A_7 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |a_{0t}(x,t)|^2$. Виберемо $\delta_2 < 2\nu_1(p-1)$, $\delta_3 < 2A_0(q-1)$, тоді підінтегральний вираз лівої частини останньої нерівності буде додатним.

Оцінимо $\int_{\Omega_0} |u_{tt}^N|^2 dx$. Домножимо (9) на $c_{htt}^N(0)$ і підсумуємо за h від 1 до N. Отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_0^R} \Bigg[|u_{tt}^N(0)|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{0x_ix_j}^{R,N} u_{ttx_sx_l}^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,0) u_{1x_i}^{R,N} u_{ttx_j}^N + a_0(x,0)|u_1^{R,N}|^{q-2} u_1^N \times$$

$$\times u_{tt}^N + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,0)|u_{1x_i}^{R,N}|^{p-2} u_{1x_i}^{R,N} u_{ttx_i}^N + c_0(x,0) u_0^{R,N} u_{tt}^N - f^R(x,0) u_{tt}^N \Bigg] dx = 0.$$

Згідно з умовами теореми щодо u_0 і u_1 та **(A)**, **(C)**, з цієї рівності випливає оцінка

$$\int\limits_{\Omega_0^R} |u_{tt}^N|^2 dx \leqslant K_2,$$

де K_2 – деяка константа, яка не залежить від N. Отже, права частина нерівності (15) обмежена деякою додатною константою, яка не залежить від N. До нерівності (15) застосуємо лему Гронуолла-Белмана. Одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \Bigg[|u_{tt}^N|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |u_{tx_ix_j}^N|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^N|^2 \Bigg] dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} |u_{ttx_i}^N|^2 dxdt \leqslant K_3, \tag{16}$$

де K_3 – деяка стала, яка не залежить від N, $\tau \in (0,T]$. Отож,

$$||u_{tt}^N||_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R)) \cap L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))} \leqslant K_3,$$
$$||u_t^N||_{L^2((0,T);H_0^2(\Omega^R)) \cap L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)} \leqslant K_3. \tag{17}$$

Введемо оператор

$$A : L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R) \to L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R)) + L^{q'}(Q_T^R)$$

за формулою

$$\langle A(u), v \rangle = \int\limits_{Q_T^R} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i} v_{tx_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q-2} u_t v_t \Bigg] dxdt,$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток між елементами простору $L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R)) + L^{q'}(Q_T^R)$ і $L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)$. Враховуючи (17), легко показати, що

$$||A(u^N)||_{L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R)) + L^{q'}(Q_T^R)} \leqslant K_4, \tag{18}$$

де стала K_4 не залежить від N. Отже, на підставі (13), (17), (18) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\} \subset \{u^N\}$ така, що $u^{N_k} \to u^R$ $*$- слабко в $L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega^R))$, $u_{tt}^{N_k} \to u_{tt}^R$ $*$- слабко в $L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R))$, $u_{tt}^{N_k} \to u_{tt}^R$ слабко в $L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))$,

$u_t^{N_k} \to u_t^R$ $*$ - слабко в $L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega^R))$, $u_t^{N_k} \to u_t^R$ слабко в $L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)$, $A(u^{N_k}) \to \chi^R$ слабко в $L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R)) + L^{q'}(Q_T^R))$ при $N_k \to \infty$.

Враховуючи ці збіжності, з (9) легко отримати рівність

$$\int\limits_{Q_T^R} \Big[u_{tt}^R\eta + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^R\eta_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^R\eta_{x_j} +$$

$$+c_0(x,t)u^R\eta - f^R(x,t)\eta\Big]dxdt + \langle\chi^R,\eta\rangle = 0, \tag{19}$$

яка виконується для довільного $\eta \in L^2((0,T);H_0^2(\Omega^R)) \cap L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R))\cap$ $\cap L^q(Q_T^R)$. Доведемо, що $A(u^R) = \chi^R$. Розглянемо послідовність

$$y_k = \langle A(u^{N_k}) - A(v), u^{N_k} - v\rangle = \int\limits_{Q_T^R} \Big[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\big(u_{tx_i}^{N_k} - v_{tx_i}\big)\big(|u_{tx_i}^{N_k}|^{p-2}u_{tx_i}^{N_k} -$$

$$-|v_{tx_i}|^{p-2}v_{tx_i}\big) + a_0(x,t)\big(u_t^{N_k} - v_t\big)\big(|u_t^{N_k}|^{q-2}u_t^{N_k} - |v_t|^{q-2}v_t\big)\Big]dxdt,\ k \in \mathbb{N}.$$

З нерівності $\big(|\xi|^{r-2}\xi - |\eta|^{r-2}\eta\big)\big(\xi - \eta\big) \geqslant 0$, яка виконується для $r > 1$, випливає, що $y_k \geqslant 0$. Отже,

$$0 \leqslant y_k = \langle A(u^{N_k}), u^{N_k}\rangle - \langle A(v), u^{N_k} - v\rangle - \langle A(u^{N_k}), v\rangle =$$

$$= \int\limits_{Q_T^R} \Big[f^R(x,t)u_t^{N_k} - u_{tt}^{N_k}u_t^{N_k} - \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^{N_k}u_{tx_sx_l}^{N_k} -$$

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^{N_k}u_{tx_j}^{N_k} - c_0(x,t)u^{N_k}u_t^{N_k}\Big]dxdt - \langle A(v), u^{N_k} - v\rangle - \langle A(u^{N_k}), v\rangle.$$

Перейдемо в останній нерівності до верхньої границі при $N_k \to \infty$. Використовуючи лему 5.3 [11], отримаємо

$$0 \leqslant \int\limits_{Q_T^R} \Big[f^R(x,t)u_t^R - \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^R u_{tx_sx_l}^R - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^R u_{tx_j}^R -$$

$$-c_0(x,t)u^R u_t^R\Big]dxdt - \langle A(v), u^R - v\rangle - \langle\chi^R, v\rangle - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T^R} |u_t^R|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R} |u_1^R|^2dx. \tag{20}$$

Оскільки $u_t^N \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))$, $u_{tt}^N \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))$, то на підставі леми 1.2 [12, с. 20] $u_t^R \in C((0,T);H_0^1(\Omega^R))$.

У формулі (19) приймемо $\eta = u_t^R$, матимемо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T^R} |u_t^R|^2dx + \int\limits_{Q_T^R} \Big[\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^R u_{tx_sx_l}^R + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^R u_{tx_j}^R +$$

$$+c_0(x,t)u^R u_t^R - f^R(x,t)u_t^R\Big] dxdt + \langle \chi^R, u_t^R\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R} |u_1^R|^2 dx. \tag{21}$$

Додавши (20) і (21), отримаємо нерівність

$$\langle \chi^R - A(v), u^R - v\rangle \geqslant 0.$$

Приймемо $u^R - v = \lambda\omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\omega \in L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)$, тоді одержимо

$$\langle \chi^R - A(u^R - \lambda\omega), \lambda\omega\rangle \geqslant 0.$$

Оскільки $\lambda > 0$, то можемо поділити отриману нерівність на λ. Спрямуємо λ до нуля і, враховуючи семінеперервність оператора A, матимемо

$$\langle \chi^R - A(u^R), \omega\rangle \geqslant 0.$$

Оскільки ω довільне, то можемо взяти ω і додатне, і від'ємне, тому

$$\chi^R = A(u^R). \tag{22}$$

Підставимо (22) у (19), отримаємо рівність (8) з означення узагальненого розв'язку задачі (5)-(7).

Залишилося показати, що виконуються початкові умови. Підставимо в (19) $\eta = \eta(x,t)$, $\eta \in C^2([0,T]; H_0^2(\Omega^R))$, $\eta(x,T) = 0$, $\eta_t(x,T) = 0$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_T^R} \Big[u^R\eta_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_ix_j}^R \eta_{x_sx_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^R|^{p-2} u_{tx_i}^R \eta_{x_i} + c_0(x,t)u^R\eta +$$

$$+a_0(x,t)|u_t^R|^{q-2}u_t^R\eta + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^R\eta_{x_j} - f^R(x,t)\eta\Big] dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0^R} u_t^R \eta dx - \int\limits_{\Omega_0^R} u^R\eta_t dx. \tag{23}$$

Для довільного $\eta \in C^2([0,T]; H_0^2(\Omega^R))$ виконується рівність

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[u^R\eta_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_ix_j}^R \eta_{x_sx_l} + c_0(x,t)u^R v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^R|^{p-2} u_{tx_i}^R \eta_{x_i} +$$

$$+a_0(x,t)|u_t^R|^{q-2}u_t^R\eta + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^R\eta_{x_j} - f^R(x,t)\eta\Big] dxdt$$

$$= \int\limits_{\Omega_0^R} u_1^R \eta dx - \int\limits_{\Omega_0^R} u_0^R\eta_t dx. \tag{24}$$

Віднявши від (23) рівність (24), одержимо

$$\int\limits_{\Omega_0^R} (u_t^R - u_1^R)\eta(x,0)dx - \int\limits_{\Omega_0^R} (u^R - u_0^R)\eta_t(x,0)dx = 0. \tag{25}$$

Нехай $\eta(x,t) = w(x)(T-t)^2 t$, $w \in H_0^2(\Omega^R)$. Тоді

$$\eta_t(x,t) = -2w(x)(T-t)t + w(x)(T-t)^2, \quad \eta(x,0) = 0, \quad \eta_t(x,0) = w(x)T_1^2.$$

Оскільки w – довільне, то з (25) одержимо, що $u_t^R(x,0) = u_1^R(x)$. Аналогічно, взявши $\eta(x,t) = w(x)(1-t^2)$, з (25) отримуємо, що $u^R(x,0) = u_0^R(x)$. Цілком подібно доводимо теорему для $p \in (1,2)$. □

Зауваження 1. Нехай область Ω лежить в шарі $\gamma_0 < x_1 < \gamma_1$, $\Theta_0 = \gamma_1 - \gamma_0$, $u \in L^p((0,T); W_{0,\nu}^{1,p}(\Omega))$. Тоді згідно з нерівністю Фрідріхса

$$\int\limits_{\Omega_t} |u|^p \psi(x)dx \leqslant C(\Theta_0, p) \int\limits_{\Omega_t} \left| [(u\psi(x))^{\frac{1}{p}}]_{x_1} \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant C(\Theta_0,p)2^{p-1} \left[\int\limits_{\Omega_t} |u_{x_1}|^p \psi(x)dx + \left(\frac{\nu}{p}\right)^p \int\limits_{\Omega_t} |u|^p \psi(x)dx \right],$$

де $\psi(x) = e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}$. Звідси

$$\left(1 - \frac{C(\Theta_0,p)2^{p-1}\nu^p}{p^p}\right) \int\limits_{\Omega_t} |u|^p \psi(x)dx \leqslant C(\Theta_0,p)2^{p-1} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p \psi(x)dx.$$

Отже, якщо $\nu < \frac{p}{[C(\Theta_0,p)2^{p-1}]^{1/p}}$, то

$$\int\limits_{\Omega_t} |u|^p \psi(x)dx \leqslant \gamma_2 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p \psi(x)dx,$$

де $\gamma_2 = \dfrac{1 - C(\Theta_0,p)2^{p-1}\nu^p p^{-p}}{C(\Theta_0,p)2^{p-1}}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(C)**, $p \in (2,+\infty)$, $q \in (p,+\infty)$, $n < \dfrac{pq}{q-p}$, область Ω лежить в шарі $\gamma_0 < x_1 < \gamma_1$, $\nu < \min\left\{\dfrac{p}{[C(\Theta_0,p)2^{p-1}]^{1/p}}; \dfrac{\nu_1 p p'}{2\nu_2(1+\gamma_2)}\right\}$, $u_0 \in H_{0,\nu}^2(\Omega)$, $u_1 \in L_\nu^2(\Omega)$, $f \in L^2((0,T); L_\nu^2(\Omega))$. Тоді існує узагальнений розв'язок u задачі (2)-(4), який задовольняє оцінку*

$$\int\limits_{Q_T} \left[|u|^2 + |u_t|^2 + |u_t|^q + |u_t|^p + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}|^p + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}|^2 \right] \psi(x)dxdt \leqslant M_1,$$

де $\psi(x) = e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}$ і стала M_1 залежить від початкових даних, вільного члена та коефіцієнтів рівняння, а також числа ν.

Доведення. Розглянемо в обмеженій області Q_T^k, де $k \in \mathbb{N}$, допоміжну задачу

$$\begin{gathered} A(u) = f^{k,k}, \quad (x,t) \in Q_T^k, \\ u|_{\partial\Omega^k \times (0,T)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\right|_{\partial\Omega^k \times (0,T)} = 0, \\ u(x,0) = u_0^{k,k}(x), \quad u_t(x,0) = u_1^{k,k}(x), \quad x \in \Omega^k, \end{gathered} \tag{26}$$

де $f^{k,k}(x,t)=\begin{cases} f^k(x,t), & (x,t)\in Q_T^k,\\ 0, & (x,t)\in Q_T\setminus Q_T^k,\end{cases}$ а початкові умови мають такий вигляд:

$$u_0^{k,k}(x)=u_0^k(x)\psi^k(x),\quad u_1^{k,k}(x)=u_1^k(x)\psi^k(x)$$

з $\psi^k(x)=\begin{cases} 1, & \text{при } |x|<k-1\\ 0, & \text{при } |x|\geqslant k,\end{cases}$ і $0\leqslant\psi^k(x)\leqslant 1$, $x\in\mathbb{R}^k$, $\psi^k\in C^4(\mathbb{R}^n)$.

Нехай послідовності $\{f^k\}$, $\{u_0^k\}$, $\{u_1^k\}$ такі, що

$$f^k\in C^1([0,T];C(\Omega)),\quad u_0^k\in C_0^4(\Omega),\quad u_1^k\in C_0^2(\Omega),\quad f^k\to f \text{ в } L^2((0,T);L^2_\nu(\Omega)),$$
$$u_0^k\to u_0 \text{ в } H^2_{0,\nu}(\Omega),\quad u_1^k\to u_1 \text{ в } L^2_\nu(\Omega) \text{ при } k\to\infty. \tag{27}$$

На підставі теореми 1 існує узагальнений розв'язок u^k задачі (26), $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Згідно з (9) маємо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[u_{tt}^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x)+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^k_{x_ix_j}(u_t^k e^{-\mu t}\psi(x))_{x_sx_l}+c_0(x,t)u^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x)+$$
$$+\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i}(u_t^k e^{-\mu t}\psi(x))_{x_i}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}(u_t^k e^{-\mu t}\psi(x))_{x_j}+$$
$$+a_0(x,t)|u_t^k|^{q-2}u_t^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x)\Bigg]dxdt=\int\limits_{Q_\tau} f^{k,k}u_t^k e^{-\mu t}\psi(x)dxdt, \tag{28}$$

де $\tau\in(0,T]$, $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\psi(x)=e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}$, $\nu>0$, $\mu>0$.

Оцінимо доданки останньої рівності. Очевидно,

$$J_2:=\int\limits_{Q_\tau}u_{tt}^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x)dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t^k|^2e^{-\mu\tau}\psi(x)dx+$$
$$+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2e^{-\mu t}\psi(x)dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_1^{k,k}|^2\psi(x)dx.$$

Оскільки $(\psi(x))_{x_i}=-\frac{\nu x_i}{\sqrt{|x|^2+1}}\psi(x)$,

$$(\psi(x))_{x_ix_j}=\frac{\nu^2x_ix_j}{|x|^2+1}\psi(x)-\nu\left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{|x|^2+1}}-\frac{x_ix_j}{(|x|^2+1)^{3/2}}\right)\psi(x),$$

де $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$ і $|(\psi(x))_{x_i}|\leqslant\nu\psi(x)$, $|(\psi(x))_{x_ix_j}|\leqslant(\nu^2+3\nu)\psi(x)$, то на підставі умов **(A)** і **(C)** маємо

$$J_3:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^k_{x_ix_j}u^k_{tx_sx_l}e^{-\mu t}\psi(x)dxdt\geqslant\frac{A_2}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^n|u^k_{x_ix_j}|^2e^{-\mu\tau}\psi(x)dx-$$
$$-\frac{A_3+1}{4}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n|u^{k,k}_{0x_ix_j}|^2\psi(x)dx+\frac{\mu A_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n|u^k_{x_ix_j}|^2e^{-\mu t}\psi(x)dxdt;$$

$$J_4 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u^k_{x_i x_j} u^k_{tx_s} (\psi(x))_{x_l} e^{-\mu t} dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\nu n^2 A_8}{2\delta_4} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u^k_{x_i x_j}|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt - \frac{\nu n^3 A_8 \delta_4}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt,$$

де $\delta_4 > 0,\ A_8 = \max\limits_{i,j,s,l \in \{1,\dots,n\}} \sup\limits_{\Omega} |a_{ij}^{sl}(x)|$;

$$J_5 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u^k_{x_i x_j} u^k_t (\psi(x))_{x_s x_l} e^{-\mu t} dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{n^2(\nu^2+3\nu)A_8}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u^k_{x_i x_j}|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt - \frac{n^4(\nu^2+3\nu)A_8}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^k_t|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt;$$

$$J_6 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) |u^k_{tx_i}|^{p-2} u^k_{tx_i} u^k_{tx_i} e^{-\mu t} \psi(x) dxdt \geqslant \nu_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^p e^{-\mu t} \psi(x) dxdt;$$

$$J_7 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) |u^k_{tx_i}|^{p-2} u^k_{tx_i} u_t (e^{-\mu t} \psi(x))_{x_i} dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\nu\nu_2}{p'} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^p e^{-\mu t} \psi(x) dxdt - \frac{\nu\nu_2 n}{p} \int\limits_{Q_\tau} |u^k_t|^p e^{-\mu t} \psi(x) dxdt.$$

Згідно з зауваженням 1

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^k_t|^p \psi(x) e^{-\mu t} dxdt \leqslant \gamma_2 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^p \psi(x) e^{-\mu t} dxdt$$

при $0 < \nu < \dfrac{p}{\left[C(\Theta_0, p) 2^{p-1}\right]^{1/p}}$, тому

$$J_7 \geqslant -\left(\frac{\nu\nu_2}{p'} + \frac{\nu\nu_2 n\gamma_2}{p}\right) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^p e^{-\mu t} \psi(x) dxdt.$$

Далі

$$J_8 := \int\limits_{Q_\tau} a_0(x,t) |u^k_t|^q e^{-\mu t} \psi(x) dxdt \geqslant A_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^k_t|^q e^{-\mu t} \psi(x) dxdt;$$

$$J_9 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u^k_{tx_i} u^k_{tx_j} e^{-\mu t} \psi(x) dxdt \geqslant A_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt;$$

$$J_{10} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u^k_{tx_i} u^k_t (e^{-\mu t} \psi(x))_{x_i} dxdt \geqslant -\frac{n\nu A_9 \delta_5}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt -$$

$$-\frac{n^2\nu A_9}{2\delta_5}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2e^{-\mu t}\psi(x)dxdt,$$

де $\delta_5>0$, $A_9=\max\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\sup\limits_{Q_T}|a_{ij}(x)|$;

$$J_{11}:=\int\limits_{Q_\tau}f^{k,k}(x,t)u_t^ke^{-\mu t}\psi(x)dxdt\leqslant-\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{\delta_6}{q}|u_t^k|^q+\frac{1}{q'\delta_6^{q'/q}}|f^{k,k}(x,t)|^{q'}\right]e^{-\mu t}\psi(x)dxdt,$$

де $\delta_6>0$;

$$J_{12}:=\int\limits_{Q_\tau}c_0(x,t)u^ku_t^ke^{-\mu t}\psi(x)dxdt\leqslant\left(\frac{C_2}{2}+C_2T^2\right)\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2e^{-\mu t}\psi(x)dxdt+$$

$$+C_2T\int\limits_{\Omega_0}|u_0^k|^2\psi(x)dxdt,$$

де $C_2=\operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T}c_0(x,t)$.

Враховуючи оцінки інтегралів J_2-J_{12}, з рівності (28) одержимо нерівність

$$\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t^k|^2+A_2\sum_{i,j=1}^k|u_{x_ix_j}^k|^2\right]e^{-\mu\tau}\psi(x)dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[\left(\frac{\mu}{2}-\frac{n^4A_8(\nu^2+3\nu)}{2}-\frac{C_2}{2}-C_2T^2-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{n^2\nu A_9}{2\delta_5}\right)|u_t^k|^2+\left(\frac{\mu A_2}{2}-\frac{\nu n^2A_8}{\delta_4}-\frac{n^2(\nu^2+3\nu)A_8}{2}\right)\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^k|^2+\left(\nu_1-\frac{2\nu\nu_2}{p'}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\nu\nu_2\gamma_2}{p}\right)\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^k|^p+\left(A_1-\frac{n\nu A_9\delta_5}{2}-\nu n^3A_8\delta_4\right)\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^k|^2+$$

$$\left.+\left(A_0-\frac{\delta_6}{q}\right)|u_t^k|^q\right]e^{-\mu t}\psi(x)dxdt\leqslant\frac{1}{q'\delta_6^{q'/q}}\int\limits_{Q_\tau}|f^{k,k}(x,t)|^{q'}e^{-\mu t}\psi(x)dxdt+$$

$$+\frac12\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_1^{k,k}|^2+\frac{A_3+1}{2}\sum_{i,j=1}^n|u_{0x_ix_j}^{k,k}|^2+2C_2T|u_0^{k,k}|^2\right]\psi(x)dx.\qquad(29)$$

Виберемо δ_4, δ_5, δ_6 такі, щоб $A_0-\frac{\delta_6}{p}>0$, $A_1-\frac{n\nu A_9\delta_5}{2}-\nu n^3A_8\delta_4>0$, і нехай

$$0<\nu<\min\left\{\frac{\nu_1pp'}{2\nu_2(1+\gamma_2)};\frac{p}{\left[C(\Theta_0,p)2^{p-1}\right]^{1/p}}\right\}.$$

Тоді з (29) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t^k|^2+\sum_{i,j=1}^k|u_{x_ix_j}^k|^2\right]\psi(x)dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[|u_t^k|^2+|u^k|^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^k|^2+\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^k|^p+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^k|^2+|u_t^k|^q\right]\psi(x)dxdt\leqslant M_2,\qquad(30)$$

де стала M_2 не залежить від k.

Зазначимо, що на підставі (30) послідовність $\{u^k\}$ обмежена у просторі $L^2((0,T);H^2_{0,\nu}(\Omega))$, а послідовність $\{u^k_t\}$ – у просторі $L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega))\cap L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega))$. Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^k\}$ (нехай для зручності це буде та сама послідовність) така, що

$$u^k\to u \quad *\text{- слабко в } L^\infty((0,T);H^2_{0,\nu}(\Omega)),$$

$$u^k_t\to u_t \ \text{ слабко в } L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega))\cap L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega))$$

$$u^k_t\to u_t \quad *\text{- слабко в } L^\infty((0,T);L^2_\nu(\Omega)) \ \text{ при } \ k\to\infty. \tag{31}$$

Нехай $R_0>1$ – довільне фіксоване число. Позначимо

$$H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})=\left\{u:\quad u\in H^2(\Omega^{R_0}),\quad u\big|_{\partial\Omega\cap B_{R_0}}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega\cap B_{R_0}}=0\right\},$$

$$L^q_\Omega(\Omega^{R_0})=\left\{u:\ u\in L^q(\Omega^{R_0})\right\},\quad W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})=\left\{u:\ u\in W^{1,p}(\Omega^{R_0}),\ u\big|_{\partial\Omega\cap B_{R_0}}=0\right\},$$

$\mathcal{R}_0$ – оператор звуження функції u, визначеної і вимірної в Ω, на область Ω^{R_0}. На підставі (30) послідовність $\{\mathcal{R}_0u^k\}$ обмежена в просторі $L^2((0,T);H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))$, а послідовність $\{\mathcal{R}_0u^k_t\}$ – у просторі $L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))\cap L^q((0,T);L^q_\Omega(\Omega^{R_0}))$. Зазначимо, що $\forall k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ в області $Q^{R_0}_T$ в сенсі розподілів правильна рівність

$$u^k_{tt}=-\sum_{i,j,s,l=1}^n(a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j})_{x_sx_l}+\sum_{i=1}^n(a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i})_{x_i}-a_0(x,t)|u^k_t|^{q-2}u^k_t-$$

$$-c_0(x,t)u^k+\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x,t)u^k_{tx_i})_{x_j}+f^{k,k}(x,t). \tag{32}$$

Тоді, використовуючи (30), (32) і умову **(A)**, легко одержати оцінку

$$||\mathcal{R}_0u^k_{tt}||_{V^*(Q^{R_0}_T)}\leqslant K_5, \tag{33}$$

де K_5 не залежить від k, а

$$V^*(Q^{R_0}_T)=L^2\Big((0,T);(H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*\Big)+L^{p'}\Big((0,T);(W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*\Big)+L^{q'}\Big((0,T);L^{q'}_\Omega(\Omega^{R_0})\Big).$$

Отже, існує така підпослідовність послідовності $\{\mathcal{R}_0u^k\}$ (нехай це та сама послідовність), що

$$\mathcal{R}_0u^k\to u^{R_0} \ \text{ слабко в } \ L^2((0,T);H^2(\Omega^{R_0})),$$

$$\mathcal{R}_0u^k_t\to u^{R_0}_t \ \text{ слабко в } \ L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))\cap L^q((0,T);L^q_\Omega(\Omega^{R_0})).$$

Крім того, оскільки

$$W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})\subset L^q(\Omega^{R_0})\subset(H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*+(W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*,$$

причому вкладення

$$W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})\subset L^q(\Omega^{R_0})$$

компактне при $n<\dfrac{pq}{q-p}$, то враховуючи (33) і теорему 5.1 [12, с. 70], можемо вважати, що

$$\mathcal{R}_0u^k_t\to u^{R_0}_t \ \text{ сильно в } \ L^q((0,T);L^q(\Omega^{R_0}))$$

і майже всюди в $Q_T^{R_0}$. Нехай R_0 послідовно набуває значення з множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Враховуючи діагональний процес, можемо побудувати таку підпослідовність (нехай це знову буде $\{u^k\}$), що

$$u^k \to \widehat{u} \text{ слабко в } L^2((0,T); H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})),$$

$$u^k_t \to \widehat{u}_t \text{ слабко в } L^p((0,T); W^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega})) \text{ при } k \to \infty. \tag{34}$$

Очевидно, $\widehat{u} = u$ в Q_T. Тоді

$$u^k_t \to u_t \text{ сильно в } L^q((0,T); L^q_\nu(\Omega)).$$

Легко довести, що

$$u^k_t \to u_t \text{ сильно в } L^2((0,T); L^2_\nu(\Omega)).$$

Зазначимо також, що на підставі (30)

$$\int\limits_{Q_T} \left| |u^k_{tx_i}|^{p-2} u^k_{tx_i} e^{-\frac{\nu}{p'}\sqrt{|x|^2+1}} \right|^{p'} dxdt \leqslant \int\limits_{Q_T} |u^k_{tx_i}|^p \psi(x) dxdt \leqslant K_6,$$

$i \in \{1, ..., n\}$, де стала K_6 не залежить від k. Тому можемо вважати, що

$$|u^k_{tx_i}|^{p-2} u^k_{tx_i} \to \chi_i \text{ слабко в } L^{p'}((0,T); L^{p'}_\nu(\Omega))$$

при $k \to \infty$, $i \in \{1, ..., n\}$. Зазначимо, що $\forall w \in L^2((0,T); H^2_{0,\nu}(\Omega))$ таких, що $w_t \in L^p((0,T); W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)) \cap L^q((0,T); L^q_\nu(\Omega)) \cap L^2((0,T); H^1_{0,\nu}(\Omega))$ правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega_T} u^k_t w e^{-\mu T} \psi(x) dx + \int\limits_{Q_T} \Bigg[\mu u^k_t w \psi(x) - u^k_t w_t \psi(x) + \sum_{i,j,s,l=1}^n a^{sl}_{ij}(x) u^k_{x_i x_j} (w\psi(x))_{x_s x_l} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u^k_{tx_i} (w\psi(x))_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u^k_{tx_i}|^{p-2} u^k_{tx_i} (w\psi(x))_{x_i} + c_0(x,t) u^k w\psi(x) +$$

$$+ a_0(x,t) |u^k_t|^{q-2} u^k_t w\psi(x) - f^{k,k}(x,t) w\psi(x) \Bigg] e^{-\mu t} dxdt = \int\limits_{\Omega_0} u^k_t(x,0) w\psi(x) dx, \tag{35}$$

де $k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, $\mu \geqslant 0$, $\nu > 0$, причому у цій рівності можна прийняти $w = u^k_t$. Якщо $\mu = 0$, то враховуючи (31), (33), (34), перейдемо до границі в (35) при $k \to \infty$ $(w(x,T) = 0,\ w(x,0) = 0)$:

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg[- u_t w_t \psi(x) + \sum_{i,j,s,l=1}^n a^{sl}_{ij}(x) u_{x_i x_j} (w\psi(x))_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i} (w\psi(x))_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x,t) \chi_i (w\psi(x))_{x_i} + a_0(x,t) |u_t|^{q-2} u_t w\psi(x) +$$

$$+ c_0(x,t) u w\psi(x) - f(x,t) w\psi(x) \Bigg] dxdt = 0. \tag{36}$$

З (36), зокрема, випливає, що в області Q_T в сенсі розподілів правильна рівність

$$u_{tt} = -\sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j})_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{tx_i})_{x_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t)\chi_i)_{x_i} - a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_t - c(x,t)u - f(x,t). \qquad (37)$$

Отже, $u_{tt} \in L^2((0,T);(H_{0,\nu}^2(\Omega))^*) + L^{p'}((0,T);(W_{0,\nu}^{1,p}(\Omega))^*) + L^{q'}((0,T);(L_\nu^q(\Omega))^*)$. Але

$$u_t \in L^2((0,T);H_{0,\nu}^1(\Omega)) \cap L^p((0,T);W_{0,\nu}^{1,p}(\Omega)) \cap L^q((0,T);L_\nu^q(\Omega)),$$

тому

$$u_t \in C([0,T];(H_{0,\nu}^2(\Omega))^* + (W_{0,\nu}^{1,p}(\Omega))^* + (L_\nu^q(\Omega))^*).$$

Нехай $\tau_0,\ \beta \in (0,T),\ \tau_0 < \beta,\ \Theta_m$ – неперервна кусково-лінійна функція на $[0,T]$; $\Theta_m(t) = 1$ при $\tau_0 + \frac{2}{m} < t < \beta - \frac{2}{m}$; $\Theta_m(t) = 0$ при $t > \beta - \frac{1}{m}$, $t < \tau_0 + \frac{1}{m}$. Нехай ρ_l – регуляризуюча послідовність в $D(\mathbb{R}),\ \rho_l(t) = \rho_l(-t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(t)dt = 1, \qquad \operatorname{supp} \rho_l \subset \left[-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right], \qquad l > 2m.$$

Приймемо в формулі (36)

$$w = \left[(\Theta_m u_t e^{-\frac{\mu t}{2}}) * \rho_l * \rho_l\right]\Theta_m e^{-\mu t/2},$$

де $*$ позначає згортку за змінною t. Нехай $\varphi(t) = e^{-\mu t/2}$.

Тоді для майже всіх β і τ_0 одержимо

$$-\int_{Q_T} u_t^2\Theta_m(t)\Theta_m'(t)e^{-\mu t}\psi(x)dxdt + \int_{Q_T} \Bigg[-\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi(x)\Theta_m(t)\Theta_m'(t) +$$

$$+\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi(x)\Theta_m^2(t) + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi(x))_{x_l} +$$

$$+u_{tx_l}(\psi(x))_{x_s}\big)e^{-\mu t}\Theta_m^2(t) + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(\psi(x))_{x_sx_l}e^{-\mu t}\Theta_m^2(t) +$$

$$+\frac{\mu}{2}u_t^2\Theta_m^2(t)e^{-\mu t}\psi(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(u_t\psi(x))_{x_j}e^{-\mu t}\Theta_m^2(t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(u_t\psi(x))_{x_i}e^{-\mu t}\Theta_m^2(t) + a_0(x,t)|u_t|^q\Theta_m^2(t)\psi(x)e^{-\mu t} +$$

$$+c_0(x,t)uu_t\Theta_m^2(t)\psi(x)e^{-\mu t} - f(x,t)u_t\psi(x)\Theta_m^2(t)e^{-\mu t}\Bigg]dxdt = 0. \qquad (38)$$

Оскільки

$$\Theta_m(t)=\begin{cases} m(t-\tau_0)-1, & t\in\left[\tau_0+\dfrac{1}{m},\tau_0+\dfrac{2}{m}\right] \\ -m(t-\beta)+1, & t\in\left[\beta-\dfrac{2}{m},\beta-\dfrac{1}{m}\right], \end{cases}$$

то за теоремою про середнє [13, с. 114],

$$m\int\limits_{\tau_0+\frac{1}{m}}^{\tau_0+\frac{2}{m}} g(t)\big(m(t-\tau_0)-1\big)dt=mg(\xi)\left[\frac{mt^2}{2}-\big(m\tau_0+1\big)t\right]\Bigg|_{\tau_0+\frac{1}{m}}^{\tau_0+\frac{2}{m}}=\frac{\mu_0}{2},$$

де $\mu_0\in[\beta_0,\beta_1]$, $\beta_0\leqslant g(x)\leqslant\beta_1$ на $[\tau_0+\frac{1}{m},\tau_0+\frac{2}{m}]$. Перейдемо в (38) до границі при $m\to\infty$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\beta}\left[u_t^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\right]\psi(x)e^{-\mu t}dx+\int\limits_{Q_{\tau_0,\beta}}\left[\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\psi(x)+\right.$$

$$+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}(\psi(x))_{x_s}\big)+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(\psi(x))_{x_sx_l}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(u_t\psi(x))_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\chi_i(u_t\psi(x))_{x_i}+\frac{\mu}{2}|u_t|^2\psi(x)+a_0(x,t)|u_t|^q\psi(x)+$$

$$\left.+c_0(x,t)uu_t\psi(x)-f(x,t)u_t\psi(x)\right]e^{-\mu t}dxdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau_0}}\left[|u_t|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_s,x_l}\right]\psi(x)e^{-\mu t}dx. \tag{39}$$

Множина $\{u_t(\cdot,t)\}$ обмежена в $L^2_\nu(\Omega)$ і $u_t\in C([0,T];(H^2_{0,\nu}(\Omega))^*+(W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^*+$ $+(L^q_\nu(\Omega))^*)$. Отже, існує послідовність точок $t_k\subset[0,T], t_k\to 0$ таких, що $u_t(\cdot,t_k)\to z_1$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$. З іншого боку, $u_t(\cdot,t_k)\to u_t(\cdot,0)\to u_1$ слабко в $(H^2_{0,\nu}(\Omega))^*+$ $+(W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^*+(L^q_\nu(\Omega))^*$. Тому $z_1=u_1$ і $u_t(\cdot,t_k)\to u_1$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$.

Множина $\{u(\cdot,t)\}$ обмежена в $L^2_\nu(\Omega)$, $u\in L^\infty([0,T];H^2_{0,\nu}(\Omega))$. Отож, існує послідовність точок $\{t_k\}\subset(0,T]$, $t_k\to 0$ таких, що $u(\cdot,t_k)\to z_0$ слабко в $H^2_{0,\nu}(\Omega)$, $u(\cdot,t_k)\to u(\cdot,0)=u_0$ в $L^2_\nu(\Omega)$. Тому $z_0=u_0$ і $u(\cdot,t_k)\to u_0$ слабко в $H^2_{0,\nu}(\Omega)$. З (39) отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[u_t^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_sx_l}u_{x_ix_j}\right]\psi(x)e^{-\mu\tau}dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_sx_l}u_{x_ix_j}\psi(x)+\right.$$

$$+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}(\psi(x))_{x_s}\big)+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(\psi(x))_{x_sx_l}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(x,t)(u_t\psi(x))_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\chi_i(u_t\psi(x))_{x_i}+a_0(x,t)|u_t|^q\psi(x)+$$

$$+\frac{\mu}{2}u_t^2\psi(x)+c_0(x,t)uu_t\psi(x)\Big]e^{-\mu t}dxdt\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Big[u_1^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}u_{0x_sx_l}\Big]\psi(x)dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau} f(x,t)u_t\psi(x)e^{-\mu t}dxdt \tag{40}$$

майже для всіх $\tau\in[0,T]$. Розглянемо послідовність $\{Y_k\}$, визначену рівностями

$$0\leqslant Y_k:=\int\limits_{Q_\beta}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(|u_{tx_i}^k|^{p-2}-|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i})(u_{tx_i}^k-w_{x_i})e^{-\mu t}\psi(x)+$$

$$+a_0(x,t)(|u_t^k|^{p-2}u_t^k-|w|^{p-2}w)(u_t^k-w)e^{-\mu t}\psi(x)\Big]dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_\beta}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^k|^p+a_0(x,t)|u_t^k|^p\Big]e^{-\mu t}\psi(x)dxdt-$$

$$-\int\limits_{Q_\beta}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^k|^{p-2}u_{tx_i}^k(w\psi)_{x_i}+a_0(x,t)|u_t^k|^{q-2}u_t^k w\psi\Big]e^{-\mu t}dxdt-$$

$$-\int\limits_{Q_\beta}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i}(u_t^k-w)_{x_i}\psi+a_0(x,t)|w|^{q-2}w(u_t^k-w)\psi\Big]e^{-\mu t}dxdt.$$

Приймемо

$$g_k:=\int\limits_{Q_\beta}\Big[f_k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x)-\frac{\mu}{2}|u_t^k|^2e^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j,l,s=1}^{n}\frac{1}{2}\mu a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k u_{x_sx_l}^k e^{-\mu t}\psi(x)-$$

$$-\sum_{i,j,l,s=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k\big(u_{tx_s}^k(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}^k(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_s}\big)-\sum_{i,j,l,s=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k u_t^k\times$$

$$\times(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_sx_l}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}^k u_{tx_j}^k e^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}^k u_t^k(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{tx_i}^k|^{p-2}u_{tx_i}^k u_t^k\psi_{x_i}(x)e^{-\mu t}-c_0(x)u^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x)\Big]dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\beta}\Big[|u_t^k|^2+$$

$$+\sum_{i,j,l,s=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k u_{x_sx_l}^k\Big]e^{-\mu\beta}\psi(x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_1^k|^2+\sum_{i,j,l,s=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^k u_{0x_sx_l}^k\Big]\psi(x)dx. \tag{41}$$

Зазначимо, що у просторі X функцій таких, що

$$\int\limits_{Q_\beta}\Big[u_t^2+u^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}|^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{tx_ix_j}|^2\Big]dxdt<\infty$$

можна ввести еквівалентну норму за формулою (при достатньо великих μ)

$$||u||_X=\Bigg(\int\limits_{Q_\beta}\Big[\frac{1}{2}\mu\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi(x)+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi(x))_{x_l}+$$

$$+u_{tx_l}(\psi(x))_{x_s}\big)e^{-\mu t}+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_lx_s}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{tx_j}e^{-\mu t}\psi(x)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n u_{tx_i}u_t(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_j}-uu_te^{-\mu t}\psi(x)+c_0(x)uu_te^{-\mu t}\psi(x)+$$

$$+\frac{\mu}{2}u^2e^{-\mu t}\psi(x)+\frac{\mu}{2}u_t^2e^{-\mu t}\psi(x)\Big]dxdt\Bigg)^{1/2}.$$

Тому

$$\sup\lim_{k\to\infty}g_k\leqslant\int\limits_{Q_\beta}\Big[-\frac{\mu}{2}|u_t|^2e^{-\mu t}\psi(x)-\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}(ue^{-\mu t}\psi(x))_{x_sx_l}+$$

$$+f(x,t)u_te^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_s}\big)-$$

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{tx_j}e^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}u_t(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_j}-$$

$$-\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_sx_l}-\sum_{i=1}^n a_i(x)\chi_iu_t\psi_{x_i}(x)e^{-\mu t}-$$

$$-c_0(x)uu_te^{-\mu t}\psi(x)\Big]dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\beta}\Big[u_t^2+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\Big]e^{-\mu\beta-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Big[u_1^2+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}u_{0x_sx_l}\Big]\psi(x)dx.$$

Отож,

$$0\leqslant\sup\lim_{k\to\infty}Y_k\leqslant\int\limits_{Q_\beta}\Big[-\frac{\mu}{2}|u_t|^2e^{-\mu t}\psi(x)-\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi(x)+$$

$$+f(x,t)u_te^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_s}\big)-$$

$$-\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_sx_l}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{tx_j}e^{-\mu t}\psi(x)-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}u_te^{-\mu t}(\psi(x))_{x_j}-\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\chi_iu_tw_{x_i}e^{-\mu t}-$$

$$-c_0(x)uu_te^{-\mu t}\psi(x)\Bigg]dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\beta}\Bigg[u_t^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\Bigg]e^{-\mu\beta-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[u_1^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}u_{0x_sx_l}\Bigg]\psi(x)dx-\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i}\times$$

$$\times\big((u_t-w)e^{-\mu t}\psi(x)\big)_{x_i}+a_0(x,t)|w|^{q-2}w(u_t-w)e^{-\mu t}\psi(x)\Bigg]dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[-\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(w_{x_i}\psi(x))e^{-\mu t}-a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_twe^{-\mu t}\Bigg]dxdt. \tag{42}$$

Додавши (39) і (42), одержимо

$$\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(u_t\psi(x))_{x_i}+a_0(x,t)|u_t|^p\psi(x)-\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_iw_{x_i}\psi(x)-$$

$$-a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_tw\psi(x)\Bigg]e^{-\mu t}dxdt-\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i}((u_t-w)_{x_i}\psi(x))+$$

$$+a_0(x,t)|w|^{p-2}w(u_t-w)\psi(x)\Bigg]e^{-\mu t}dxdt\geqslant 0.$$

Нехай $w=u_t-\lambda z,\ \lambda>0$. Тоді отримана нерівність набуде вигляду

$$\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(z_{x_i}\psi(x))+a_0(x,t)|u_t|^{p-2}u_tz\psi(x)-\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}-\lambda z_{x_i}|^{p-2}\times$$

$$\times(u_{tx_i}-\lambda z_{x_i})z_{x_i}\psi(x)-a_0(x,t)|u_t-\lambda z|^{q-2}(u_t-\lambda z)z\psi(x)\Bigg]e^{-\mu t}dxdt\geqslant 0. \tag{43}$$

Перейдемо в (43) до границі при $\lambda\to+0$:

$$\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(\chi_i-|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i})(z_{x_i}\psi(x))\Bigg]e^{-\mu t}dxdt\geqslant 0.$$

Звідки, зокрема,

$$\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(\chi_i-|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i})(z_{x_i}\psi(x))\Bigg]e^{-\mu t}dxdt=0$$

для всіх $z\in L^p((0,T);W_{0,\nu}^{1,p}(\Omega))$. Отже, $\chi_i=|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i}$ майже всюди в Q_T, $i\in\{1,...,n\}$.

Залишилося показати виконання початкових умов. На підставі (31) можемо вважати, що $u^k(\cdot,0) \to u(\cdot,0)$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$. Але $u^k(\cdot,0) = u_0^{k,k} \to u_0$ в $H^2_{0,\nu}(\Omega)$. Тому $u(x,0) = u_0(x)$. Аналогічно, $u^k_t(\cdot,0) \to u_y(\cdot,0)$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$, а $u^k_t(\cdot,0) = u_1^{k,k} \to u_1$ в $L^2_\nu(\Omega)$. Отож, $u_t(x,0) = u_1(x)$. □

Нехай $p \in (1,2)$. Тоді для довільних дійсних чисел a і b правильна нерівність

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) \leqslant 2^{p-1}|a-b|^p.$$

Звідки, зокрема, випливає оцінка

$$||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b|^{p'} \leqslant 2(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b). \tag{44}$$

Нехай, крім того, $q > 1$. Розглянемо простір функцій v таких, що $v \in L^2((0,T); H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, $v_t \in L^2((0,T); H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^q((0,T); L^q_{loc}(\overline{\Omega}))$. З цього простору виділимо множину функцій, для яких

$$\int\limits_{Q_T}\left[v^2 + v_t^2 + |v_t|^p + |v_t|^q + \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}|^p + \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}|^2 + \sum_{i,j=1}^n |v_{x_ix_j}|^2\right](|x|^2+1)^{-\rho}dxdt < \infty,$$

де $\rho > 0$. Позначимо її через $\mathcal{M}_\rho$. Введемо множину $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{\rho>0} \mathcal{M}_\rho$. Зазначимо таке: якщо $v \in \mathcal{M}$, то існує таке $\rho > 0$, що $v \in \mathcal{M}_\rho$. Нехай $\nu > 0$ – довільне число. Тоді існує така стала $A(\nu,\rho)$, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}} \leqslant A(\nu,\rho)(|x|^2+1)^{-\rho}.$$

Отже, якщо $v \in \mathcal{M}$, то

$$\int\limits_{Q_T}\left[v^2 + v_t^2 + |v_t|^p + |v_t|^q + \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}|^p + \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}|^2 + \sum_{i,j=1}^n |v_{x_ix_j}|^2\right]e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dxdt < \infty,$$

яке б не було число $\nu > 0$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(C)**, $p \in (\frac{2n}{n+2}, 2)$, $q > 1$, $u_0 \in H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $f \in L^{q_0}((0,T); L^{q_0}_{loc}(\overline{\Omega}))$. Тоді задача (2)-(4) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій $\mathcal{M}$.*

Доведення. Припустимо, що існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 задачі (2)-(4). Враховуючи означення узагальненого розв'язку, зазначимо, що виконується рівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^k_t v\psi(x)dx + \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[-u^k_t v_t\psi(x) + \sum_{i,j,s,l=1}^n a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j}(v\psi(x))_{x_sx_l} +$$
$$+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u^k_{tx_i}(v\psi(x))_{x_i} + c_0(x,t)u^k v\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i}(v\psi(x))_{x_i} +$$
$$+a_0(x,t)|u^k_t|^{q-2}u^k_t v\psi(x)\Bigg]dxdt = \int\limits_{\Omega_0} u_1 v\psi(x)dx + \int\limits_{Q_\tau} f(x,t)v\psi(x)dxdt, \quad k \in \{1,2\}, \tag{45}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ і довільних $v \in L^2((0,T); H^2_{0,\nu}(\Omega)) \cap L^p((0,T); W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)) \cap$ $\cap L^q((0,T); L^q_\nu(\Omega))$ таких, що $v_t \in L^2((0,T); L^2_\nu(\Omega))$, де $\nu > 0$. Позначимо $u^{1,2} =$

$= u^1 - u^2$. Очевидно, $u^{1,2}(x,0) = 0$ майже всюди в Ω. Віднімемо рівності (45) при $k = 1$ і $k = 2$ та приймемо

$$v = \Big[\big(\Theta_m u_t^{1,2} e^{-\mu t/2}\big) * \rho_l * \rho_l\Big]\Theta_m e^{-\mu t/2}.$$

Аналогічно як при доведенні теореми 2 легко довести рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2} u_{x_s x_l}^{1,2}\Big]\psi(x)e^{-\mu t}dx + \int\limits_{Q_\tau}\Big[\frac{\mu}{2}|u_t^{1,2}|^2\psi(x) +$$
$$+\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2} u_{x_s x_l}^{1,2}\psi(x) + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2}\big(u_{tx_s}^{1,2}(\psi(x))_{x_l} + u_{tx_l}^{1,2}(\psi(x))_{x_s}\big) +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^{1,2}(u_t^{1,2}\psi(x))_{x_j} + c_0(x,t)u^{1,2}u_t^{1,2}\psi(x) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(|u_{tx_i}^1|^{p-2}u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2}u_{tx_i}^2)(u_t^{1,2}\psi(x))_{x_i}\Big]e^{-\mu t}dxdt +$$
$$+\int\limits_{Q_\tau} a_0(x,t)(|u_t^1|^{q-2}u_t^1 - |u_t^2|^{q-2}u_t^2)u_t^{1,2}\psi(x)e^{-\mu t}dxdt = 0 \tag{46}$$

правильну для майже всіх $\tau \in (0,T]$. Зазначимо, що згідно з умовою **(A)** перший і третій інтеграли у рівності (46) невід'ємні. Тому звідси одержимо нерівність вигляду

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[\frac{\mu}{2}|u_t^{1,2}|^2\psi(x) + \frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2} u_{x_s x_l}^{1,2}\psi(x) + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2}\big(u_{tx_s}^{1,2}(\psi(x))_{x_l} +$$
$$+u_{tx_l}^{1,2}(\psi(x))_{x_s}\big) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^{1,2}(u_t^{1,2}\psi(x))_{x_j} + c_0(x,t)u^{1,2}u_t^{1,2}\psi(x)\Big]e^{-\mu t}dxdt +$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(|u_{tx_i}^1|^{p-2}u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2}u_{tx_i}^2)(u_t^{1,2}\psi(x))_{x_i}e^{-\mu t}dxdt \leqslant 0. \tag{47}$$

Вибравши невиключну послідовність точок $\{\tau_h\} \subset (0,T]$ таку, що $\lim\limits_{h\to\infty}\tau_h = T$, одержуємо правильність (47) і для $\tau = T$. Надалі в (47) приймемо $\tau = T$. Позначимо перший інтеграл в (47) через P_1. Тоді на підставі умов **(A)**, **(C)** (цілком подібно як при доведенні теореми 2) матимемо оцінку

$$P_1 \geqslant \int\limits_{Q_T}\Big[\Big(\frac{\mu}{2} - \frac{A_8 n^4(\nu^2+3\nu)}{2} - \frac{n^2\nu A_9}{2\delta_5} - \frac{C_2(1+2T^2)}{2}\Big)|u_t^{1,2}|^2 + \Big(\frac{\mu A_2}{2} - \frac{\nu n^2 A_8}{\delta_4} -$$
$$-\frac{n^2(\nu^2+3\nu)A_8}{2}\Big)\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \Big(A_1 - \nu n^3 A_8\delta_4 - \frac{n\nu A_9\delta_5}{2}\Big)\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^{1,2}|^2\Big]\psi(x)e^{-\mu t}dxdt.$$

Виберемо параметри μ, δ_4 і δ_5 так, що

$$P_1 \geqslant \int\limits_{Q_T} \left[\omega_1 |u_t^{1,2}|^2 + \omega_0 \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^{1,2}|^2 + \omega_0 \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2\right] \psi(x) e^{-\mu t} dxdt,$$

де $\omega_0 > 0$, $\omega_1 \geqslant \frac{\nu_1 n}{2} + 1$. Позначимо другий інтеграл у (47) через P_2. Згідно з умовою **(A)** і нерівністю (44) маємо

$$P_2 \geqslant \nu_0 \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} (|u_{tx_i}^1|^{p-2} u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2} u_{tx_i}^2) u_{tx_i}^{1,2} \psi(x) e^{-\mu t} dxdt -$$

$$-\frac{\nu_1 n}{2} \int\limits_{Q_T} |u_t^{1,2}|^2 \psi(x) e^{-\mu t} dxdt - \frac{\nu_1 \varepsilon_1}{p'} \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} (|u_{tx_i}^1|^{p-2} u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2} u_{tx_i}^2)^{p'} \psi(x) e^{-\mu t} dxdt -$$

$$-\frac{\nu_1 n (2-p) \nu^{\frac{2p}{2-p}}}{2p \varepsilon_1^{\frac{2(p-1)}{2-p}}} \int\limits_{Q_T} \psi(x) e^{-\mu t} dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \left(\nu_0 - \frac{2\nu_1 \varepsilon_1}{p'}\right) \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} (|u_{tx_i}^1|^{p-2} u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2} u_{tx_i}^2) u_{tx_i}^{1,2} \psi(x) e^{-\mu t} dxdt -$$

$$-\frac{\nu_1 n}{2} \int\limits_{Q_T} |u_t^{1,2}|^2 \psi(x) e^{-\mu t} dxdt - \frac{\nu_1 n (2-p)(n-1)! \sigma_{n-1}}{2p \varepsilon_1^{\frac{2(p-1)}{2-p}}} \nu^{\frac{2p}{2-p} - n},$$

де σ_{n-1} – площа поверхні одиничної $(n-1)$-вимірної сфери. Виберемо $\varepsilon_1 = \dfrac{\nu_0 p'}{2\nu_1}$. Тоді, враховуючи оцінки інтегралів P_1 і P_2, з (47), одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_T} |u_t^{1,2}|^2 \psi(x) dxdt \leqslant \omega_2 \nu^{\frac{2p}{2-p} - n},$$

де стала ω_2 не залежить від ν. Оскільки за умовою теореми $\frac{2p}{2-p} - n > 0$ і ν може бути довільним як завгодно малим додатним числом, то з останньої нерівності випливає, що $u_t^{1,2} = 0$ майже всюди в Q_T. Але $u^{1,2}(x,0) = 0$, тому $u^{1,2}(x,t) = 0$ майже всюди в Q_T і теорему доведено. $\square$

---

1. *Kallies W.D., Holmes P.J.* On a dynamical model for phase transformation in nonlinear elasticity, in: J.Chadam, M.Golubitsky, W.Langford, B.Wetton (eds.), Pattern formation: symmetry methods and applications, Fields Institute Communications 5, AMS, Providence, 1996.
2. *Kallies W.D.* Regularized models of phase transformation in one-dimensional nonlinear elasticity / *Kallies W.D.* // Ph.D. Thesis, Cornell University, 1994.
3. *Rybka P.* Convergence of solutions to the Equation of Quasi-Static Approximation of Viscoelasticity with Capillarity / *Rybka P, Hoffmann K.-H.* // Journal of mathematical analysis and applications. – 1988. – Vol. 226, №1. – P. 61-81.
4. *Abeyaratne R.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids / *Abeyaratne R., Knowles J.K.* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1991. – Vol. 114. – C. 119-154.

5. *Abeyaratne R.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids / *Abeyaratne R., Knowles J.K.* // SIAM J. Appl. Math. – 1991. – Vol. 51. – C. 1205-1221.
6. *Slemrod M.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid / *Slemrod M.* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1983. – Vol. 81. – C. 37-85.
7. *Процах Н.П.* Мішана задача для нелінійного еволюційного рівняння з другою похідною за часом в узагальнених просторах Лебега / *Процах Н.П.* // Математичні студії. – 2001. – Т. 16, №. 2. – С. 157-168.
8. *Процах Н.* Існування та єдиність розв'язку мішаної задачі для одного параболічного нелінійного рівняння / *Процах Н.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 148-157.
9. *Слепцова И.П.* Принцип Фрагмена-Линделефа для неоднородных квазилинейных эволюционних уравнений высшего порядка / *Слепцова И.П., Шишков А.Е.* // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, №2. – С. 239-249.
10. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. / *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М., 1958.
11. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М., 1978.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М., 1972.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа / *Фихтенгольц Г. М.* // Т. 2. – М., 1968.

THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION OF THE FOUR ORDER

Halyna TORHAN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com

In this article there are obtained some sufficient conditions the existence of a generalized solution of the initial boundary value problem for a nonlinear parabolic equation of the four order in an unbounded domain with respect to spatial variables.

Key words: nonlinear parabolic equation, initial boundary value problem.

СМЕШАНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Галина ТОРГАН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: torgan_ g@yahoo.com

Получены некоторые достаточные условия существования обобщенного решения смешаной задачи для нелинейного параболического уравнения четвертого порядка в неограниченной за пространственными переменными области.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, смешаная задача.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.2008

Прийнята до друку 12.06.2009