

УДК 330.3

## ВЕКТОРНІ МОДЕЛІ РУХОМОГО СЕРЕДНЬОГО

Назарій САЛІШ

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Досліджено та описано теоретичну побудову векторних процесів рухомого середнього. Визначено основні властивості та побудовано методи знаходження оцінок параметрів цих моделей. Розглянуто застосування на прикладі фінансових показників.

*Ключові слова:* векторні моделі рухомого середнього, метод максимальної правдоподібності, векторні авторегресійні процеси, автоковаріаційна генеруюча функція.

**1. Вступ.** У цій праці описано векторну  $MA$  модель із специфічного класу моделей часових рядів. Векторний процес рухомого середнього є ширшою моделлю за звичайні  $MA$  процеси, відмінності якої дають змогу робити прогнози точнішими та оптимальнішими. Головна задача – побудова  $VMA$  моделі, дослідження її властивостей, побудова автоковаріаційної генеруючої функції та оцінка параметрів моделі.

Одержані результати можна застосовувати в макроекономіці, що демонструє реалізований нижче приклад. Ці результати дають право стверджувати, що як і  $VAR$  моделі,  $VMA$  моделі дають не гірші прогнози, ніж моделі структурних рівнянь. Вагомою перевагою цих моделей є одночасне поєднання декількох часових рядів, які допомагають враховувати і досліджувати взаємозворотні зв'язки між показниками.

Наша праця охоплює математичну побудову та приклад, в якому проведено порівняльний аналіз двофакторної векторної моделі рухомого середнього зі звичайними  $MA$  моделями, який цікавий з економічного та математичного боку.

Зазначимо, що з основними поняттями  $VAR$  і  $MA$  можна ознайомитися у книгах [1-3]. Крім того, у працях [4,5] наведено деякі підходи до оцінювання параметрів цих моделей.

### **2. Загальні властивості векторних $MA$ процесів.**

*2.1. Векторний процес рухомого середнього першого порядку.* Розглянемо процес

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Omega\varepsilon_{t-1}, \quad (1)$$

де  $\mu$  – деякий сталий вектор;  $\Omega$  – матриця розміру  $n \times n$ . Цей часовий ряд називається векторним процесом рухомого середнього і позначається  $VMA(1)$ .

Основні припущення моделі такі:

- (i) досліджуваний процес є стаціонарним, тобто володіє двома властивостями:
- 1)  $E[Y_t] = const$ , для всіх  $t$ ;
  - 2)  $E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)'] = \Gamma_k$ , для всіх  $t$ ,
- де  $\Gamma_k$  – позначає матрицю автоковаріацій і залежить лише від  $k$ ;
- (ii) часовий ряд  $\varepsilon_t$  задовольняє умови:
- 1)  $E[\varepsilon_t] = 0$ , для всіх  $t$ ;
  - 2)  $Var[\varepsilon_t] = \Sigma$ , для всіх  $t$ ;
  - 3)  $E[\varepsilon_t \varepsilon_s'] = 0$  при  $t \neq s$ ;

Такий процес ще називають "білий шум". Враховуючи зроблені припущення, наведемо деякі властивості  $VMA$  процесу (1).

1°.  $E[Y_t] = \mu$ , тобто математичне сподівання вектора  $Y_t$  – стала  $\mu$ . Для цього достатньо обчислити математичне сподівання обох сторін (1)

$$E[Y_t] = E[\mu + \varepsilon_t + \Omega \varepsilon_{t-1}] = \mu + E[\varepsilon_t] + \Omega E[\varepsilon_{t-1}] = \mu.$$

2°. Використовуючи припущення (i) та (ii), розпишемо за означенням  $Var[Y_t]$ :

$$\begin{aligned} Var[Y_t] &= E[(Y_t - \mu)(Y_t - \mu)'] = E[(\varepsilon_t + \Omega \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t + \Omega \varepsilon_{t-1})'] = E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] + \\ &+ E[\varepsilon_t (\Omega \varepsilon_{t-1})'] + E[\Omega \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t'] + \Omega E[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}'] \Omega' = \Sigma + \Omega \Sigma \Omega'. \end{aligned}$$

Отже, дисперсія  $Y_t$  має вигляд

$$Var[Y_t] = \Gamma_0 = \Sigma + \Omega \Sigma \Omega'. \quad (2)$$

3°. Знайдемо вигляд автоковаріаційних матриць для цього процесу. Маємо

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)'] = E[(\varepsilon_t + \Omega \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} + \Omega \varepsilon_{t-(k+1)})'] = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}'] + \\ &+ E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-(k+1)}'] \Omega' + \Omega E[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k}'] + \Omega E[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-(k+1)}'] \Omega'. \end{aligned}$$

Оскільки,  $E[\varepsilon_t \varepsilon_s'] = 0$  при  $t \neq s$ , то при  $k = 1$ , будемо мати  $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}'] = 0$ ,  $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}'] \Omega' = 0$  та  $\Omega E[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}'] \Omega' = 0$ . Отже, одержимо

$$\Gamma_k = \begin{cases} \Omega \Sigma, & \text{при } k = 1, \\ 0, & \text{при } k > 1. \end{cases} \quad (3)$$

2.2.  $VMA(q)$  процес. Векторний процес рухомого середнього порядку  $q$  має вигляд

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Omega_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \Omega_q \varepsilon_{t-q}. \quad (4)$$

Припущення такі, як і у випадку  $VMA(1)$ . Процес стаціонарний та  $\{\varepsilon_t\}$  – векторний білий шум. Знайдемо вигляд математичного сподівання та автоковаріаційних матриць. Очевидно,  $E[Y_t] = E[\mu] + E[\varepsilon_t] + \sum_{j=1}^q \Omega_j E[\varepsilon_{t-j}] = \mu$ . Дисперсія (або  $\Gamma_0$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= E[(Y_t - \mu)(Y_t - \mu)'] = E[\varepsilon_t \varepsilon_t] + \Omega_1 E[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}'] \Omega_1' + \dots + \Omega_q E[\varepsilon_{t-q} \varepsilon_{t-q}'] \Omega_q' = \\ &= \Sigma + \Omega_1 \Sigma \Omega_1' + \Omega_2 \Sigma \Omega_2' + \dots + \Omega_q \Sigma \Omega_q'. \end{aligned}$$

Загальний вигляд  $\Gamma_k$  при  $k \neq 0$ :

$$\Gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)'] = \begin{cases} \Omega_k \Sigma + \Omega_{k+1} \Sigma \Omega'_1 + \dots + \Omega_q \Sigma \Omega'_{q-k}, & \text{при } k = 1, \dots, q, \\ \Sigma \Omega'_{-k} + \Omega_1 \Sigma \Omega'_{1-k} + \dots + \Omega_{q+k} \Sigma \Omega'_q, & \text{при } k = -1, \dots, -q, \\ 0, & \text{при } |k| > q. \end{cases}$$

Ще одну властивість сформулюємо як лему.

**Лема 1.** Для моделі (1) виконується рівність

$$\Gamma'_k = \Gamma_{-k}. \quad (5)$$

*Доведення.* Маємо  $\Gamma'_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)'] = E[(Y_{t-k} - \mu)(Y_{(t-k)+k} - \mu)'] = \Gamma_{-k}$ .  $\square$

2.3. *VMA*( $\infty$ ) процес. Векторний процес рухомого середнього нескінченного порядку можна подати у вигляді

$$Y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_k \varepsilon_{t-k}, \quad (6)$$

де  $Y_t, \varepsilon_{t-k}$  вектори з  $n$  координатами;  $\mu$  – деякий сталий вектор;  $\Omega_i$  – матриці розміру  $n \times n$  для  $i = 1, \dots$ ;  $\Omega_0 = I_n$  – одинична матриця розміру  $n \times n$ .

**Означення 1.** Будемо називати ряд складений з матриць  $\{\Psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  абсолютно збіжним, якщо при фіксованих  $i$  та  $j$  ряд з відповідних елементів матриць  $\{\psi_{i,j}\}_{k=-\infty}^{\infty}$  буде абсолютно збіжний.

Подамо основні властивості у вигляді теореми.

**Теорема 1.** Нехай маємо процес (6), який задовольняє припущення (i), (ii) та ряд матриць  $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$  абсолютно збіжний. Тоді:

а) автоковаріаційна матриця порядку  $s$  існує та задається виразом

$$\Gamma_s = \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_{k+s} \Sigma \Omega'_k; \quad (7)$$

б) послідовність матриць  $\{\Gamma_s\}_{s=0}^{\infty}$  задає абсолютно збіжний ряд.

*Доведення.* а) Нехай  $\omega_{ij}^{(k)}$  елемент матриці  $\Omega_k$ . Тоді  $i$ -та координата вектора  $Y_t$  матиме вигляд

$$y_t^i = \mu_i + \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{il}^{(k)} \varepsilon_{t-k}^l. \quad (8)$$

Введемо ще одне позначення

$$f(i, l, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{il}^{(k)} \varepsilon_{t-k}^l.$$

Тоді (8) набуде вигляду  $y_t^i = \mu_i + \sum_{l=1}^n f(i, l, t)$ . Знайдемо математичне сподівання добутку  $f(i, l, t)$  та  $f(j, m, t-s)$ , де  $i, j, l, m$  набувають значення від 1 до  $n$ . Оскільки

$\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$  абсолютно збіжна, то

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\omega_{im}^{(r)} \omega_{il}^{(k)}| &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\omega_{im}^{(r)}| \cdot |\omega_{il}^{(k)}| = \\ &= \left( \sum_{r=0}^{\infty} |\omega_{im}^{(r)}| \right) \times \left( \sum_{k=0}^{\infty} |\omega_{il}^{(k)}| \right) < \infty. \end{aligned}$$

Тоді згідно з теоремою Коші про добуток абсолютно збіжних рядів маємо право записати рівності

$$\begin{aligned} E[f(i, l, t) \cdot f(j, m, t - s)] &= E\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \omega_{il}^{(k)} \varepsilon_{t-k}^l\right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} \omega_{jm}^{(r)} \varepsilon_{t-s-r}^m\right)\right] = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{jm}^{(r)} \omega_{il}^{(k)} E[\varepsilon_{t-k}^l \varepsilon_{t-s-r}^m]. \end{aligned}$$

За припущенням (ii) моделі  $E[\varepsilon_{t-k}^l \varepsilon_{t-s-r}^m] \neq 0$  тільки при  $k = s + r$ . Отже, отримали

$$E[f(i, l, t) \cdot f(j, m, t - s)] = \sum_{r=0}^{\infty} \omega_{il}^{(r+s)} \omega_{jm}^{(r)} \sigma_{lm}, \quad (9)$$

де  $\sigma_{lm}$  відповідний елемент матриці  $\Sigma$ . Елемент  $\gamma_{ij}^{(s)}$  матриці  $\Gamma_s$  шукаємо за формулою

$$\gamma_{ij}^{(s)} = E[(y_t^i - \mu_i)((y_{t-s}^j - \mu_j)].$$

Використовуючи формули (8) та (9), запишемо

$$\begin{aligned} E[(y_t^i - \mu_i)((y_{t-s}^j - \mu_j))] &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n E[f(i, l, t) \cdot f(j, m, t - s)] = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{r=0}^{\infty} \omega_{il}^{(r+s)} \omega_{jm}^{(r)} \sigma_{lm} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \omega_{il}^{(r+s)} \omega_{jm}^{(r)} \sigma_{lm}. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно,  $\sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \omega_{il}^{(r+s)} \omega_{jm}^{(r)} \sigma_{lm}$  є елементом матриці  $\Omega_{k+s} \Sigma \Omega_k'$ , що утворюється перетином  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця. З цього випливає, що вигляд автоковаріаційної матриці задається рівнянням (7).

б) Позначимо  $g_s(i, j, l, m) = E[f(i, l, t) \cdot f(j, m, t - s)]$ . Зауважимо, що ряд  $\{g_s(\cdot)\}_{s=0}^{\infty}$  абсолютно збіжний

$$\sum_{s=0}^{\infty} |g_s(\cdot)| \leq \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} |\omega_{il}^{(r+s)} \omega_{jm}^{(r)} \sigma_{lm}| = |\sigma_{lm}| \sum_{r=0}^{\infty} |\omega_{jm}^{(r)}| \sum_{s=0}^{\infty} |\omega_{il}^{(r+s)}| < \infty.$$

Тоді існує таке  $M$ , що  $\sum_{s=0}^{\infty} |g_s(\cdot)| < M$ . Звідси

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} |\gamma_{ij}^{(s)}| &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n |g_s(l, m, \cdot)| = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{s=0}^{\infty} |g_s(l, m, \cdot)| < n^2 M < \infty. \end{aligned}$$

Це доводить, що ряд матриць  $\{\Gamma_s\}_{k=0}^{\infty}$  абсолютно збіжний.  $\square$

**3. Автоковаріаційна генеруюча функція для  $VMA$  процесів.** Для стаціонарного векторного процесу з абсолютно збіжними автоковаріаційними матрицями означення функції вводитья аналогічно до скалярного випадку.

**Означення 2.** Автоковаріаційною генеруючою функцією для векторних процесів називається функція, яка задається

$$G_Y(z) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma_j z^j,$$

де  $\Gamma_j = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)']$ ;  $z$  - комплексний скаляр.

Наприклад, автоковаріаційна генеруюча функція векторного білого шуму має вигляд

$$G_\varepsilon(z) = \Sigma.$$

Побудуємо цю функцію для  $VMA(1)$  процесу. З формул (2), (3) та леми одержуємо вирази для  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_{-1}$ . Решта автоковаріаційних матриць дорівнюють нулю. Тоді

$$G_Y(z) = (\Sigma + \Omega \Sigma \Omega') + \Omega \Sigma z + \Sigma' \Omega' z^{-1} = (I_n + \Omega z) \Sigma (I_n + \Omega' z^{-1}).$$

Аналогічно будується автоковаріаційна генеруюча функція для  $VMA(q)$  процесу

$$\begin{aligned} G_Y(z) &= (I_n + \Omega_1 z + \Omega_2 z^2 + \dots + \Omega_q z^q) \Sigma \times \\ &\times (I_n + \Omega'_1 z^{-1} + \Omega'_2 z^{-2} + \dots + \Omega'_q z^{-q}). \end{aligned} \quad (11)$$

Нехай  $VMA$  нескінченного порядку, задається виразом

$$Y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_k \varepsilon_{t-k} = \mu + \Omega(L) \varepsilon_t,$$

де  $\Omega(L) = \Omega_1 L + \dots + \Omega_q L^q$ ;  $L$  - лаговий оператор. Ряд  $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$  абсолютно збіжний, тоді за теоремою  $\{\Gamma_s\}_{k=0}^{\infty}$  - абсолютно збіжний. Отже, існує автоковаріаційна генеруюча функція і вона буде задаватися виразом

$$G_Y(z) = [\Omega(z)] \Sigma [\Omega(z^{-1})]'. \quad (12)$$

#### 4. Оцінки параметрів $VMA$ процесу методом автоковаріацій.

4.1. Випадок  $VMA(1)$  з двома змінними. Опишемо модель, параметри якої будемо досліджувати. Нехай

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Omega \varepsilon_{t-1}, \quad (13)$$

де  $Y_t$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon_t$  стовпці розміру два;  $\Omega$  зображена у вигляді

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Модель (13) також можна подати так:

$$\begin{cases} y_t^1 = \mu_1 + e_t^1 + \omega_{11}e_{t-1}^1 + \omega_{12}e_{t-1}^2, \\ y_t^2 = \mu_2 + e_t^2 + \omega_{21}e_{t-1}^1 + \omega_{22}e_{t-1}^2. \end{cases} \quad (15)$$

Цей метод полягає в тому, що ми можемо знайти оцінку параметрів моделі через матриці автоковаріації  $\Gamma_k$ , де  $k = 0, 1$  та вектор математичних сподівань  $\mu$ . Нехай маємо  $T$  спостережень  $Y_t$ .

Позначимо

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k) \end{pmatrix}.$$

Тоді оцінка математичного сподівання матиме вигляд

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^T Y_t}{T},$$

або покоординатно  $\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^T y_t^1}{T}$ ,  $\hat{\mu}_2 = \frac{\sum_{i=1}^T y_t^2}{T}$ . Аналогічно можемо оцінити елементи автоковаріаційних матриць

$$\hat{\gamma}_{ij}(k) = \frac{\sum_{t=1+k}^T (y_t^i - \hat{\mu}_i)(y_{t-k}^j - \hat{\mu}_j)}{T - k}, \quad (16)$$

де  $i, j = 1, 2$ .

На підставі оцінок  $\hat{\mu}$  та  $\hat{\Gamma}_k$  знайдемо оцінки  $\Omega$  та  $\Sigma$ . З властивостей (2), (3) для векторних МА(1) процесів одержуємо, що  $\Gamma_0 = \Sigma + \Omega\Sigma\Omega'$  та  $\Gamma_1 = \Omega\Sigma$ . Розглянемо випадок, який буде реалізований на прикладі в пункті 7.

Нехай

$$\Sigma = \begin{pmatrix} d_1 & k \\ k & d_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

тобто збурення обох процесів між собою корелюють і мають різні дисперсії. Рівність (14) задає вигляд матриця  $\Omega$ .

Тоді згідно з (2) та (3)

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Sigma + \Omega\Sigma\Omega' = \\ &= \begin{pmatrix} d_1\omega_{11}^2 + d_2\omega_{12}^2 + 2k\omega_{11}\omega_{12} & d_1\omega_{11}\omega_{21} + d_2\omega_{12}\omega_{22} + k(\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21}) \\ d_1\omega_{11}\omega_{21} + d_2\omega_{12}\omega_{22} + k(\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21}) & d_2\omega_{22}^2 + d_1\omega_{21}^2 + 2\omega_{21}\omega_{22}k \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Gamma_1 = \Omega\Sigma = \begin{pmatrix} d_1\omega_{11} + k\omega_{12} & d_2\omega_{12} + k\omega_{11} \\ d_1\omega_{21} + k\omega_{22} & d_2\omega_{22} + k\omega_{21} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Використовуючи (16), (18) та (19), можемо записати таку систему рівнянь, а розв'язок дасть нам шукані оцінки:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{11}(1) = \omega_{11}d_1 + \omega_{12}k, \\ \hat{\gamma}_{12}(1) = \omega_{12}d_2 + \omega_{11}k, \\ \hat{\gamma}_{21}(1) = \omega_{21}d_1 + \omega_{22}k, \\ \hat{\gamma}_{22}(1) = \omega_{22}d_2 + \omega_{21}k, \\ \hat{\gamma}_{11}(0) = d_1\omega_{11}^2 + d_2\omega_{12}^2 + 2\omega_{11}\omega_{12}k, \\ \hat{\gamma}_{22}(0) = d_2\omega_{22}^2 + d_1\omega_{21}^2 + 2\omega_{21}\omega_{22}k, \\ \hat{\gamma}_{12}(0) = \omega_{11}\omega_{21}d_1 + \omega_{12}\omega_{22}d_2 + k(\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21}). \end{cases} \quad (20)$$

Ця система нелінійна і її розв'язок можна знайти лише наближеними методами.

4.2. Оцінки параметрів  $VMA(q)$  процесу. Маємо процес (4)

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Omega_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \Omega_q\varepsilon_{t-q}.$$

Зведемо пошук оцінок до системи матричних рівнянь. Оцінимо матриці автоковаріацій  $\Gamma_k = (\gamma_{ij})$  як і в випадку  $VMA(1)$

$$\hat{\gamma}_{ij}(k) = \frac{\sum_{t=1+k}^T (y_t^i - \hat{\mu}_i)(y_{t-k}^j - \hat{\mu}_j)}{T - k},$$

де  $i, j$  набувають значення від 1 до  $n$ . Тоді згідно з рівняннями, які були виведені в пункті 2.2, можна записати систему

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \Sigma + \Omega_1\Sigma\Omega'_1 + \Omega_2\Sigma\Omega'_2 + \dots + \Omega_q\Sigma\Omega'_q, \\ \dots\dots\dots \\ \Gamma_k = \Omega_k\Sigma + \Omega_{k+1}\Sigma\Omega'_1 + \dots + \Omega_q\Sigma\Omega'_{q-k} \text{ при } k = 1, \dots, q. \end{cases} \quad (21)$$

**5. Оцінки параметрів  $VMA$  процесу методом максимальної правдоподібності.** Знайдемо оцінки параметрів моделі (1) за допомогою методу умовної правдоподібності та методу точної правдоподібності.

Додаткове припущення до початкової моделі:  $\varepsilon_t$  – невироджений нормальний вектор, тобто  $\varepsilon_t \sim N[0, \Sigma]$ , де  $\Sigma$  симетрична, додатно визначена матриця.

5.1. Метод умовної правдоподібності. Якщо значення  $\varepsilon_{t-1}$  з певністю відоме, то

$$Y_t|\varepsilon_{t-1} \sim N[\mu + \Omega\varepsilon_{t-1}, \Sigma]$$

і

$$f(Y_t|\varepsilon_{t-1}; \mu, \Sigma, \Omega) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Y_t - \mu - \Omega\varepsilon_{t-1})'\Sigma^{-1}(Y_t - \mu - \Omega\varepsilon_{t-1})\right].$$

Припустимо, що  $\varepsilon_0 = 0$ . Тоді  $(Y_1|\varepsilon_0 = 0) \sim N[\mu, \Sigma]$ . Маючи спостереження  $Y_1$ , знайдемо  $\varepsilon_1 = Y_1 - \mu$ . Тепер можемо записати щільність

$$f(Y_2|Y_1, \varepsilon_0 = 0; \mu, \Sigma, \Omega) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Y_2 - \mu - \Omega\varepsilon_1)'\Sigma^{-1}(Y_2 - \mu - \Omega\varepsilon_1)\right].$$

Продовжуючи цей процес, маємо, що  $\varepsilon_t = Y_t - \mu - \Omega\varepsilon_{t-1}$  та

$$f(Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_1, \varepsilon_0 = 0; \mu, \Sigma, \Omega) = f(Y_t|\varepsilon_{t-1}; \mu, \Sigma, \Omega) = \\ = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Y_t - \mu - \Omega\varepsilon_{t-1})' \Sigma^{-1} (Y_t - \mu - \Omega\varepsilon_{t-1})\right].$$

Функція правдоподібності всієї вибірки матиме вигляд

$$L(Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_1, \varepsilon_0 = 0, \mu, \Sigma, \Omega) = f(Y_1|\varepsilon_0 = 0; \mu, \Sigma, \Omega) \times \\ \times \prod_{t=2}^T f(Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_1, \varepsilon_0 = 0; \mu, \Sigma, \Omega), \quad (22)$$

а її логарифм –

$$\mathfrak{L}(\mu, \Sigma, \Omega) = -\frac{Tn}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' \Sigma^{-1} \varepsilon_t, \quad (23)$$

де  $\varepsilon_t$  можна визначити як

$$\varepsilon_t = (Y_t - \mu) - \Omega(Y_{t-1} - \mu) + \Omega^2(Y_{t-2} - \mu) + \\ + \dots + (-1)^{t-1} \Omega^{t-1} (Y_1 - \mu) + (-1)^t \Omega^t \varepsilon_0.$$

Функція (23) як функція змінних  $\mu, \Sigma, \Omega$  є нелінійною і знайти точки максимуму цієї функції нелегко. Тому УОМП параметрів процесу  $VMA(1)$  знаходять за допомогою чисельної оптимізації.

*Зауваження 1.* У випадку  $VMA(q)$  процесу функція максимальної правдоподібності будуватиметься аналогічно. Накладемо умову

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \dots = \varepsilon_{-(q-1)} = 0.$$

Маючи початкові значення, за допомогою ітерацій можемо знайти  $\varepsilon_t$  для  $t = 1, 2, \dots, T$ . Позначимо через  $e_0$  вектор  $(\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-(q-1)})'$ . Тоді функція умовної правдоподібності матиме вигляд

$$L(Y_1, \dots, Y_T, \Sigma, \Omega_1, \dots, \Omega_q, \mu | e_0 = 0) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \varepsilon_t' \Sigma^{-1} \varepsilon_t\right].$$

*5.2. Ітераційні наближення.* Для отримання кращих оцінок параметрів моделі продовжимо метод умовної правдоподібності, використовуючи ітераційні наближення. Для спрощення позначимо  $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$ . Застосувавши метод умовної правдоподібності, можемо отримати оцінки  $\mu, \Sigma$  та  $\Omega_0, \dots, \Omega_q$ , які приймаємо за початкові значення для описаного далі алгоритму.

Ми маємо, що

$$\varepsilon_t = \tilde{Y}_t - \Omega_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \Omega_q \varepsilon_{t-q} = \tilde{Y}_t + \Omega(L) \varepsilon_{t-1},$$



де  $\Omega(L) = -(\Omega_1 L + \dots + \Omega_q L^q)$ ,  $L$  – лаговий оператор. З цієї рівності, рекурсивно підставляючи значення  $\tilde{Y}_t$ , можна отримати таке:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \tilde{Y}_1 + \Omega(L)\varepsilon_0, \\ \varepsilon_2 &= \tilde{Y}_2 + \Omega(L)\varepsilon_1 = \tilde{Y}_2 + \Omega(L)\tilde{Y}_1 + \Omega^2(L)\varepsilon_0, \\ &\vdots \\ \varepsilon_T &= \tilde{Y}_T + \Omega(L)\tilde{Y}_{T-1} + \dots + \Omega^{T-1}(L)\tilde{Y}_1 + \Omega^T(L)\varepsilon_0. \end{aligned} \tag{24}$$

Введемо для зручності ще одне позначення  $\check{Y}_t = \tilde{Y}_t + \Omega(L)\tilde{Y}_{t-1} + \dots + \Omega^{t-1}(L)\tilde{Y}_1$  для всіх  $t = 1, 2, \dots, T$ . Тоді (24) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \check{Y}_1 &= -\Omega(L)\varepsilon_0 + \varepsilon_1, \\ \check{Y}_2 &= -\Omega^2(L)\varepsilon_0 + \varepsilon_2, \\ &\vdots \\ \check{Y}_T &= -\Omega^T(L)\varepsilon_0 + \varepsilon_T. \end{aligned}$$

Це є зображенням системи регресійних рівнянь з вектором параметрів  $\varepsilon_0$ , який можна оцінити за допомогою методу найменших квадратів. Маючи оцінку  $\hat{\varepsilon}_0$ , ми зможемо знайти всі збурення  $\varepsilon_t$

$$\varepsilon_1 = Y_1 - \mu - \Omega(L)\hat{\varepsilon}_0, \quad \varepsilon_2 = Y_2 - \mu - \Omega(L)\check{Y}_1, \quad \dots$$

Маючи ці значення, ми знову повертаємося до функції (23) з новою умовою  $\varepsilon_0 = \hat{\varepsilon}_0$  і знаходимо нові значення параметрів моделі. Продовжуємо цей процес доти, доки не досягнемо потрібної точності.

*5.3. Метод точної правдоподібності для VMA(1).* Оскільки сума нормально розподілених випадкових величин є нормально розподіленою, то з того, що  $\varepsilon_t \sim N[0, \Sigma]$ , випливає, що  $Y_t$  має нормальний розподіл

$$Y_t \sim N[\mu, \Gamma_0],$$

де  $\Gamma_0 = \Sigma + \Omega\Sigma\Omega'$ . Тоді щільність матиме вигляд

$$f(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Gamma_0|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Y_t - \mu)' \Gamma_0^{-1} (Y_t - \mu)\right].$$

Запишемо функцію правдоподібності

$$L(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) = \prod_{t=1}^T f(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) \tag{25}$$

і її логарифм -

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) &= -\frac{Tn}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |\Sigma + \Omega\Sigma\Omega'| - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Y_t - \mu)' (\Sigma + \Omega\Sigma\Omega')^{-1} (Y_t - \mu). \end{aligned} \tag{26}$$

*Зауваження 2.* Функція максимальної правдоподібності для  $VMA(q)$  матиме вигляд

$$L(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) = \prod_{t=1}^T f(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega_0, \dots, \Omega_q), \quad (27)$$

а її логарифм

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) = & -\frac{Tn}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |\Gamma_0| - \\ & -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Y_t - \mu)' (\Gamma_0)^{-1} (Y_t - \mu), \end{aligned}$$

де  $\Gamma_0 = \Sigma + \Omega_1 \Sigma \Omega_1' + \Omega_2 \Sigma \Omega_2' + \dots + \Omega_q \Sigma \Omega_q'$ , згідно з властивостями виведеними в 2.2 .

### 6. Оцінки параметрів $VMA$ процесу, отримані зведенням його до $VAR$ .

Головна ідея цього підходу полягає в тому, що ми, наклавши додаткові умови на  $VMA$ , можемо звести його до  $VAR$  моделі, для якої вже розроблено методи оцінки параметрів.

Нагадаємо, що ми маємо  $n$ -вимірний часовий ряд  $Y_t$ . Нехай він має нульове математичне сподівання і задовольняє основне припущення (i) та задається рівністю

$$Y_t = \Omega_0^* \epsilon_t + \Omega_1^* \epsilon_{t-1} + \dots + \Omega_q^* \epsilon_{t-q}, \quad (28)$$

де  $\epsilon_t$  – векторний білий шум, який задовольняє основне припущення (ii); корені рівняння

$$|\Omega_0^* m^q + \Omega_1^* m^{q-1} + \dots + \Omega_q^*| = 0 \quad (29)$$

лежать поза одиничним кругом. Тоді можемо говорити про зворотність  $VMA$  процесу. Якщо процес (28) не є зворотним, то він зводиться до зворотного

$$Y_t = \Omega_0 \varepsilon_t + \Omega_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \Omega_q \varepsilon_{t-q}.$$

Далі в результаті перетворень отримуємо  $VAR(\infty)$  процес

$$Y_t = \sum_{j=1}^{\infty} B_j Y_{t-j} + B_0 \varepsilon_t,$$

де матриці  $B_j$  задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} B_0 &= \Omega_0, \\ B_1 &= \Omega_1, \\ B_2 &= -B_1 \Omega_1 + \Omega_2, \\ &\vdots \\ B_q &= -B_{q-1} \Omega_1 - B_{q-2} \Omega_2 - \dots - B_1 \Omega_{q-1} + \Omega_q; \\ B_j &= \sum_{i=1}^q -B_{j-1} \Omega_i \text{ при } j = q+1, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Цей метод не є ітераційним та вимагає лише розв'язку рекурсивної системи рівнянь (30) та оцінки параметрів  $VAR$ .

Детально цей підхід описано в [5].

**7. Приклад побудови VMA процесу.** Розглянемо випадок бі-варіантного векторного MA процесу. За перший процес взято логарифм повернення у відсотках від акцій компанії IBM, а за другий S&P 500 index. Вибірка спостережень з січня 1926 року до лютого 1999 року, щомісячна.

*7.1. Перевірка на стаціонарність.* Для подальшої роботи з даними треба зробити перевірку на стаціонарність рядів. Перший висновок можна зробити, аналізуючи графіки часових рядів. Якщо дані в часі коливаються навколо якоїсь константи або

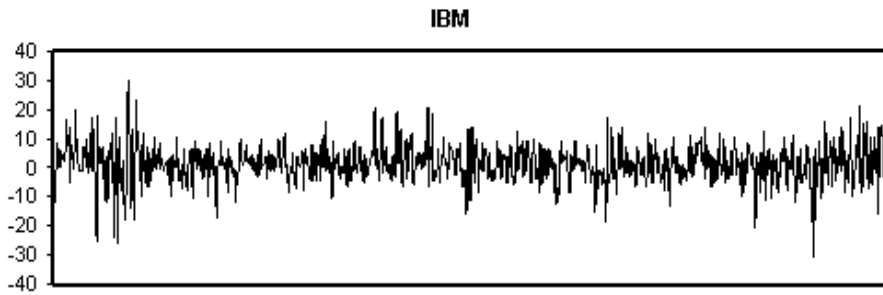


Рис.1

навколо тренду(тренд - стаціонарність), то вважають, що є підстави називати ряд стаціонарним. В іншому випадку його можна звести до стаціонарного оператором різниць. На рис. 1 та 2 зображено динаміку зміни цих процесів протягом заданого

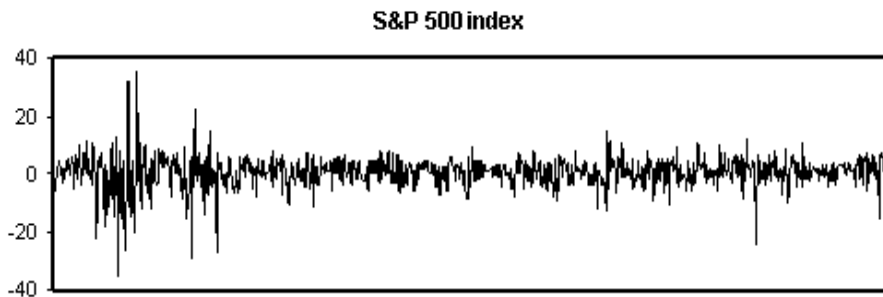


Рис.2

періоду. Графіки дають змогу зробити висновок, що задані ряди – стаціонарні. Для більшої впевненості потрібно перевірити цю гіпотезу статистичними критеріями.

Використаємо розширений тест Дікі-Фуллера (ADF-test). Цю перевірку можна виконати, використовуючи економетричний пакет EViews. Результати подано в табл. 1 та 2.

Таблиця 1 (для IBM)

ADF Test Statistic	-12.13601	1%	Critical Value	-2.5680
		5%	Critical Value	-1.9398
		10%	Critical Value	-1.6158

Таблиця 2 (для SP500)

ADF Test Statistic	-12.21558	1%	Critical Value	-2.5680
		5%	Critical Value	-1.9398
		10%	Critical Value	-1.6158

Як видно з отриманих даних, абсолютне значення розрахованої величини Мак-Кіннона (ADF Test Statistic) більше за критичне значення навіть при рівні статистичної значущості 1% і в першому, і в другому випадках. Отже, стаціонарність рядів, які описуються логарифмом повернення у відсотках від акцій компанії IBM та S&P 500 індексом, підтверджено.

*7.2. Знаходження порядку МА процесів.* Для побудови моделей та їхнього порівняння треба зробити ще один крок. Перевірити чи наші дані справді описуються МА процесами та знайти їхній порядок. Потрібні висновки можна зробити, аналізуючи автокореляційну функцію (ACF) та часткову автокореляційну функцію (PACF). Результати отриманих емпірично ACF та PACF подано в табл. 3, 4, з яких видно, що дані не можна описати МА моделями.

Таблиця 3 (для IBM)

ACF	0.076	0.016	-0.019	-0.023	0.004	-0.008	0.015	0.074	0.042
PACF	0.076	0.011	-0.021	-0.020	0.008	-0.008	0.015	0.072	0.031

Таблиця 4 (для SP500)

ACF	0.076	-0.016	-0.110	0.024	0.084	-0.021	0.023	0.047	0.076
PACF	0.076	-0.022	-0.108	0.041	0.078	-0.046	0.037	0.061	0.057

Застосувавши оператор перших різниць, поведінка ACF та PACF для обох показників, яка зображена на рис. 3-6 показує, що ми маємо справу з процесами рухомого середнього. Поведінку корелограм (ACF) і часткових корелограм (PACF) для  $MA(q)$  моделей можна подати так:

- для ACF. Скінчена, дорівнює нулю після лага  $q$ ;
- для PACF. Нескінчено зменшується до нуля.

**ACF(DIBM)**

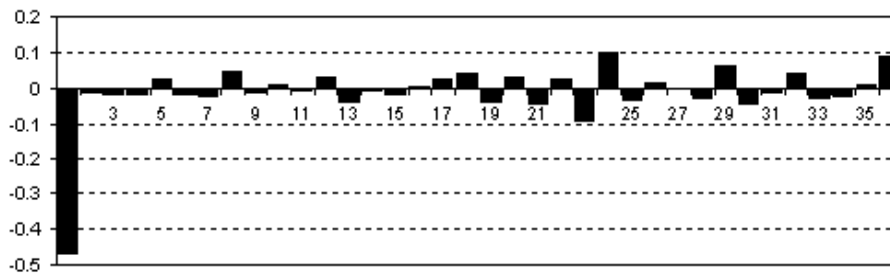


Рис.3

**PACF(DIBM)**

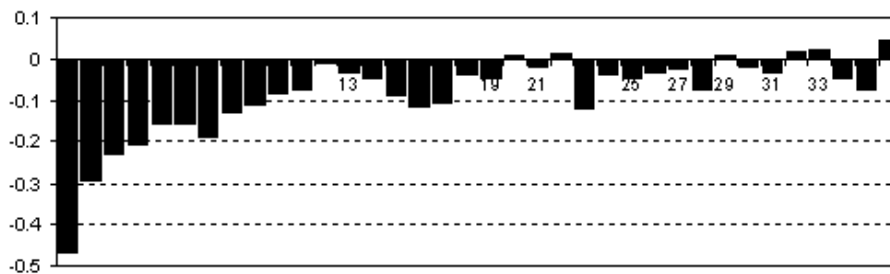


Рис.4

**ACF(DSP500)**

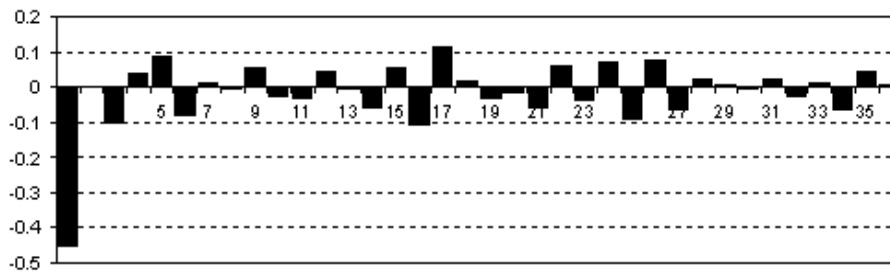


Рис.5

Отже, зробивши відповідний висновок з отриманих емпіричних автоковаріацій і часткових автоковаріацій, очевидно, що в обох випадках дані описуються  $MA(1)$  моделями.

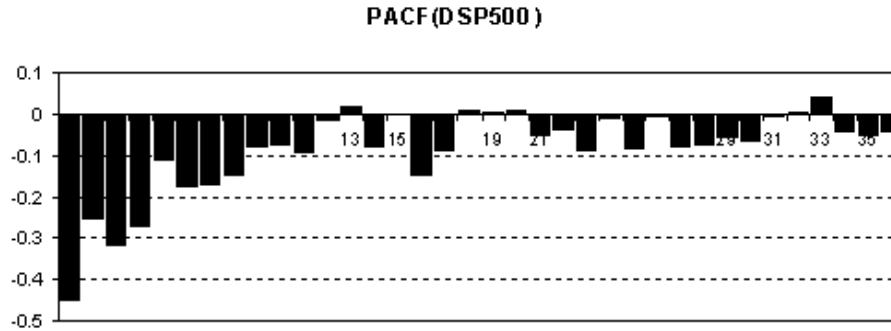


Рис.6

7.3. Оцінка параметрів для звичайних  $MA$  процесів і векторної моделі. Далі знайдемо параметри  $MA(1)$  моделі для логарифма повернення у відсотках від акцій компанії IBM та S&P 500 індексу. Результати оцінок такі:

	$\mu$	$\omega_1$
IBM	-0.000491	-0.989949
SP500	0.001664	-0.989938

Побудуємо  $VMA(1)$  модель. Для цього використаємо метод оцінки автоковаріації описаний в пункті 4.1. Тоді оцінки  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  та  $\mu$  будуть мати такі значення:

$$\hat{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 1.24023 \\ 0.537164 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} 45.2241 & 24.1152 \\ 24.1152 & 31.827 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 3.42971 & 3.84248 \\ 1.68916 & 2.42199 \end{pmatrix}.$$

Далі пошук параметрів моделі  $\Sigma$  та  $\Omega$  зводиться до розв'язування системи рівнянь (20). Оскільки система рівнянь є нелінійною, то в загальному випадку її можна розв'язати лише наближеними методами. Ця задача реалізована в програмі Mathematic 4.1. Ми отримуємо такий розв'язок:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0.0200141 & 0.106371 \\ -0.00501557 & 0.0803227 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 44.7467 & 23.8237 \\ 23.8237 & 31.6409 \end{pmatrix}.$$

7.4. Порівняння побудованих моделей на підставі залишків. Для порівняння обчислимо декілька статистичних показників спочатку для залишків  $VMA$  моделі. Маємо

	IBM	SP500 index
Mean	-0.00179936	0.002387097
Standard Error	0.229491253	0.191266265
Median	-0.010142533	-0.408604873
Standard Deviation	6.834833633	5.696396176
Sample Variance	46.71495079	32.4489294
Kurtosis	2.249498508	8.471562532
Skewness	0.279382514	0.547279597
Minimum	-32.50619844	-34.72044103
Maximum	31.29694538	36.15641709

Такі ж показники обчислимо для залишків  $MA(1)$  моделі IBM та SP500.

	IBM MA(1)	SP500 MA(1)
Mean	0.020883	-0.013790
Median	0.031607	0.319322
Standard Deviation	6.743814	5.658315
Kurtosis	4.950232	11.38395
Skewness	-0.236203	-0.314975
Minimum	-30.40821	-35.57932
Maximum	29.03679	35.95278

**8. Висновки.** Отримані результати засвідчують, що на підставі аналізу статистичних показників залишків, моделі практично не відрізняються. Це дає змогу стверджувати, що векторні процеси рухомого середнього (ковзного середнього) дають результати не гірші, ніж звичайні  $MA$  процеси. Оскільки сучасні дослідження концентрують все більшу увагу на розробленні апарату одночасного моделювання декількох часових рядів за допомогою системи динамічних рівнянь, то ця праця дає змогу включати та досліджувати взаємозворотні зв'язки між показниками та їхніми лаговими значеннями. Отож,  $VMA$  моделі є розширенням концепції  $MA$ -моделювання окремого часового ряду.

1. *Hamilton James D.* Times series analysis / *Hamilton James D.* – Princeton: Published by Princeton University Press, 1994.
2. *Ruey S. Tsay.* Analysis of Financial Time Series / *Ruey S. Tsay.* – Chicago: John Wiley & Sons Inc, 2002.
3. *Walter Enders.* Applied Econometric Time Series / *Walter Enders.* – New York: John Wiley & Sons Inc, 2004.
4. *Galbraith J.W.* A simple, non-iterative estimator for moving average models / *Galbraith J.W., V. Zinde-Walsh.* // *Biometrika.* – 1994. – Vol. 81. – P. 43-155.
5. *John W. Galbraith.* Estimation of the Vector Moving Average model by Vector Autoregression / *John W. Galbraith, Aman Ullah, Victoria Zinde-Walsh.* // *Econometric Reviews.* – 2002. – Vol. 21, №2. – P. 205-219.

**VECTOR MOVING AVERAGE MODELS****Nazarii SALISH**

*Ivan Franko National University of L'viv,  
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

Theoretical construction of vector moving average models have been researched and specified. Basic properties were determined and methods for searching estimations of parameters of these models were built. The practical implementation to financial activities was considered.

*Key words:* vector moving average models, maximum likelihood estimation, vector autoregressive processes, the autocovariance-generating function.

**ВЕКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ПОДВИЖНОГО СРЕДНЕГО****Назарий САЛИШ**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
79000, Львов, ул. Университетская, 1*

Исследована и определена теоретическая постройка векторных процессов подвижного среднего. Получены основные свойства и построены методы отыскания оценок параметров этих моделей. Рассмотрено применение на примере финансовых показателей.

*Ключевые слова:* векторные модели подвижного среднего, метод максимальной правдоподобности, векторные авторегрессионные процессы, автоковариационная генерирующая функция.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2007

Прийнята до друку 12.06.2009