ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 70. С. 128–142

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 70. P. 128–142

УДК 517.5

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ КЛАСУ САМОАФІННИХ ФУНКЦІЙ

**Микола ПРАЦЬОВИТИЙ**[1], **Олексій ПАНАСЕНКО**[2]

[1]*Інститут математики НАН України,*
*01601, Київ, вул. Терещенківська, 3*
*e-mail: prats4@yandex.ru*
[2]*Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського,*
*21100, Вінниця, вул. Острозького, 32*
*e-mail: panasenko_alex@bigmir.net*

Розглянуто сім'ю неперервних функцій, яка містить класи ніде не диференційовних та сингулярних функцій, і задається як інваріантна множина системи ітерованих функцій. Досліджено диференціальні, а також деякі фрактальні властивості функцій цього класу.

*Ключові слова:* самоафінна функція, розмірність Хаусдорфа-Безіковича.

**1. Вступ.** Означимо дійсну функцію так. Нехай $s \geqslant 2$ і маємо два $s$-вимірні вектори $Q$ та $Q'$ (впорядковані набори $s$ чисел)

$$Q = \{a_0, a_1, \dots, a_{s-1}\}, \; a_i > 0 \; (i = \overline{0, s-1}), \; \sum_{i=0}^{s-1} a_i = 1; \tag{1}$$

$$Q' = \{b_0, b_1, \dots, b_{s-1}\}, \text{ де } b_i \in \mathbb{R}, 0 < \sum_{i=0}^{m-1} b_i < 1, \; m = \overline{1, s}, \sum_{i=0}^{s-1} b_i = 1. \tag{2}$$

Нехай

$$T_0(x,y) = (a_0 x, b_0 y),$$
$$T_m(x,y) = \left( a_m x + \sum_{i=0}^{m-1} a_i ; b_m y + \sum_{i=0}^{m-1} b_i \right),$$

$m = 1, 2, \dots, s-1$. Легко довести, що $T_i$ – стискуючі відображення, тому сім'я $\{T_0, T_1, \dots, T_{s-1}\}$ є системою ітерованих функцій. Відомо [1], що система ітерованих функцій визначає єдину множину $F$ таку, що $F = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} T_i(F)$. Нижче ми покажемо, що множина $F$ є графіком неперервної на $[0,1]$ функції.

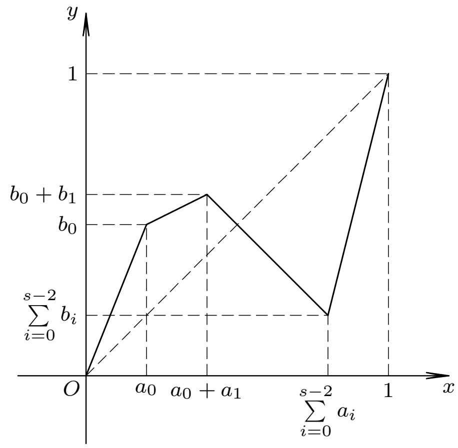


Рис. 1. Графік функції $F_1(x)$ при $s=4$, $Q=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right\}$, $Q'=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{10};-\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right\}$

Задамо геометричну інтерпретацію побудови цієї множини. Нехай графіком функції $F_0(x)$ є діагональ одиничного квадрата, а графіком $F_1(x)$ – ламана, що послідовно сполучає точки

$$(0,0),(a_0,b_0),(a_0+a_1,b_0+b_1),\ldots,\left(\sum_{i=0}^{p}a_i,\sum_{i=0}^{p}b_i\right),\ldots,\left(\sum_{i=0}^{s-1}a_i,\sum_{i=0}^{s-1}b_i\right)=(1,1),$$

тобто $F_1(x)=\bigcup\limits_{i=0}^{s-1}T_i(F_0(x))$. Ці точки однозначно визначаються векторами $Q$ та $Q'$, причому вони належать внутрішності квадрата $[0,1]\times[0,1]$ (на підставі обмежень на елементи наборів $Q$ та $Q'$). Казатимемо, що над відрізком $F_0(x)$ виконано перетворення $T$. З кожним із $s$ відрізків одержаної ламаної $F_1(x)$ зробимо аналогічно (піддамо їх перетворенню $T$). Продовжимо цей процес далі й означимо функціональну послідовність $(F_n(x))$ таку, що $F_n(x)=T(F_{n-1}(x))=\bigcup\limits_{i=0}^{s-1}T_i(F_{n-1}(x))$. Доведемо, що вона збігається рівномірно.

Нагадаємо [4], що *$Q$-зображенням* дійсного числа $x\in[0;1]$ називається його подання у вигляді

$$x=\beta_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1}a_{\alpha_j}\right]\equiv\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $a_i$ задовольняють (1), $\beta_m=\sum\limits_{i=0}^{m-1}a_i$, $\alpha_k\in N^0_{s-1}$. Деякі точки мають по два різних подання (з періодом 0 та $s-1$) і називаються $Q$-раціональними, решта – єдине, і називаються $Q$-ірраціональними.

Нехай $b_{\max} = \max\{|b_0|, |b_1|, \dots, |b_{s-1}|\}$. Зазначимо, що для усіх $p \in \mathbb{N}$ і $x = \Delta^{Q}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$:

$$F_{n+p}(x) \geqslant \min\left\{F_n\left(\Delta^{Q}_{\alpha_1\dots\alpha_n 00\dots}\right), F_n\left(\Delta^{Q}_{\alpha_1\dots\alpha_n(s-1)(s-1)\dots}\right)\right\} = M_1(n,x),$$

$$F_{n+p}(x) \leqslant \max\left\{F_n\left(\Delta^{Q}_{\alpha_1\dots\alpha_n 00\dots}\right), F_n\left(\Delta^{Q}_{\alpha_1\dots\alpha_n(s-1)(s-1)\dots}\right)\right\} = M_2(n,x).$$

Крім того, для кожного $x \in [0,1]$ та довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне $n$, що $b^n_{\max} < \varepsilon$. Тоді

$$|F_{n+p}(x) - F_n(x)| \leqslant |M_2(n,x) - M_1(n,x)| \leqslant b^n_{\max} < \varepsilon \quad \text{для усіх } p \in \mathbb{N}.$$

Отож, оскільки $n$ обирається незалежно від $x$, то функціональна послідовність $(F_n(x))$ збігається рівномірно, а врахувавши те, що кожний член послідовності є неперервною функцією на відрізку $[0,1]$, стверджуємо, що існує функція

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x), \tag{3}$$

яка є неперервною на відрізку $[0,1]$. Нехай $D = \{(x, f(x))\colon x \in [0;1]\}$. Тоді $D = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} T_i(D)$, тобто множини $D$ та $F$ збігаються.

**2. Аналітичне подання досліджуваних функцій.**

**Лема 1.** *Якщо* $\Delta^{Q}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$ *– $Q$-зображення числа* $x \in [0;1]$, *то значення функції* (3)*, що визначаються наборами чисел* (1) *та* (2)*, може бути обчислене за формулою*

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\gamma_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} b_{\alpha_j}\right], \tag{4}$$

*де* $\gamma_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} b_i$*, що символічно позначатимемо* $f(x) \equiv \Delta^{Q'}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$.

*Доведення.* Оскільки двом різним $Q$-зображенням $Q$-раціонального числа $x$ відповідає те саме значення функції:

$$\Delta^{Q'}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n-1(s-1)(s-1)\dots} - \Delta^{Q'}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n 00\dots} = \gamma_{\alpha_n-1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} +$$
$$+\gamma_{s-1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j}\cdot b_{\alpha_n-1}\left(1 + b_{s-1} + b^2_{s-1} + \dots\right) - \gamma_{\alpha_n}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} =$$
$$= \gamma_{\alpha_n-1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} + \gamma_{s-1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j}\cdot b_{\alpha_n-1}\frac{1}{1-b_{s-1}} - \gamma_{\alpha_n}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} =$$
$$= \left(\gamma_{\alpha_n-1} + b_{\alpha_n-1} - \gamma_{\alpha_n}\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} = 0,$$

то функція $f(x)$ означена коректно.

Доведемо, що означена формулою (4) функція є неперервною. Для цього достатньо показати, що для довільної точки $x_0$ відрізка $[0,1]$

$$\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

Доведемо це спочатку для $Q$-ірраціональної точки $x_0$. Яке б не було число $x \in (0,1)$ існує номер $m$ такий, що $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ для всіх $i = \overline{0, m-1}$, але $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$. Тоді умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$ і на підставі (4)

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sum_{k=m}^{\infty}\left[\gamma_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} b_{\alpha_j}\right]\right| \leqslant \left|\sum_{k=m}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k-1} b_{\alpha_j}\right]\right| \leqslant \sum_{k=m}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k-1} |b_{\alpha_j}|\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=m}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k-1} b_{\max}\right] = \frac{(b_{\max})^{m-1}}{1 - b_{\max}} \to 0 (m \to \infty),$$

де $b_{\max} = \max\{|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_{s-1}|\}$, що і доводить неперервність функції (4) в кожній $Q$-ірраціональній точці.

Доведення неперервності в $Q$-раціональній точці $x_0$ проводиться аналогічно, але в два етапи. Спочатку доводиться неперервність функції зліва від точки $x_0$ (тут ліпше використати $Q$-зображення з періодом $(s-1)$), а потім справа (в цьому випадку треба використати подання з періодом $(0)$).

Тепер нехай $f(x)$ – функція, визначена формулою (3). Тоді очевидно, що значення цієї функції в $Q$-раціональній точці $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 00\ldots}$ дорівнює $F_n(x_0)$. Але

$$F_n(x_0) = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2}\cdot b_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_3}\cdot b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} + \cdots + \gamma_{\alpha_n}\cdot b_{\alpha_1} b_{\alpha_2}\ldots b_{\alpha_{n-1}},$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} b_i$, $m = \overline{1, s-1}$. Отож, в $Q$-раціональних точках значення функцій, описаних формулами (3) і (4), збігаються. З того, що вони неперервні, випливає, що значення і в $Q$-ірраціональних точках повинні збігатися, тобто формули (3) і (4) визначають ту саму функцію. □

Зауважимо, що описаний клас функцій містить в собі функції, властивості яких досліджували раніше. Зокрема, в [2] досліджуються диференціальні властивості класу однопараметричних неперервних функцій, які в наших позначеннях відповідають наборам $Q = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ та $Q' = \{a, 1-2a, a\}$, $a \in (0,1)$. Останньому класу належать сингулярна функція Кантора (при $a = \frac{1}{2}$), а також ніде не диференційовна функція Бурбакі [3, с. 28] (при $a = \frac{2}{3}$). Крім того, зазначимо таке: якщо $a_i = b_i$, для всіх $i = \overline{0, s-1}$, то $f(x) \equiv x$ на $[0,1]$. Надалі виключимо останній випадок із розгляду, тобто припускатимемо, що існує таке $j \in \{0, \ldots, s-1\}$, для якого $a_j \neq b_j$.

**3. Диференціальні властивості досліджуваних функцій.** З теореми Лебега про диференційовність монотонної функції випливає досить очевидна лема.

**Лема 2.** *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція, що визначається векторами (1) і (2) і задається аналітично формулою (4). Якщо $b_i \geqslant 0$ для кожного $i = \overline{0, s-1}$, то функція $f(x)$ є неспадною, тому диференційовною майже скрізь.*

**Теорема 1.** *Для диференційовності функції $f(x)$, що задається формулою (4), в $Q$-раціональній точці $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови $b_0 < a_0, b_{s-1} < a_{s-1}$.*

*Доведення. Необхідність.* Нехай функція $f(x)$ диференційовна в $Q$-раціональній точці $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$. Покажемо, що в цьому випадку $b_0 < a_0$ і $b_{s-1} < a_{s-1}$.

Доведення проведемо в два етапи. Спочатку покажемо, що для диференційовності справа необхідною є умова $b_0 < a_0$. Розглянемо послідовність $(x_m)$ таку, що $x_m = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\underbrace{0\ldots0}_{m}(s-1)(s-1)\ldots}$. Очевидно, що $x_m \to x_0$ $(m \to \infty)$. Тоді

$$x_m - x_0 = \prod_{j=1}^{k+m} a_{\alpha_j}, \quad f(x_m) - f(x_0) = \prod_{j=1}^{k+m} b_{\alpha_j},$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{k+m} \frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}} = \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}} \cdot \lim_{m\to\infty} \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^m, \tag{5}$$

причому ця границя скінченна при $b_0 \leqslant a_0$.

Доведемо таке: коли виконується рівність $b_0 = a_0$, то функція недиференційовна в точці $x_0$. З цією метою розглянемо іншу послідовність $(x_m)$, для якої $x_m = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\underbrace{0\ldots0}_{m}p(0)\ldots}$, де $p \in \{1, \ldots, s-1\}$ таке, що $\gamma_p \neq \beta_p$. Таке $p$ існує, оскільки в іншому випадку, як вже зазначалось, $f(x) \equiv x$. Очевидно, що $x_m \to x_0$ $(m \to \infty)$. Тоді

$$x_m = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\underbrace{0\ldots0}_{m}(p-1)(s-1)(s-1)\ldots}$$

$$x_m - x_0 = \prod_{j=1}^{k+m} a_{\alpha_j} \cdot \beta_p, \quad f(x_m) - f(x_0) = \prod_{j=1}^{k+m} b_{\alpha_j} \cdot \gamma_p,$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = \frac{\gamma_p}{\beta_p} \cdot \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{k+m} \frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}} = \frac{\gamma_p}{\beta_p} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}},$$

що не збігається із (5).

Доведення того, що для диференційовності зліва необхідною є умова $b_{s-1} < a_{s-1}$, проводиться аналогічно, але треба використати подання числа $x_0$ з періодом $(s-1)$.

*Достатність.* Нехай вихідні вектори $Q$ та $Q'$ такі, що $b_0 < a_0$ і $b_{s-1} < a_{s-1}$. Використаємо умову $b_0 < a_0$ для доведення того, що функція $f(x)$ диференційовна справа в $Q$-раціональній точці $x_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$. Нехай $(x_n)$ – довільна послідовність, яка збігається справа до точки $x_0$. Тоді, очевидно, існує такий номер $n_0$, що для всіх $n > n_0$: $x_n = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\underbrace{0\ldots0}_{m_n}\alpha'_{k+m_n+1}\alpha'_{k+m_n+2}\ldots}$, $\alpha'_{k+m_n+1} \neq 0$ і умова $x_n \to x_0$

рівносильна умові $m_n \to \infty$. Складемо відношення, позначивши для спрощення запису $m_n$ через $m$

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\frac{\sum\limits_{i=k+m+1}^{\infty}\gamma_{\alpha'_i}\prod\limits_{j=1}^{i-1}b_{\alpha'_i}}{\sum\limits_{i=k+m+1}^{\infty}\beta_{\alpha'_i}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_i}}=\prod_{i=1}^{k}\frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}}\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^m\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\gamma_{\alpha'_{k+m+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}b_{\alpha'_{k+m+j}}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_{\alpha'_{k+m+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_{k+m+j}}}.$$

Проте сума $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_{\alpha'_{k+m+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_{k+m+i}}$ є $Q$-зображенням числа $x=\Delta_{\alpha_{k+m+1}\alpha_{k+m+2}\dots}$, яке належить $[a_0;1]$. Аналогічно сума $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_{\alpha'_{k+m+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_{k+m+i}}$ збігається до деякого числа $y\in[0;1]$. Тоді, очевидно, для довільного набору $\alpha_{k+m+1},\alpha_{k+m+2}\dots$ виконується оцінка $0\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\frac{1}{a_0}$. Врахувавши, що $\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^m\to 0$ при $m\to\infty$, знаходимо

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=0$$

для кожної послідовності $(x_n)$. Отже, функція $f(x)$ диференційовна справа в $Q$-раціональній точці, причому значення похідної в цій точці дорівнює нулю.

Аналогічно можна показати, що з умови $b_{s-1}<a_{s-1}$ випливає диференційовність функції зліва в $Q$-раціональній точці $x_0$. Для цього варто використати $Q$-зображення точки $x_0$, яке має період $(s-1)$. □

Легко довести таке твердження.

**Лема 3.** *Нехай $g(x)$ – деяка функція дійсної змінної визначена на $[0,1]$. Нехай $x_0\in[0,1]$ і $(x'_n)$ і $(x''_n)$ – дві послідовності дійсних чисел такі, що $x'_n\leqslant x_0\leqslant x''_n$ для кожного $n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x''_n=x_0$. Якщо ця функція диференційовна в точці $x_0\in[0,1]$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x''_n)-g(x'_n)}{x''_n-x'_n}=g'(x_0).$$

Отож, якщо існують дві пари послідовностей $(x'_n)$, $(x''_n)$ і $(y'_n)$, $(y''_n)$, які задовольняють умови леми 3, але

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x''_n)-g(x'_n)}{x''_n-x'_n}\neq\lim_{n\to\infty}\frac{g(y''_n)-g(y'_n)}{y''_n-y'_n},$$

то функція $g(x)$ недиференційовна в точці $x_0$.

**Теорема 2.** *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція, що визначається наборами (1) і (2) і задається формулою (4). Якщо $|b_i|\geqslant a_i$ для кожного $i=\overline{0,s-1}$, причому хоча б для одного $p\in\{0,1,\dots,s-1\}$ $|b_p|>a_p$, то функція $f(x)$ є ніде не диференційовною.*

*Доведення.* Недиференційовність функції в $Q$-раціональній точці $x_0$ є наслідком теореми 1.

Нехай $x_0$ – деяке $Q$-ірраціональне число відрізка $[0;1]$: $x_0=\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$, тоді $f(x_0)=\Delta^{Q'}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$. Нехай також

$$x'_n=\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n 00\dots0\dots}\quad\text{і}\quad x''_n=\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(s-1)(s-1)\dots(s-1)\dots}$$

– два $Q$-раціональних числа. Очевидно, що $x_n' \leqslant x_0 \leqslant x_n''$. Тоді $f(x_n'') - f(x_n') = \prod\limits_{k=1}^{n} b_{\alpha_k}$, а $x_n'' - x_n' = \prod\limits_{k=1}^{n} a_{\alpha_k}$. З цього виливає, що

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} b_{\alpha_k}}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_{\alpha_k}}.$$

Згідно з лемою 3, якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці $x_0$, то

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}}. \tag{6}$$

Зауважимо, що модуль останньої границі не менший одиниці. Тому $f'(x_0) \neq 0$.

Розглянемо окремо два випадки:

1) $a_{s-1} \neq b_{s-1}$;
2) $a_{s-1} = b_{s-1}$.

Випадок 1. Нехай $a_{s-1} \neq b_{s-1}$. Яким би не було $Q$-ірраціональне число $x_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ можна виділити таку нескінченну послідовність $(j_n)$, що усі $\alpha_{j_n} < s-1$. Нехай $y_n' = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_n-1}00\ldots0\ldots}$ і $y_n'' = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_n-1}(s-1)00\ldots0\ldots}$. Тоді $y_n' \leqslant x_0 \leqslant y_n''$ і

$$f(y_n'') - f(y_n') = (1 - b_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} b_{\alpha_k};$$

$$y_n'' - y_n' = (1 - a_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} a_{\alpha_k}.$$

Якщо похідна в точці $x_0$ існує, то

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n'') - f(y_n')}{y_n'' - y_n'} = \frac{1 - b_{s-1}}{1 - a_{s-1}} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{j_n-1} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}} = \frac{1 - b_{s-1}}{1 - a_{s-1}} \cdot f'(x_0),$$

звідки $1 - b_{s-1} = 1 - a_{s-1}$, тобто $b_{s-1} = a_{s-1}$, що суперечить припущенню.

Розглянемо тепер випадок, коли $a_{s-1} = b_{s-1}$. Згідно з умовою теореми існує таке $p$, що $\beta_p \neq \gamma_p$, тобто, що $\sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i \neq \sum\limits_{i=0}^{p-1} b_i$. Яке б не було число $x_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, можна виділити таку нескінченну послідовність $(j_n)$, що усі $\alpha_{j_n} < s - 1$.

Нехай $y_n' = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_n-1}00\ldots0\ldots}$ і $y_n'' = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_n-1}(s-1)p00\ldots0\ldots}$. Тоді $y_n' \leqslant x_0 \leqslant y_n''$ і

$$f(y_n'') - f(y_n') = (1 - b_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} b_{\alpha_k} + \gamma_p b_{s-1} \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} b_{\alpha_k} = (1 - b_{s-1} + \gamma_p b_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} b_{\alpha_k};$$

$$y_n'' - y_n' = (1 - a_{s-1} + \beta_p a_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} a_{\alpha_k}.$$

Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n'') - f(y_n')}{y_n'' - y_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - b_{s-1} + \gamma_p b_{s-1})}{(1 - a_{s-1} + \beta_p a_{s-1})} \prod_{k=1}^{j_n - 1} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}} =$$

$$= \frac{(1 - b_{s-1} + \gamma_p b_{s-1})}{(1 - a_{s-1} + \beta_p a_{s-1})} \cdot f'(x_0),$$

звідки $\gamma_p = \beta_p$, що суперечить припущенню.

Отже, $f(x)$ ніде не диференційовна. □

Зауважимо, що умова $|b_i| \geqslant a_i$ теореми 2 використовується в доведенні лише для того, щоб показати, що значення похідної в $Q$-ірраціональній точці не дорівнює нулю. З (6) випливає необхідна умова диференційовності функції в $Q$-ірраціональній точці $x_0$.

**Наслідок 1.** *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція (4), $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ – $Q$-ірраціональне число відрізка $[0,1]$. Якщо $f(x)$ диференційовна в точці $x_0$, то $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}} = 0$ і $f'(x_0) = 0$.*

Втім обернене твердження не завжди справджується. Деякі достатні умови диференційовності функції в $Q$-ірраціональній точці дає теорема.

**Теорема 3.** *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція (4), $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ – $Q$-ірраціональне число відрізка $[0,1]$ таке, що $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}} = 0$.*

1. *Якщо існують такі фіксовані скінченні числа $N_0$ та $N_{s-1}$ що, в $Q$-зображенні числа $x_0$ немає більше, ніж $N_0$ послідовних нулів і більше, ніж $N_{s-1}$ послідовних цифр $s-1$, то функція диференційовна в точці $x_0$.*
2. *Якщо $b_0 < a_0$ і $b_{s-1} < a_{s-1}$, то функція диференційовна в точці $x_0$.*

*Доведення.* 1. Нехай для деякої $Q$-ірраціональної точки $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ справджується $\lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{k} \frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}} = 0$. Дослідимо питання про диференційовність функції в цій точці.

Нехай $(x_m)$ – довільна послідовність, яка збігається до числа $x_0$. Якщо

$$x_m = \Delta^Q_{\alpha'_1(x_m)\alpha'_2(x_m)\ldots\alpha'_k(x_m)\ldots},$$

то для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує номер $k_m$ такий, що $\alpha_i(x_0) = \alpha'_i(x_m)$ для $i = \overline{1, k_m}$, $\alpha_{k_m+1}(x_0) \neq \alpha'_{k_m+1}(x_m)$. Очевидно, що умова $x_m \to x_0$ рівносильна до умови $k_m \to \infty$. Розглянемо фіксоване число $x_m$ і для спрощення запису позначимо $k_m = k$. Тоді $x_m = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha'_{k+1}\alpha'_{k+2}\ldots}$, $\alpha_{k+1} \neq \alpha'_{k+1}$. Маємо

$$x_m - x_0 = \sum_{i=k+1}^{\infty} \left[\beta_{\alpha'_i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha'_j}\right] - \sum_{i=k+1}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha_j}\right] =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} a_{\alpha_j} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} \left[\beta_{\alpha'_{k+i}} \prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha'_{k+j}}\right] - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_{k+i}} \prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha_{k+j}}\right] \right).$$

Сума $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[\beta_{\alpha'_{k+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_{k+j}}\right]$ є $Q$-розкладом числа $x'_m = \Delta_{\alpha'_{k+1}\alpha'_{k+2}\ldots}$, тому збігається до числа $x'_m \in [0;1]$. Аналогічно,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_{k+i}}\prod_{j=1}^{i-1}a_{\alpha_{k+j}}\right] = x'_0 \equiv \Delta_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots}$$

і отже,

$$x_m - x_0 = \prod_{j=1}^{k}a_{\alpha_j}\cdot(x'_m - x'_0).$$

Крім того,

$$f(x_m) - f(x_0) = \prod_{j=1}^{k}b_{\alpha_j}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\gamma_{\alpha'_{k+i}}\prod_{j=1}^{i-1}b_{\alpha'_{k+j}}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\gamma_{\alpha_{k+i}}\prod_{j=1}^{i-1}b_{\alpha_{k+j}}\right]\right) =$$
$$= \prod_{j=1}^{k}b_{\alpha_j}\cdot(f(x'_m) - f(x'_0)).$$

Оскільки $\alpha_{k+1} \neq \alpha'_{k+1}$, то у випадку, коли в $Q$-розкладі числа $x_0$ кількість послідовних цифр 0 не перевищує фіксоване скінченне число $N_0$ та кількість послідовних цифр $s-1$ не перевищує фіксоване $N_{s-1}$, то $x'_m - x'_0$ не прямує до нуля при $m\to\infty$, тому в такому випадку:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = 0, \tag{7}$$

що свідчить про існування похідної в точці $x_0$ і доводить першу частину теореми.

Нехай тепер послідовність $(x_m)$ така, що $x'_m \to x'_0$ при $m\to\infty$. Це можливо лише в тому випадку, коли в $Q$-розкладі числа $x_0$ є якзавгодно великі фрагменти вигляду $0\ldots0$ та $(s-1)\ldots(s-1)$. Покажемо, що рівність $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}} = 0$ не є достатньою умовою диференційовності функції для деяких таких чисел $x_0$.

Нехай

$$x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\alpha_{k_1+1}\underbrace{0\ldots0}_{n_1}\alpha_{k_1+n_1+1}\ldots\alpha_{k_2}\alpha_{k_2+1}\underbrace{0\ldots0}_{n_2}\ldots}, \tag{8}$$

$\alpha_{k_j+1}\neq 0$, $\alpha_{k_j+n_j+1}\neq 0$ для всіх $j\in\mathbb{N}$, $n_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Нехай послідовність $(x_m)$ така, що

$$x_m = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_m}(\alpha_{k_m+1}-1)\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{n_m}(s-1-\alpha_{k_m+n_m+1})(s-1-\alpha_{k_m+n_m+2})\ldots}.$$

Зрештою, нехай

$$\bar{x}_m = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_m}(\alpha_{k_m+1})00\ldots0\ldots}.$$

Очевидно, що $x_m\to x_0$ при $m\to\infty$; $\bar{x}_m = \frac{x_m+x_0}{2}$, тобто $x_0 - \bar{x}_m = \bar{x}_m - x_m$. Складемо відношення

$$\frac{f(x_0)-f(x_m)}{x_0-x_m} = \frac{f(x_0)-f(\bar{x}_m)+f(\bar{x}_m)-f(x_m)}{2(x_0-\bar{x}_m)} = \frac{f(x_0)-f(\bar{x}_m)}{2(x_0-\bar{x}_m)} + \frac{f(\bar{x}_m)-f(x_m)}{2(\bar{x}_m-x_m)}.$$

Розглянемо окремо

$$\frac{f(x_0)-f(\bar{x}_m)}{x_0-\bar{x}_m}=\prod_{i=1}^{k_m+1}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}}\cdot\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^{n_m}\frac{f(x^*)}{x^*}=\prod_{i=1}^{k_m+n_m+1}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}}\cdot\frac{f(x^*)}{x^*},$$

де $x^*=\Delta^Q_{\alpha_{k_m+n_m+1}\alpha_{k_m+n_m+2}\ldots}\in[a_0;1]$, $f(x^*)\in[0;1]$. Перейшовши до границі при $m\to\infty$ знаходимо

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_0)-f(\bar{x}_m)}{x_0-\bar{x}_m}=0. \tag{9}$$

Тепер розглянемо

$$\frac{f(\bar{x}_m)-f(x_m)}{\bar{x}_m-x_m}=\prod_{i=1}^{k_m}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}}\cdot\frac{b_{\alpha_{k_m+1}-1}}{a_{\alpha_{k_m+1}-1}}\cdot\left(\frac{b_{s-1}}{a_{s-1}}\right)^{n_m}\frac{1-f(x^*)}{1-x^*}, \tag{10}$$

де $x^*=\Delta^Q_{(s-1-\alpha_{k_m+n_m+1})(s-1-\alpha_{k_m+n_m+2})\ldots}$, $1-x_0\in[a_{s-1};1]$, $f(x^*)\in[0;1]$. Бачимо, що у випадку, коли $b_{s-1}>a_{s-1}$ можна підібрати послідовність $(n_m)$ таку (а разом з нею і число $x_0$) , що $\frac{f(\bar{x}_m)-f(x_m)}{\bar{x}_m-x_m}\to\infty$ при $m\to\infty$.

Аналогічно, якщо число $x_0$ містить якзавгодно великі фрагменти вигляду $(s-1)\ldots(s-1)$ і $b_0>a_0$, то існують такі $Q$-ірраціональні числа, в яких функція недиференційовна.

2. Доведемо таке: якщо $b_0<a_0$ і $b_{s-1}<a_{s-1}$, то функція $f(x)$ диференційовна в точках, для яких $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}}=0$. Нехай $x_0$ має вигляд (8), а послідовність $(x_m)$ така, що

$$x_m=\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_m}(\alpha_{k_m+1}-1)\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{n_m}(\alpha'_{k_m+n_m+1})(\alpha'_{k_m+n_m+2})\ldots}$$

(усі інші послідовності наближень, як показано вище, приводять до (7)). Нехай також

$$\bar{x}_m=\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_m}(\alpha_{k_m+1})00\ldots0\ldots}.$$

Оскільки $x_m\leqslant\bar{x}_m\leqslant x_0$, то очевидно, що

$$\frac{|f(x_0)-f(x_m)|}{x_0-x_m}\leqslant\max\left\{\frac{|f(x_0)-f(\bar{x}_m)|}{x_0-\bar{x}_m};\frac{|f(\bar{x}_m)-f(x_m)|}{\bar{x}_m-x_m}\right\},$$

проте згідно з (9) та аналогічно до (10) кожне з відношень $\frac{|f(x_0)-f(\bar{x}_m)|}{x_0-\bar{x}_m}$ та $\frac{|f(\bar{x}_m)-f(x_m)|}{\bar{x}_m-x_m}$ прямує до нуля при $m\to\infty$. Отже, в цьому випадку функція диференційовна в точці $x_0$. Випадок, коли $Q$-зображення числа $x_0$ містить якзавгодно великі фрагменти вигляду $(s-1)\ldots(s-1)$, розглядається аналогічно. $\square$

**Лема 4.** *Міра Лебега множини всіх чисел, $Q$-зображення яких містить фрагменти, що складаються з якзавгодно великої кількості цифр $j$, дорівнює нулю.*

*Доведення.* Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $j=0$. Нехай

$$E=\left\{x\colon x=\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}\underbrace{0\ldots0}_{k_1}\alpha_{m_1+k_1+1}\ldots\alpha_{m_2}\underbrace{0\ldots0}_{k_2}\ldots},k_n\to\infty\ (n\to\infty)\right\}.$$

Доведемо, що $\lambda(E)=0$.

Позначимо через $F_k$ об'єднання всіх циліндричних множин (відрізків) рангу $k$, серед внутрішніх точок яких є точки з множини $E$; $F_0 = [0;1]$. Очевидно, що $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_k \supset \dots$ і $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Оскільки усі множини $F_k$ – компактні, то $\lambda(E) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda(F_k)$. Нехай $\bar{F}_k = F_{k-1} \setminus F_k$, тобто через $\bar{F}_k$ позначимо об'єднання всіх відкритих циліндрів рангу $k$, які не містять точок з множини $E$. Тоді

$$\lambda(E) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdots \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Оскільки $F_{k-1} = F_k \bigcup \bar{F}_k$, то $\lambda(F_k) = \lambda(F_{k-1}) - \lambda(\bar{F}_k)$. Тоді

$$\lambda(E) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k-1}) - \lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right).$$

Розглянемо множину $F_{m_1}$. Із її означення зрозуміло, що

$$F_{m_1} = \bigcup_{i_1=0}^{s-1} \cdots \bigcup_{i_{m_1}=0}^{s-1} \Delta_{i_1 \dots i_{m_1}},$$

позаяк

$$\bar{F}_{m_1+1} = \bigcup_{i_1=0}^{s-1} \cdots \bigcup_{i_{m_1}=0}^{s-1} \bigcup_{j=1}^{s-1} \Delta_{i_1 \dots i_{m_1} j}.$$

Тоді

$$\lambda(F_{m_1}) = \sum_{\substack{i_l=\overline{0,s-1},\\ l=\overline{1,m_1}}} \left|\Delta_{i_1 \dots i_{m_1}}\right|,$$

$$\lambda(\bar{F}_{m_1+1}) = (a_1 + \dots + a_{s-1}) \sum_{\substack{i_l=\overline{0,s-1},\\ l=\overline{1,m_1}}} \left|\Delta_{i_1 \dots i_{m_1}}\right| = (1-a_0)\lambda(F_{m_1}),$$

звідки знаходимо $\frac{\lambda(\bar{F}_{m_1+1})}{\lambda(F_{m_1})} = 1 - a_0$. Аналогічно можна довести, що $\frac{\lambda(\bar{F}_{m_k+1})}{\lambda(F_{m_k})} = 1 - a_0$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки $\bar{F}_{k+1} \subset F_k$, то $0 \leqslant \frac{\lambda(\bar{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} < 1$. Тоді

$$\lambda(E) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right) \leqslant \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{m_k} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right) = (1-a_0)^k \to 0 \ (k \to \infty),$$

що й означає, що $\lambda(E) = 0$. □

**Наслідок 2.** *Множина всіх тих $Q$-ірраціональних $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}$, в яких функція недиференційовна, проте $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}} = 0$, має нульову міру Лебега.*

Нагадаємо [4] таке: якщо $N_i(x,k)$ – кількість символів $i$ в зображенні $x$ до $k$-го місця включно, то границя (якщо вона існує)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} = \nu_i(x)$$

називається *частотою вживання символа* $i$ в $Q$-зображенні $x$. Число $x$, для якого частота $\nu_i(x) = a_i$ для всіх $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ називається *$Q$-нормальним.*

**Теорема 4.** *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція* (4).

1. *Якщо* $\left|\frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \dots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \dots a_{s-1}^{a_{s-1}}}\right| > 1$, *то $f(x)$ майже скрізь недиференційовна (у випадку, коли виконуються умови теореми 2 – ніде не диференційовна).*
2. *Якщо* $\left|\frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \dots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \dots a_{s-1}^{a_{s-1}}}\right| < 1$, *то $f(x)$ диференційовна майже скрізь (щодо міри Лебега).*

*Доведення.* Для доведення теореми скористаємось двома відомими фактами [4], що міра Лебега $Q$-ірраціональних чисел дорівнює 1 і міра Лебега $Q$-нормальних чисел також дорівнює 1, тобто, іншими словами, майже всі $Q$-ірраціональні числа є $Q$-нормальними. Згідно з (6), якщо функція диференційовна в точці $x$, то

$$f'(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{b_0^{\nu_0} b_1^{\nu_1} \dots b_{s-1}^{\nu_{s-1}}}{a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_{s-1}^{\nu_{s-1}}} \right)^n,$$

де $\nu_i$ – відносна частота появи цифри $i$ в $Q$-зображенні аргумента до $n$-го місця включно. Якщо $x$ – $Q$-нормальне число, то кожна $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_i = a_i$, тому для майже всіх $x$:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \dots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \dots a_{s-1}^{a_{s-1}}} \right)^n$$

Якщо правильна нерівність $\left|\frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \dots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \dots a_{s-1}^{a_{s-1}}}\right| > 1$, то остання границя не є скінченною. Якщо ж $\left|\frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \dots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \dots a_{s-1}^{a_{s-1}}}\right| < 1$, то за доведеним попереду (наслідок леми 4) лише в точках нульової міри Лебега функція не матиме похідної. □

**Наслідок 3.** *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція* (4), *що визначається наборами $Q$ і $Q'$. Якщо хоча б один елемент з $Q'$ дорівнює нулю, то $f(x)$ диференційовна майже скрізь.*

**4. Фрактальні властивості досліджуваних функцій.** Нагадаємо [1], що число

$$\alpha^K(E) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg \delta},$$

де $N_\delta(E)$ – найменша кількість квадратів вигляду $[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times [m_2\delta, (m_2+1)\delta]$, ($m_1$, $m_2$ – цілі), необхідних для покриття множини $E \subset \mathbb{R}^2$, називається фрактальною клітинковою розмірністю множини $E$.

Введемо позначення: нехай

$$a = \min\{a_0, a_1, \dots, a_{s-1}\}, \quad b = \sum_{i=1}^{s-1} |a_i b_i|.$$

**Теорема 5.** *Правильна така оцінка розмірності Хаусдорфа–Безиковича графіка функції $f(x)$: $\alpha_0(\Gamma_f) \leqslant 2 - \log_a b$.*

*Доведення.* Виконаємо відповідне покриття графіка функції. Нехай

$$R_f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)=\sup_{x_1,x_2\in\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}}\{f(x_1)-f(x_2)\}$$

– розмах функції $f(x)$ на циліндричному відрізку

$$\left[\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k 00\dots};\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k(s-1)(s-1)\dots}\right].$$

Очевидно, що $R_f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)=|b_{\alpha_1}b_{\alpha_2}\dots b_{\alpha_k}|$. Покриватимемо графік функції $f(x)$ квадратами зі стороною $\delta_k=a^k$. Нехай $N_{\delta_k}$ – найменша кількість квадратів необхідних для цього. Тоді

$$N_{\delta_k}\leqslant\sum_{\substack{\alpha_i=\overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}}\left(\frac{a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}\dots a_{\alpha_k}}{a^k}+1\right)\cdot\left(\frac{R_f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)}{a^k}+1\right).$$

$$N_{\delta_k}\leqslant\frac{1}{a^{2k}}\cdot b^k+\frac{1}{a^k}\sum_{\substack{\alpha_i=\overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}}a_{\alpha_1}\dots a_{\alpha_k}+\frac{1}{a^k}\sum_{\substack{\alpha_i=\overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}}|b_{\alpha_1}\dots b_{\alpha_k}|+1=$$

$$=\frac{1}{a^{2k}}\left(b^k+a^k+a^{2k}+(|ab_0|+|ab_1|+\dots+|ab_{s-1}|)^k\right)\leqslant\frac{1}{a^{2k}}\left(b^k+a^k+a^{2k}+b^k\right).$$

Тоді

$$\lg N_{\delta_k}\leqslant\lg\frac{1}{a^{2k}}\left(2b^k+a^k+a^{2k}\right).$$

Поділимо обидві частини на додатне $-\lg a^k$ і перейдемо до границі

$$\alpha_0(\Gamma_f)\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{\lg\frac{2b^k}{a^{2k}}}{-\lg a^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\lg 2+k\lg b-2k\lg a}{-k\lg a}=2-\log_a b.$$

□

**Наслідок 4.** *Число $2-\log_a b$ є верхньою межею і для фрактальної клітинкової розмірності графіка функції $f(x)$.*

**Теорема 6.** *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція (4), що визначається векторами $Q=\left\{\frac{1}{s},\frac{1}{s},\dots,\frac{1}{s}\right\}$ і $Q'=\{b_1,b_2,\dots,b_{s-1}\}$. Тоді фрактальна клітинкова розмірність графіка функції $f(x)$ дорівнює $1+\log_s B$, де $B=\sum\limits_{i=1}^{s-1}|b_i|$.*

*Доведення.* Виконаємо покриття графіка функції $f(x)$ однаковими квадратами зі стороною $\delta_k=s^{-k}$, $k\in\mathbb{N}$. Нехай $N_{\delta_k}$ – найменша кількість квадратів зі стороною $\delta_k$, необхідних для цього. Згідно з наслідком 4 маємо

$$\alpha^K(\Gamma_f)\leqslant 2-\log_a b=2-\log_{s^{-1}}\left(\frac{1}{s}\sum_{i=0}^{s-1}b_i\right)=1+\log_s B.$$

Доведемо, що $\alpha^K(\Gamma_f)\geqslant 1+\log_s B$. Маємо

$$N_{\delta_k}\geqslant\sum_{\substack{\alpha_i=\overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}}\frac{R_f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)}{s^{-k}}=s^k\cdot\sum_{\substack{\alpha_i=\overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}}|b_{\alpha_1}\dots b_{\alpha_k}|=s^k\cdot B^k.$$

Тоді

$$\alpha\left(\Gamma_f\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\lg N_{\delta_k}}{-\lg s^{-k}}\geqslant\lim_{k\to\infty}\frac{\lg\left(s\cdot B\right)^k}{\lg s^k}=1+\log_s B.$$

$\square$


1. *Falconer K.J.* Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition. / *Falconer K.J.* – Chichester. Wiley, 2003.
2. *Okamoto H.* A remark on continuous, nowhere differentiable functions. / *Okamoto H.* // Proc. Japan Acad. – 2005. – Ser. A 81, № 3. – P. 47–50.
3. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного: Элементарная теория. / *Бурбаки Н.* – М., 1965.
4. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. / *Працьовитий М. В.* – К., 1998.


## DIFFERENTIAL AND FRACTAL PROPERTIES OF THE CLASS OF SELF-AFFINE FUNCTIONS


**Mykola PRATS'OVYTYI[1], Oleksii PANASENKO[2]**

[1] *Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 01601, Kyiv, Tereshchenkivs'ka Str., 3*
*e-mail: prats4@yandex.ru*
[2] *Winnytcya State Pedagogical University of M. Kotsyubyns'kyi, 21100, Winnytcya, Ostroz'kogo Str., 32*
*e-mail: panasenko_ alex@bigmir.net*



We consider the family of continuous functions that contains the classes of nowhere differentiable and singular functions, and is defined as the invariant set of some iterated function system. Differential and some fractal properties are investigated in the paper.



*Key words:* self-affine function, Hausdoff-Besicovich dimension.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КЛАССА САМОАФИННЫХ ФУНКЦИЙ

**Николай ПРАЦЬОВИТЫЙ**[1], **Алексей ПАНАСЕНКО**[2]

[1] *Институт математики НАН Украины,*
*01601, Киев, ул. Терещенковская, 3*
*e-mail: prats4@yandex.ru*
[2] *Винницкий государственный педагогический университет им. М. Коцюбинского,*
*21100, Винница, ул. Острозского, 32*
*e-mail: panasenko_alex@bigmir.net*

Рассмотрено семью непрерывных функций, которая содержит классы нигде не дифференциируемых и сингулярных функций и определяется как инвариантное множество системы итерируемых функций. Исследовано дифференциальные и некоторые фрактальные свойства функций этого класса.

*Ключевые слова:* самоафинная функция, размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Стаття надійшла до редколегії 10.07.2008

Прийнята до друку 12.06.2009