ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 70. С. 91–102

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 70. P. 91–102

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Микола ІВАНЧОВ[1], **Віталій ВЛАСОВ**[2]

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: [1]*ivanchov@franko.lviv.ua*, [2]*siphiuel@gmail.com*

Знайдено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомого коефіцієнта при старшій похідній для двовимірного рівняння теплопровідності $u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,t)$ зі слабким виродженням. Існування розв'язку доводиться за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку. Єдиність розв'язку доводять шляхом зведення задачі до інтегрального рівняння Вольтерра ($\beta < 1$).

Ключові слова: двовимірне рівняння теплопровідності, слабке виродження, функція Гріна, теорема Шаудера про нерухому точку.

1. Вступ. Розглянуто обернену задачу визначення старшого коефіцієнта у двовимірному рівнянні теплопровідності зі слабким виродженням. Обернені задачі з виродженням досліджував, зокрема, М.М. Гаджієв у [1], де вивчив задачу визначення вільного члена в еліптичному рівнянні зі слабким виродженням. Т. Елдесбаєв у [2] розглядав обернену задачу для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right) + c(x)u, \quad 0 < \alpha < 2,$$

з невідомим коефіцієнтом $c(x)$. Н. Салдіна вивчала обернені задачі зі слабким і сильним виродженням [3-5], зокрема, задачі для параболічних рівнянь вигляду

$$u_t = a(t)\psi_0(t)u_{xx} + b(x,t)\psi_1(t)u_x + c(x,t)\psi_2(t)u + f(x,t)$$

із невідомим коефіцієнтом $a(t)$ і загальним степеневим виродженням, де $\psi_i(t)$ – деякі додатні монотонно зростаючі функції [5]. У праці [6] досліджується обернена задача визначення старшого коефіцієнта у багатовимірному рівнянні зі слабким степеневим виродженням, існування і єдиність розв'язку доводять за допомогою теорії півгруп.

При розгляді цієї задачі використано методи, застосовані Н. Салдіною у [3] для одновимірних рівнянь із виродженням. Доведено існування і єдиність розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами першого роду. Існування розв'язку доводять шляхом зведення заданої задачі до операторного рівняння з наступним застосуванням теореми Шаудера про нерухому точку. Єдиність розв'язку доводять за допомогою властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

2. Основна частина. В області $Q_T \equiv \{(x,y,t)\colon 0<x<h, 0<y<l, 0<t<T\}$ розглянемо обернену задачу знаходження пари функцій (a,u) із класу $C[0,T]\times \times(C(\overline{Q_T})\cap C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0,0}([0,h)\times(0,l)\times[0,T]))$, де $a(t)>0$, $t\in[0,T]$, для яких виконуватимуться рівності:

$$u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,y,t),\quad (x,y,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in[0,h]\times[0,l], \tag{2}$$

$$u(0,y,t)=\mu_1(y,t),\quad u(h,y,t)=\mu_2(y,t),\quad y\in[0,l],\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0,t)=\nu_1(x,t),\quad u(x,l,t)=\nu_2(x,t),\quad x\in[0,h],\quad t\in[0,T], \tag{4}$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t)=\varkappa(t),\quad t\in[0,T], \tag{5}$$

де $0<\beta<1$, $0<y_0<l$.

Теорема 1. ***(Існування)***. *Нехай виконуються такі умови:*

(A1) $\varphi\in C^2(\overline{D})$, *де* $D=\{(x,y):\ 0<x<h, 0<y<l\}$; $\mu_i\in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap \cap C^{1,1}([0,l]\times[0,T])$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0} t^\beta\mu_{i_{yy}}$, $i=1,2$; $\nu_i\in C^{1,0}([0,h]\times[0,T]), i=1,2$; $\varkappa\in C[0,T]$; $f\in C^{1,0,0}(\overline{Q_T})$;

(A2) $\varphi_x(x,y)>0$, $(x,y)\in\overline{D}$; $\mu_{1_t}(y,t)-f(0,y,t)\leqslant 0, \mu_{2_t}(y,t)-f(h,y,t)\geqslant 0$, $(y,t)\in[0,l]\times[0,T]$, $\mu_{1_{yy}}(y,t)\geqslant 0$, $\mu_{2_{yy}}(y,t)\leqslant 0$, $(y,t)\in[0,l]\times(0,T]$, $i=1,2$; $\nu_{1_x}(x,t)\geqslant 0$, $\nu_{2_x}(x,t)\geqslant 0$, $(x,t)\in[0,h]\times[0,T]$; $f_x(x,y,t)\geqslant 0$, $(x,y,t)\in\overline{Q_T}$; $\varkappa(t)>0$, $t\in[0,T]$;

(A3) $\mu_1(y,0)=\varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0)=\varphi(h,y)$, $\nu_1(x,0)=\varphi(x,0)$, $\nu_2(x,0)=\varphi(x,l)$, $\mu_1(0,t)=\nu_1(0,t)$, $\mu_1(l,t)=\nu_2(0,t)$, $\mu_2(0,t)=\nu_1(h,t)$, $\mu_2(l,t)=\nu_2(h,t)$.

Тоді задача (1)-(5) має розв'язок.

Доведення. Тимчасово припускатимемо, що функція $a(t)$ – відома. Розв'язок прямої задачі (1)-(4) набуває вигляду [7]:

$$u(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_0^t\int_0^l G_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$

$$\times\tau^\beta a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau-\int_0^t\int_0^l G_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\times$$

$$\times\tau^\beta a(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \qquad (6)$$

де $G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ - функція Гріна задачі (2)-(4) для рівняння (1), що визначається рівністю:

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\Big(\exp\big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)+$$

$$+(-1)^i\exp\big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)\Big)\Big(\exp\big(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)+$$

$$+(-1)^j\exp\big(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)\Big)\Bigg),\quad \theta(t)=\int\limits_0^t\tau^\beta a(\tau)d\tau,\quad i,j=1,2.$$

Використовуючи властивості функцій Гріна та інтегруючи частинами, продиференціюємо (6) по x:

$$u_x(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\times$$

$$\times\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \qquad (7)$$

Підставивши (7) в умову перевизначення (5), отримаємо рівняння для невідомої функції $a(t)$:

$$a(t)=\varkappa(t)\Bigg[\int_0^l\int_0^h G_{21}(0,y_0,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_0^t\int_0^l G_{21}(0,y_0,t,h,\eta,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau-\int_0^t\int_0^l G_{21}(0,y_0,t,0,\eta,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+\int_0^t\int_0^h G_{21_\eta}(0,y_0,t,\xi,0,\tau)\times$$

$$\times\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_0^t\int_0^h G_{21_\eta}(0,y_0,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{21}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau\Bigg]^{-1},\quad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Отож, ми звели обернену задачу (1)-(5) до задачі знаходження розв'язку рівняння (8). Знайдемо оцінки розв'язків (8).

Оцінимо $a(t)$ зверху. Позначимо інтеграли у (8) через $I_i, i=\overline{1,6}$. Знайдемо оцінки цих інтегралів знизу.

Розглянемо I_1. Функцію Гріна $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau),\ i,j=1,2$, можна подати у вигляді добутку $G_i^x(x,t,\xi,\tau)G_j^y(y,t,\eta,\tau)$, де G_i^x і G_j^y - функції Гріна i-ї і j-ї крайових задач відповідно для рівнянь

$$u_t=t^\beta a(t)u_{xx},\quad (x,t)\in(0,h)\times(0,T),\quad \text{і}\quad v_t=t^\beta a(t)v_{yy},\quad (y,t)\in(0,l)\times(0,T).$$

Запишемо I_1 так:

$$I_1=\int_0^l\int_0^h G_2^x(0,t,\xi,0)G_1^y(y_0,t,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Використовуючи вигляд похідної функції Гріна $G_2^x(x,t,\xi,\tau)$, легко бачити, що

$$\int_0^h G_2^x(x,t,\xi,\tau)d\xi=1. \tag{9}$$

Звідси отримаємо

$$I_1\geqslant\min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}}\varphi_x(x,y)\int_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta.$$

Оцінимо I_4 та I_5:

$$I_4 = \int_0^t \int_0^h G_2^x(0,t,\xi,\tau) G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t) \int_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau,$$

$$I_5 \geqslant \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t)\left(-\int_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau\right).$$

Із умов **(A2)** випливає невід'ємність доданків I_2, I_3, I_6. Тоді

$$\sum_{i=1}^6 I_i \geqslant I_1 + I_4 + I_5 \geqslant \min\Big\{ \min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t)\Big\}\times$$

$$\times\Big(\int_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta + \int_0^t G_{1\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau - \int_0^t G_{1\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau\Big).$$

Вираз у дужках є розв'язком такої задачі:

$$\begin{aligned} &u_t = t^\beta a(t)u_{yy}, \quad (y,t)\in(0,l)\times(0,T),\\ &u(y,0) = 1, \quad y\in[0,l],\\ &u(0,t) = u(l,t) = 1, \quad t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{10}$$

Розв'язок цієї задачі дорівнює 1. Тоді

$$\sum_{i=1}^6 I_i \geqslant \min\Big\{ \min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t)\Big\} \equiv C_1.$$

Отже,

$$a(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \varkappa(t)}{C_1} \equiv A_1, \quad t\in[0,T]. \tag{11}$$

Оцінимо $a(t)$ знизу. Для цього знайдемо оцінки кожного з інтегралів I_i зверху. Розглянемо I_1. Використовуючи (9), матимемо

$$I_1 \leqslant \max_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y) \int_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta.$$

Для інтегралів I_4 та I_5 отримаємо:

$$I_4 \leqslant \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t)\int\limits_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau,$$

$$I_5 \leqslant \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t)\left(-\int\limits_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau\right).$$

Тоді для суми $I_1+I_4+I_5$ справеджується така нерівність:

$$I_1+I_4+I_5 \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\max_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y),\ \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t),\ \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t)\right\}\left(\int\limits_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau-\int\limits_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau\right)\leqslant C_2.$$

Оцінимо I_2

$$I_2 \leqslant \int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau =$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_2^x(0,t,h,\tau)G_2^y(y_0,t,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau.$$

Функція $G_2^x(0,t,h,\tau)$ обмежена зверху виразом $\frac{4}{h}$ [9, с.12]. Тоді, використовуючи умови **(A2)** і рівність (9), отримаємо

$$\int\limits_0^l G_2^y(y_0,t,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta \leqslant C_3.$$

Тому

$$I_2 \leqslant \frac{4C_3 t}{h}.$$

Знайдемо оцінку для I_3. Відомо [9], що виконується оцінка

$$G_2^x(0,t,0,\tau) \leqslant \frac{1}{h}+\frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}.$$

Із умов **(A2)**, рівності (9) та з того, що

$$\int\limits_0^l G_2^y(y_0,t,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta \leqslant C_4,$$

випливатиме оцінка

$$I_3 \leqslant \int\limits_0^t \Big(C_5 + \frac{C_6}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\Big)d\tau.$$

Доданок I_6 оцінюємо так само, як I_1

$$I_6 \leqslant \int\limits_0^t \max_{[0,h]\times[0,l]} f_x(x,y,\tau)d\tau \leqslant C_7.$$

Застосуємо отримані оцінки до (8)

$$a(t) \geqslant \frac{\varkappa(t)}{C_8 + C_9 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}} \ . \tag{12}$$

Розглянемо інтеграл у знаменнику (12)

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\int\limits_\tau^t \sigma^\beta a(\sigma)d\sigma}} \leqslant \sqrt{\frac{\beta+1}{a_{min}}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}},$$

де $a_{min} = \min\limits_{[0,T]} a(t)$. Оцінимо останній інтеграл

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} = t^{\frac{1-\beta}{2}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}} \leqslant C_{10}.$$

Тоді з (12) матимемо

$$a(t) \geqslant \frac{C_{11}}{C_8 + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{min}}}}.$$

Остання нерівність виконується для будь-яких $t \in [0,T]$, тому

$$a_{min} \geqslant \frac{C_{11}}{C_8 + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{min}}}},$$

або

$$C_8 a_{min} + C_{12}\sqrt{a_{min}} - C_{11} \geqslant 0.$$

Знайдемо звідси оцінку для a_{min}

$$a_{min} \geqslant \left(\frac{C_{11}}{\sqrt{C_{12}^2 + 4C_8C_{11}} + C_{12}}\right)^2 \equiv A_0.$$

Отже, маємо

$$a(t) \geqslant A_0, \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Рівняння (8) запишемо у вигляді операторного рівняння

$$a(t) = Pa(t), \tag{14}$$

де оператор P переводить множину $N = \{a \in C[0,T] : A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1\}$ в себе. Доведення того, що оператор P є цілком неперервним, проводять аналогічно до одновимірного випадку, враховуючи той факт, що функцію Гріна для двовимірного рівняння можна подати у вигляді добутку відповідних функцій Гріна для одновимірного рівняння. Звідси матимемо, що оператор P має нерухому точку, тому існує розв'язок задачі (1)-(5). □

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)-(5).

Теорема 2. ***(Єдиність)***. *Нехай виконуються умови:*

(A5) $\varphi \in C^{2,2}([0,h]\times[0,l])$; $\mu_i \in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,l]\times[0,T])$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0} t^\beta \mu_{i_{yy}}(y,t)$, $i=1,2$; $\nu_i \in C^{2,1}([0,h]\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,h]\times[0,T])$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0} t^\beta \nu_{i_{xx}}(x,t) i = 1,2$; $f \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$;

(A6) $\varkappa(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$.

Тоді задача (1)-(5) не може мати двох різних розв'язків.

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки задачі, а саме $(a_1(t),\ u_1(x,y,t))$ та $(a_2(t), u_2(x,y,t))$. Позначимо $A(t) = a_1(t) - a_2(t), U(x,y,t) = u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t)$. Тоді для (A,U) матимемо таку задачу:

$$U_t = t^\beta a_1(t)\Delta U + t^\beta A(t)\Delta u_2, \quad (x,y,t)\in Q_T, \tag{15}$$

$$U|_{t=0} = U|_{x=0} = U|_{x=h} = U|_{y=0} = U|_{y=l} = 0, \tag{16}$$

$$a_1(t)U_x(0,y_0,t) = -A(t)u_{2_x}(0,y_0,t), \quad t\in[0,T]. \tag{17}$$

Подамо розв'язок прямої задачі (15),(16) у вигляді

$$U(x,y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h \int\limits_0^l G^*_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta A(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,$$

де G^*_{11} - функція Гріна задачі (15),(16). Підставивши його в умову перевизначення, отримаємо рівняння для $A(t)$

$$A(t)u_{2_x}(0,y_0,t) = -a_1(t)\int\limits_0^t \int\limits_0^h \int\limits_0^l G^*_{11_x}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta A(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{18}$$

Отримали інтегральне рівняння Вольтерра другого роду. Оцінимо ядро цього інтегрального рівняння. Проведемо оцінку $\Delta u = u_{2_{xx}} + u_{2_{yy}}$. Розглянемо вираз для $u_{2_{xx}}$:

$$u_{2_{xx}}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G^*_{11_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G^*_{11_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G^*_{11_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\times$$

$$\times\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{1_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G^*_{11_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{11_\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{19}$$

Позначимо інтеграли у (19) через $J_i, i=\overline{1,6}$, знайдемо їхні оцінки.
Спочатку оцінимо J_1

$$\left|J_1\right|\leqslant\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)|\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)|d\xi d\eta\leqslant\max_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}}|\varphi_{xx}(x,y)|.$$

Оскільки (див. [3])

$$\int\limits_0^t G^{x*}_{1_\xi}(x,t,0,\tau)d\tau\leqslant\frac{C_{13}}{t^\beta}, \tag{20}$$

то для доданка J_3 матимемо

$$\left|J_3\right|\leqslant C_{14}\int\limits_0^t G^{x*}_{1_\xi}(x,t,0,\tau)d\tau\leqslant\frac{C_{15}}{t^\beta}.$$

Так само оцінюється інтеграл J_2. Аналогічно, застосовуючи (9) і (20) до інтегралів J_4, J_5, отримаємо

$$\left|J_4\right|\leqslant C_{16}\int\limits_0^t G^{y*}_{1_\eta}(x,t,0,\tau)\tau^\beta d\tau\leqslant C_{17},\ \left|J_5\right|\leqslant C_{18}\int\limits_0^t |G^{y*}_{1_\eta}(x,t,l,\tau)|\tau^\beta d\tau\leqslant C_{19}.$$

Розглянемо J_6:

$$\big|J_6\big| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \max_{Q_T} |f_x(x,t)| \int_0^t \int_0^h \frac{1}{\big(\theta_2(t)-\theta_2(\tau)\big)^{3/2}} \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg(|x-\xi+2nh| \exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))} \Big) +$$
$$+|x+\xi+2nh| \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))} \Big) \Bigg) d\xi d\tau \equiv J_{6,1}+J_{6,2}.$$

В інтегралі $J_{6,1}$ зробимо заміну змінних

$$z=\frac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}:$$

$$J_{6,1} \leqslant C_{20} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \int_{\frac{x-\xi+(2n-1)h}{2\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}}^{\frac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}} |z|\exp(-z^2)dz \leqslant$$

$$\leqslant C_{20} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} |z|\exp(-z^2)dz \leqslant C_{21} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} d\tau \leqslant C_{22} t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Інтеграл $J_{6,2}$ можна оцінити так само. Тоді

$$|u_{2_{xx}}(x,y,t)| \leqslant C_{23}+C_{24}t^{\frac{1-\beta}{2}}+C_{25}t^{-\beta}. \tag{21}$$

Доданок $u_{2_{yy}}$ із виразу для Δu_2 можна оцінити аналогічно. Звідси маємо

$$|t^{\beta}\Delta u| \leqslant C_{26}. \tag{22}$$

Згідно з цією оцінкою ядро інтегрального рівняння (18) є обмеженим, тому це рівняння має тільки тривіальний розв'язок. Звідси випливає, що задача (15)-(17) має тривіальний розв'язок. Теорему доведено. □

3. Висновки. Для доведення існування та єдиності розв'язку необхідно накладати додаткові умови на функції, які визначають поведінку розв'язку на краях області. Поведінка розв'язку двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням по часовій змінній не відрізняється від поведінки розв'язку аналогічного до одновимірного рівняння.

1. *Гаджиев М.М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения / *Гаджиев М.М.* // Применение методов функционального анализа в методах математической физики. – Новосибирск. – 1987. – С. 66-71.
2. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка / *Елдесбаев Т.* // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1987. – №3. – С. 27-29.
3. *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням / *Салдіна Н.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 245-257.

4. *M. Ivanchov* An inverse problem for strongly degenerate heat equation / *M. Ivanchov, N. Saldina* // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2006. – Vol. 14, №5. – P. 465-480.
5. *Салдіна Н.* Сильно вироджена обернена параболічна задача з загальною поведінкою коефіцієнтів / *Салдіна Н.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 186-202.
6. *M. Ivanchov* Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in Banach space / *M. Ivanchov, A. Lorenzi, N. Saldina.* // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2008. – Vol. 16, №4. – P. 397-415.
7. *Сагайдак Р.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу в прямокутнику / *Сагайдак Р.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 117-128.
8. *Іванчов М.І.* Обернена задача визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні / *Іванчов М.І., Сагайдак Р.В.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, №1. – С. 7-16.
9. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. / *Ivanchov M.* – VNTL Publishers., 2003.

AN INVERSE PROBLEM FOR A WEAKLY DEGENERATE TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION

Mykola IVANCHOV[1], Vitaliy VLASOV[2]

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: [1]*ivanchov@franko.lviv.ua,* [2]*siphiuel@gmail.com*

Conditions for existence and uniqueness of the solution of the problem of the identification of the unknown coefficient at the major derivative in a heat equation $u_t = t^{\beta}a(t)\Delta u + f(x,t)$ with a weak degeneration ($\beta < 1$) are established. Existence is proven via the application of Schauder fixed-point theorem. Uniqueness is established by reducing the problem to a Volterra integral equation.

Key words: heat equation, weak degeneration, two-dimensional, Green function, Schauder fixed-point theorem.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБО ВЫРОЖДЕННОГО ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Николай ИВАНЧОВ[1], **Виталий ВЛАСОВ**[2]

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: [1]*ivanchov@franko.lviv.ua,* [2]*siphiuel@gmail.com*

Найдены условия существования и единственности решения обратной задачи определения зависящего от времени старшего коэффициента в двумерном уравнении теплопроводности $u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,t)$ со слабым вырождением ($\beta < 1$). Существование решения доказывается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. Единственность устанавливается путем преобразования задачи к интегральному уравнению Вольтерра.

Ключевые слова: двумерное уравнение теплопроводности, слабое вырождение, функция Грина, теорема Шаудера о неподвижной точке.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2009

Прийнята до друку 12.06.2009