ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 79–90 *Is. 70. P. 79–90*

УДК 517.911

ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНІЄЇ СИНГУЛЯРНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

Олександр ЗЕРНОВ[1], Юлія КУЗІНА[2]

[1] *Південноукраїнський державний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського,*
65020, Одеса, вул. Старопортофранківська, 26
e-mail: zernov@ukr.net
[2] *Одеський інститут фінансів УДУФМТ,*
65070, Одеса, вул. 25-ї Чапаєвської дивізії, 6
e-mail: yuliak@te.net.ua

Розглянуто сингулярну задачу Коші для одної системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженням. Запропоновано дві схеми вивчення питань про розв'язність цієї задачі та кількості її розв'язків. Крім того, досліджено асимптотичну поведінку розв'язків при $t \to +0$.

Ключові слова: сингулярна задача Коші, диференціальні рівняння з виродженням.

Сингулярну задачу Коші для диференціального рівняння $x' = f(t, x)$ досліджувало багато авторів, передусім відзначимо праці [1], [5], [6], [11], [12], [15], [16], де достатньо вивчено питання існування розв'язків та їхньої кількості. У багатьох працях вивчали задачу Коші для диференціальних рівнянь вигляду $f(t, x, x') = 0$, $x' = f(t, x, x')$. Зокрема, в [2], [6], [17], [18], [19] розглядали питання розв'язності та кількості розв'язків, а в [3], [12], [20], [21] – ознаки збіжності до розв'язку послідовностей наближень. Водночас погано досліджено асимптотичну поведінку розв'язків задачі Коші для диференціальних рівнянь, які не розв'язані стосовно похідних невідомих функцій. Мета нашої праці – вирішити ці проблеми для одного класу систем звичайних диференціальних рівнянь, які не розв'язані стосовно похідних. Ми запропонували дві схеми міркувань, які допомагають вивчати питання про розв'язність, кількість розв'язків, асимптотичну поведінку цих розв'язків та їхніх перших похідних, коли $t \to +0$. В дослідженнях застосовані методи якісної теорії диференціальних рівнянь [4], [5], [13], а також [7], [8]. Стаття є продовженням попередніх робіт авторів, де було розглянуто існування розв'язків та асимптотичну поведінку сингулярних задач Коші для скалярних диференціальних рівнянь, які не розв'язані стосовно похідної невідомої функції.

Розглядатимемо задачу Коші

$$\alpha(t)x' = f(t, x, x'), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

де $t \in (0, \tau)$ – дійсна змінна; $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ – невідома дійсна функція змінної t. Передбачимо, що виконано такі *умови A*:

1) $\alpha(t) = \operatorname{diag}(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$ – діагональна $n \times n$-матриця, де $\alpha_i : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервні функції, $\lim\limits_{t \to +0} \alpha_i(t) = 0,\ i \in \{1, \ldots, n\}$;

2) $0 < \beta(t) \leqslant \alpha_i(t),\ t \in (0, \tau),\ i \in \{1, \ldots, n\}$, де $\beta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервно диференційовна функція,

$$\lim_{t \to +0} \beta(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +0} t\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \beta_0, \qquad 0 \leqslant \beta_0 < +\infty;$$

3) $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ – неперервна функція,

$$\mathcal{D} = \left\{(t, x, y) : t \in (0, \tau),\ \|x\| < r_1\gamma(t),\ \|y\| < r_2\frac{\gamma(t)}{t}\right\},$$

де r_1, r_2 – додатні сталі; $\gamma : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервно диференційовна функція, $\gamma'(t) > 0,\ t \in (0, \tau)$,

$$\lim_{t \to +0} \gamma(t) = 0, \quad \lim_{t \to +0} \frac{\beta(t)\gamma(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \to +0} t\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \gamma_0, \quad 0 < \gamma_0 < +\infty;$$

4) $\|f(t, 0, 0)\| \leqslant \delta(t),\ t \in (0, \tau)$, де $\delta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервна функція,

$$\lim_{t \to +0} \delta(t) = 0, \quad \lim_{t \to +0} \frac{t\delta(t)}{\beta(t)\gamma(t)} = c_0, \quad 0 \leqslant c_0 < +\infty.$$

Означення 1. *Для кожного $\rho \in (0, \tau)$ неперервно диференційовна функція $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ називається ρ-розв'язком задачі (1), (2), якщо:*

1) $\Big(t, x(t), x'(t)\Big) \in \mathcal{D},\ t \in (0, \rho]$;

2) x тотожно задовольняє (1) при $t \in (0, \rho]$;

3) $\lim\limits_{t \to +0} x(t) = 0$.

Позначимо через $\mathcal{U}(\rho, M, Q)$ множину всіх неперервно диференційовних функцій $u : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ таких, що

$$\|u(t)\| \leqslant M\gamma(t), \quad \|u'(t)\| \leqslant QM\frac{\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0, \rho];$$

тут ρ, M, Q – сталі, $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0$, $Q > 0$.

Ми досліджуємо питання про існування у задачі (1), (2) ρ-розв'язків, які належать множині $\mathcal{U}(\rho, M, Q)$ та про єдність ρ-розв'язку цього типу.

Назвемо *умовами B* сукупність таких умов:

1) для довільного $\mu \in (0, \tau)$ та для довільних $t_s \in [\mu, \tau),\ s \in \{1, 2\}$:

$|\alpha_i(t_1)-\alpha_i(t_2)| \leqslant L_1(\mu)|t_1-t_2|, \quad i \in \{1,\dots,n\},$

$|\beta(t_1)-\beta(t_2)| \leqslant L_2(\mu)|t_1-t_2|,$

$|\beta'(t_1)-\beta'(t_2)| \leqslant L_3(\mu)|t_1-t_2|,$

де $L_j:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервні незростаючі функції, $j\in\{1,2,3\}$;

2) $\|f(t_1,x,y)-f(t_2,x,y)\| \leqslant l_t(\mu)|t_1-t_2|, \quad (t_j,x,y)\in\mathcal{D}, \quad 0<\mu\leqslant t_1,t_2<\tau,$

$$\|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)\| \leqslant l_x(t)\frac{\beta(t)}{t}\|x_1-x_2\|, \quad (t,x_j,y)\in\mathcal{D},$$

$\|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)\| \leqslant l_y\beta(t)\|y_1-y_2\|, \quad (t,x,y_j)\in\mathcal{D},\ j\in\{1,2\},$

де $l_x,\ l_y$ – додатні сталі, $l_t:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервна незростаюча функція;

3) $l_y<\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \quad \dfrac{\gamma_0}{\sqrt{n}}(1-l_y)-l_x-2\beta_0 l_y>\dfrac{2c_0}{r_1}, \quad \left(\dfrac{\gamma_0}{\sqrt{n}}-l_x\right)\dfrac{1}{l_y}<\dfrac{r_2}{r_1}.$

Теорема 1. *Нехай виконані умови A, B. Тоді існують ρ, M, Q такі, що задача (1), (2) має хоча б один ρ-розв'язок, який належить множині $\mathcal{U}(\rho,M,Q)$.*

Назвемо умовами C сукупність таких умов:

1) $\|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)\| \leqslant l_x\dfrac{\beta(t)\omega(t)}{t}\|x_1-x_2\|, \quad (t,x_j,y)\in\mathcal{D},$

$\|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)\| \leqslant l_y\beta(t)\omega(t)\|y_1-y_2\|, \quad (t,x,y_j)\in\mathcal{D},\ j\in\{1,2\},$

де $l_x,\ l_y$ – додатні сталі, $\omega:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервно диференційовна функція,

$$\lim_{t\to+0}\omega(t)=0, \quad \lim_{t\to+0}\frac{\beta(t)\gamma(t)}{\omega(t)}=0, \quad \lim_{t\to+0}t\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}=\omega_0, \quad 0<\omega_0<+\infty,$$

$$\lim_{t\to+0}t\frac{\Big(\omega(t)/\beta(t)\Big)'}{\omega(t)/\beta(t)}=\Omega_0, \quad 0<\Omega_0<+\infty, \quad \lim_{t\to+0}\frac{\omega(t)}{t}=\nu_0, \quad 0\leqslant\nu_0<+\infty;$$

2) якщо $\nu_0\neq0,\ \beta_0\neq0$, то

$$l_x+\beta_0 l_y<\frac{\Omega_0}{n\nu_0(\Omega_0+\beta_0)};$$

якщо $\nu_0\neq0,\ \beta_0=0$, то $n\nu_0 l_x<1$;

3) $\dfrac{c_0\sqrt{n}}{\gamma_0}<r_1, \quad (2\beta_0+\gamma_0)r_1<r_2.$

Теорема 2. *Нехай виконано умови A, C. Тоді існують ρ, M, Q такі, що задача (1), (2) має единий ρ-розв'язок, який належить множині $\mathcal{U}(\rho,M,Q)$.*

Доведення теореми 1. Спочатку оберемо сталі ρ, M, Q, q. Нехай $Q>q+\beta_0$, де

$$q=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_0}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{l_y}\right)-\frac{l_x}{l_y}\right), \qquad \frac{2c_0}{\dfrac{\gamma_0}{\sqrt{n}}-l_x-l_y\left(2\beta_0+\dfrac{\gamma_0}{\sqrt{n}}\right)}<M<r_1.$$

Зазначимо, що $\rho \in (0,\tau)$ і ρ достатньо мале. Позначимо через $\mathcal{B}$ простір всіх неперервно диференційовних функцій $x : [0,\rho] \to \mathbb{R}^n$ з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t\in[0,\rho]}\Big(\|x(t)\| + \|x'(t)\|\Big). \tag{3}$$

Нехай $\mathcal{U}$ – підмножина $\mathcal{B}$, кожний елемент $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}^n$ якої задовольняє умови

$$\|u(t)\| \leqslant M\beta(t)\gamma(t), \qquad \|u'(t)\| \leqslant qM\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}, \qquad t \in (0,\rho], \tag{4}$$

причому $u(0) = 0,\ u'(0) = 0$ та, крім того, виконана умова

$$\forall\mu \in (0,\rho] \quad \forall t_j \in [\mu,\rho], \quad j \in \{1,2\} : \|u'(t_1) - u'(t_2)\| \leqslant K(\mu)|t_1 - t_2|,$$

де

$$K(\mu) = \Big(1-\sqrt{n}l_y\Big)^{-1}\left(\left(\frac{1}{\beta^2(\mu)} + \frac{1}{\mu}\right)L_2(\mu)+\frac{L_3(\mu)}{\beta^2(\mu)}+\frac{\sqrt{n}L_1(\mu)}{\beta(\mu)}+\sqrt{n}l_t(\mu)+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\beta(\mu)}\right).$$

Множина $\mathcal{U}$ замкнена, обмежена, опукла та (за теоремою Арцела) компактна. Нехай

$$x = \frac{y}{\beta(t)}, \tag{5}$$

де $y : (0,\tau) \to \mathbb{R}^n$ – нова невідома функція; $y = \mathrm{col}(y_1,\ldots,y_n)$. Тоді задача (1), (2) набуває вигляду

$$\alpha(t)y' = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\alpha(t)y + \beta(t)f\left(t, \frac{y}{\beta(t)}, \frac{y'}{\beta(t)} - \frac{y\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \qquad y(0) = 0, \tag{6}$$

або, в координатній формі,

$$\alpha_i(t){y_i}' = \alpha_i(t)\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}y_i + \beta(t)f_i\left(t, \frac{y}{\beta(t)}, \frac{y'}{\beta(t)} - \frac{y\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \quad y_i(0) = 0, \quad i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{7}$$

Далі розглядатимемо задачу Коші

$$\alpha_i(t){y_i}' = \alpha_i(t)\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}y_i + \beta(t)f_i\left(t, \frac{u(t)}{\beta(t)}, \frac{u'(t)}{\beta(t)} - \frac{u(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \quad y_i(0) = 0, \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \tag{8}$$

де $u \in \mathcal{U}$ – довільна фіксована функція. Виберемо $i \in \{1,\ldots,n\}$ та розглянемо i-те рівняння системи (8), яке записано у вигляді

$${y_i}' = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}y_i + \frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}f_i\left(t, \frac{u(t)}{\beta(t)}, \frac{u'(t)}{\beta(t)} - \frac{u(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \tag{9}$$

з початковою умовою

$$y_i(0) = 0. \tag{10}$$

Нехай

$$\mathcal{D}_{0i} = \{(t,y_i) : \quad t \in (0,\rho], \quad y_i \in \mathbb{R}\}.$$

В $\mathcal{D}_{0i}$ для диференціального рівняння (9) виконано умови теореми існування та єдиності розв'язку й неперервної залежності розв'язків від початкових даних. Зазначимо

$$\Phi_{1i} = \left\{(t, y_i): \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i| = \frac{M}{\sqrt{n}}\beta(t)\gamma(t)\right\},$$
$$\mathcal{D}_{1i} = \left\{(t, y_i): \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i| < \frac{M}{\sqrt{n}}\beta(t)\gamma(t)\right\},$$
$$\mathrm{H}_i = \left\{(t, y_i): \quad t = \rho, \quad |y_i| < \frac{M}{\sqrt{n}}\beta(\rho)\gamma(\rho)\right\}.$$

Нехай функція $A_{1i} : \mathcal{D}_{0i} \to [0, +\infty)$ визначається рівністю

$$A_{1i}(t, y_i) = {y_i}^2\Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{-2}$$

і нехай $a_{1i} : \mathcal{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ – похідна функції A_{1i} на підставі рівняння (9). Оскільки

$$a_{1i}(t, y_i) = 2\Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{-2}\gamma'(t)\Big(\gamma(t)\Big)^{-1}\left(\frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}y_i\frac{tf_i\left(t, \dfrac{u(t)}{\beta(t)}, \dfrac{u'(t)}{\beta(t)} - \dfrac{u(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right)}{t\gamma'(t)/\gamma(t)} - y_i^2\right),$$

то неважко переконатись в тому, що $a_{1i}(t, y_i) < 0$ при $(t, y_i) \in \Phi_{1i}$. Звідси випливає (див. [7, с. 758]), що існує хоча б одна інтегральна крива рівняння (9), яка визначена при $t \in (0, \rho]$ та лежить у $\mathcal{D}_{1i}$ при $t \in (0, \rho]$. Зазначимо цю інтегральну криву через $J_{iu} : (0, y_{iu}(t))$. Легко бачити, що

$$|y_{iu}(t)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{n}}\beta(t)\gamma(t), \quad |{y'}_{iu}(t)| \leqslant \frac{qM}{\sqrt{n}}\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{11}$$

Доведемо, що в множині інтегральних кривих рівняння (9), які перетинають H_i, інтегральна крива $J_{iu} : (0, y_{iu}(t))$ є єдиною кривою, яка розташована в $\mathcal{D}_{1i}$ при всіх $t \in (0, \rho]$. З цією метою розглянемо однопараметричні сім'ї множин

$$\Phi_{2i}(\mu) = \{(t, y_i): \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i - y_{iu}(t)| = \mu\beta(t)\gamma(t)(-\ln t)\},$$
$$\mathcal{D}_{2i}(\mu) = \{(t, y_i): \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i - y_{iu}(t)| < \mu\beta(t)\gamma(t)(-\ln t)\},$$

де μ – параметр; $\mu \in (0, 1]$. Нехай функція $A_{2i} : \mathcal{D}_{0i} \to [0, +\infty)$ визначається рівністю

$$A_{2i}(t, y_i) = \Big(y_i - y_{iu}(t)\Big)^2\Big(\beta(t)\gamma(t)(-\ln t)\Big)^{-2}$$

та нехай $a_{2i} : \mathcal{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ – будь- яка функція A_{2i} на підставі рівняння (9). Легко бачити, що $a_{2i}(t, y_i) < 0$, якщо $(t, y_i) \in \mathcal{D}_{0i}$ і якщо $y_i \neq y_{iu}(t)$. Крім того, якщо (t, y_i) – довільна точка множини $\overline{\mathcal{D}}_{1i}\backslash\{(0, 0)\}$, то для довільного фіксованого $\mu \in (0, 1]$

$$|y_i - y_{iu}(t)| \leqslant |y_i| + |y_{iu}(t)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}M\beta(t)\gamma(t) < \mu\beta(t)\gamma(t)(-\ln t),$$

якщо $t \in (0, t(\mu)]$, де стала $t(\mu) \in (0, \rho)$ визначається умовою $(-\ln t)^{-1} < \dfrac{\sqrt{n}\mu}{2M}$ при $t \in (0, t(\mu)]$. Звідси (див. [7, с. 758-759]) випливає правильність твердження, яке доводиться.

Нехай функція $y_u : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ визначається рівністю

$$y_u(t) = \operatorname{col}\Big(y_{1u}(t), \ldots, y_{nu}(t)\Big), \quad t \in (0, \rho]. \tag{12}$$

Неважно переконатись в тому, що

$$\|y_u(t)\| \leqslant M\beta(t)\gamma(t), \quad \|{y'}_u(t)\| \leqslant qM\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0, \rho] \tag{13}$$

та що $\forall \mu \in (0, \rho]\ \forall t_j \in [\mu, \rho],\ j \in \{1, 2\} : \|y'_u(t_1) - y'_u(t_2)\| \leqslant K(\mu)|t_1 - t_2|$. Якщо прийняти $y_u(0) = 0,\ y'_u(0) = 0$, то $y_u \in \mathcal{U}$. Визначимо оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ рівністю $\mathrm{T}u = y_u$.

Доведемо, що $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ – неперервний оператор. Нехай $u_* \in \mathcal{U}$, $u_{**} \in \mathcal{U}$ – довільні фіксовані функції. Зазначимо $\mathrm{T}u_* = y_*$, $\mathrm{T}u_{**} = y_{**}$; нехай $y_* = \operatorname{col}\Big(y_{1*}, \ldots, y_{n*}\Big)$ і $y_{**} = \operatorname{col}\Big(y_{1**}, \ldots, y_{n**}\Big)$. Якщо $u_* = u_{**}$, то й $y_* = y_{**}$. Нехай далі $\|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$. Виберемо $i \in \{1, \ldots, n\}$ та будемо досліджувати асимптотичну поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння

$${y_i}' = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}y_i + \frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}f_i\left(t, \frac{u_*(t)}{\beta(t)}, \frac{{u'}_*(t)}{\beta(t)} - \frac{u_*(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \tag{14}$$

Нехай

$$\Phi_{3i} = \left\{(t, y_i) : \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i - y_{i**}(t)| = \eta h^\nu \Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}\right\},$$

$$\mathcal{D}_{3i} = \left\{(t, y_i) : \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i - y_{i**}(t)| < \eta h^\nu \Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}\right\},$$

де $\nu,\ \eta$ – сталі, які визначаються такими умовами:

$$0 < \nu < \frac{\gamma_0}{\beta_0 + \gamma_0}, \qquad \eta > \frac{2(l_x + l_y\beta_0 + 1)(2M)^{1-\nu}}{\gamma_0 - \nu(\beta_0 + \gamma_0)}.$$

Нехай функція $A_{3i} : \mathcal{D}_{0i} \to [0, +\infty)$ визначена рівністю

$$A_{3i}(t, y_i) = \Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)^2 \Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{-2(1-\nu)}$$

та нехай $a_{3i} : \mathcal{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ – похідна функції A_{3i} на підставі рівняння (14). Оскільки

$$a_{3i}(t, y_i) =$$

$$= 2\Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{-2(1-\nu)} t^{-1}\left(\left(t\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} - (1-\nu)\left(t\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + t\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right)\right)\Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)^2 + \right.$$

$$+\Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)\frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}t\left(f_i\left(t, \frac{u_*(t)}{\beta(t)}, \frac{{u'}_*(t)}{\beta(t)} - \frac{u_*(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - f_i\left(t, \frac{u_{**}(t)}{\beta(t)}, \frac{{u'}_{**}(t)}{\beta(t)} - \frac{u_{**}(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right)\right)\right),$$

то, враховуючи нерівності,

$$\|u_*(t) - u_{**}(t)\| \leqslant \|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}}^\nu \Big(\|u_*(t)\| + \|u_{**}(t)\|\Big)^{1-\nu} \leqslant h^\nu\Big(2M\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}, \quad t \in (0, \rho],$$

$$\|u'_*(t) - u'_{**}(t)\| \leqslant \|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}}^{\nu} \Big(\|u'_*(t)\| + \|u'_{**}(t)\|\Big)^{1-\nu} \leqslant h^{\nu} \left(2qM \frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}\right)^{1-\nu},$$

$t \in (0, \rho]$, неважко переконатись в тому, що $a_{3i}(t, y_i) < 0$ при $(t, y_i) \in \Phi_{3i}$. Звідси випливає (див. [7, с. 758]), що довільна інтегральна крива $J : (t, y_i(t))$ рівняння (14), яка перетинає Φ_{3i}, в околі точки (t_*, y_{i*}) перетину з Φ_{3i} розташована так: $(t, y_i(t)) \in \in \mathcal{D}_{3i}$ при $t \in (t_*, t_* + \delta)$ та $(t, y_i(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_{3i}$ при $t \in (t_* - \delta, t_*)$ (тут $\delta > 0$ – достатньо мале, $t_* + \delta < \rho$). Крім того,

$$|y_{i*}(t) - y_{i**}(t)| \leqslant |y_{i*}(t)| + |y_{i**}(t)| \leqslant \frac{2M}{\sqrt{n}} \beta(t)\gamma(t) < \eta h^{\nu} \Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}$$

при $t \in (0, t(h)]$, де сталу $t(h) \in (0, \rho)$ визначають з умови

$$\Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{\nu} < \frac{\sqrt{n}\eta}{2M} h^{\nu} \quad \text{при} \quad t \in (0, t(h)].$$

Тому інтегральна крива $J_* : (t, y_{i*}(t))$ рівняння (14) лежить у $\mathcal{D}_{3i}$ при $t \in (0, t(h)]$. Якщо t зростає від $t = t(h)$ до $t = \rho$, то, на підставі сказаного, ця інтегральна крива не може перетинати Φ_{3i}, тому вона залишається в $\mathcal{D}_{3i}$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Отож,

$$|y_{i*}(t) - y_{i**}(t)| \leqslant \eta h^{\nu} (\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}, \quad t \in (0, \rho], \tag{15}$$

тому

$$|y'_{i*}(t) - y'_{i**}(t)| \leqslant \frac{\xi(t)}{t} h^{\nu}, \quad t \in (0, \rho], \tag{16}$$

де $\xi : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ – неперервна функція; $\lim\limits_{t \to +0} \xi(t) = 0$. Позаяк нерівності (15), (16) виконуються для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$, то, оскільки ρ достатньо мале,

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \frac{h^{\nu}}{t}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{17}$$

Перейдемо безпосередньо до доведення неперервності оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Існує таке $t_{\varepsilon} \in (0, \rho)$, що

$$2M\beta(t)\gamma(t) + 2qM \frac{\beta(t)\gamma(t)}{t} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad t \in (0, t_{\varepsilon}].$$

Якщо $t \in (0, t_{\varepsilon}]$, то

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \|y_*(t)\| + \|y_{**}(t)\| + \|y'_*(t)\| + \|y'_{**}(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Нехай далі $t \in [t_{\varepsilon}, \rho]$. Тоді з (17) маємо

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \frac{h^{\nu}}{t_{\varepsilon}}, \quad t \in [t_{\varepsilon}, \rho]. \tag{19}$$

Нехай

$$\delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon t_{\varepsilon}}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Очевидно, $\delta(\varepsilon)$ залежить тільки від ε і $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \delta(\varepsilon) = 0$. Якщо $h < \delta(\varepsilon)$, то, на підставі (18), (19),

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

при всіх $t \in (0, \rho]$, тому
$$\|y_* - y_{**}\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, якщо $\|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}} = h < \delta(\varepsilon)$, то
$$\|\mathrm{T}u_* - \mathrm{T}u_{**}\|_{\mathcal{B}} = \|y_* - y_{**}\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
Наведені міркування не залежать від вибору функцій $u_* \in \mathcal{U}$, $u_{**} \in \mathcal{U}$. Неперервність оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ доведена. На підставі теореми Шаудера про нерухому точку існує хоча б одна функція $y_0 \in \mathcal{U}$ така, що $\mathrm{T}y_0 = y_0$. У цьому разі
$$\|y_0(t)\| \leqslant M\beta(t)\gamma(t), \quad \|y'_0(t)\| \leqslant qM\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{20}$$
Враховуючи (5), задача Коші (1), (2) має ρ-розв'язок $x_0 : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ такий, що
$$x_0(t) = \frac{y_0(t)}{\beta(t)}, \quad t \in (0, \rho],$$
тому
$$\|x_0(t)\| \leqslant M\gamma(t), \quad \|x'_0(t)\| \leqslant QM\frac{\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0, \rho], \tag{21}$$
де $Q > q + \beta_0$. Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. Насамперед оберемо сталі ρ, M, Q, q. Нехай
$$\frac{c_0\sqrt{n}}{\gamma_0} < M < r_1, \quad Q > q + \beta_0,$$
де
$$q > \beta_0 + \gamma_0, \quad (q + \beta_0)M < r_2.$$
Зауважимо, що $\rho \in (0, \tau)$ і ρ достатньо мале. Зазначимо через $\mathcal{B}$ простір всіх неперервно диференційовних функцій $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ з нормою (3). Нехай $\mathcal{U}$ – підмножина $\mathcal{B}$, кожний елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ якої задовольняє умови (4), причому $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$. Множина $\mathcal{U}$ замкнена та обмежена. За допомогою заміни (5) одержимо задачу Коші (6), де $y : (0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ – нова невідома функція. Далі розглядатимемо задачу Коші (8), де $u \in \mathcal{U}$ – довільна фіксована функція. Оберемо $i \in \{1, \dots, n\}$ та будемо розглядати i-те рівняння системи (8), яке записане у формі (9), з початковою умовою (10). Розлядатимемо ті ж множини $\mathcal{D}_{0i}$, Φ_{1i}, $\mathcal{D}_{1i}$, H_i, $\Phi_{2i}(\mu)$, $\mathcal{D}_{2i}(\mu)$ (де μ – параметр, $\mu \in (0, 1]$), що й під час доведення теореми 1. За допомогою міркувань, аналогічних до міркуваннь відповідної частини доведення теореми 1, доведемо, що у рівняння (9) є одна і тільки одна інтегральна крива $J_{iu} : (t, y_{iu}(t))$, яка визначена при $t \in (0, \rho]$ та лежить в $\mathcal{D}_{1i}$ при всіх $t \in (0, \rho]$. У цьому разі виконано оцінки (11). Якщо подати функцію $y_u : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ рівністю (12), то неважко переконатись в тому, що виконані нерівності (13). Нехай $y_u(0) = 0$, $y'_u(0) = 0$. Тоді $y_u \in \mathcal{U}$. Подамо оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ рівністю $Tu = y_u$.

Доведемо, що $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ – оператор стиску. Нехай $u_* \in \mathcal{U}$, $u_{**} \in \mathcal{U}$ – довільні фіксовані функції. Зазначимо $\mathrm{T}u_* = y_*$, $\mathrm{T}u_{**} = y_{**}$; нехай $y_* = \mathrm{col}\Big(y_{1*}, \dots, y_{n*}\Big)$ і $y_{**} = \mathrm{col}\Big(y_{1**}, \dots, y_{n**}\Big)$. Якщо $u_* = u_{**}$, то й $y_* = y_{**}$. Нехай далі $\|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}} = h$,

$h > 0$. Виберемо $i \in \{1, \ldots, n\}$ та будемо досліджувати асимптотичну поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння (14). Зазначимо

$$\Phi_{3i} = \{(t, y_i) : t \in (0, \rho],\ |y_i - y_{i**}(t)| = \eta\omega(t)h\},$$

$$\mathcal{D}_{3i} = \{(t, y_i) : t \in (0, \rho],\ |y_i - y_{i**}(t)| < \eta\omega(t)h\},$$

де η – стала, яку визначають так: якщо $\beta_0 = 0$, то $\eta > \dfrac{l_x}{\Omega_0}$; якщо $\nu_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, то $\eta > \dfrac{l_x + \beta_0 l_y}{\Omega_0}$; якщо $\nu_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, то

$$\frac{l_x + \beta_0 l_y}{\Omega_0} < \eta < \frac{1 - n\nu_0(l_x + \beta_0 l_y)}{n\nu_0\beta_0}.$$

Нехай функція $A_{3i} : \mathcal{D}_{0i} \to [0, +\infty)$ визначається рівністю

$$A_{3i}(t, y_i) = \Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)^2 \Big(\omega(t)\Big)^{-2}$$

та нехай $a_{3i} : \mathcal{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ – похідна функції A_{3i} на підставі рівняння (14). Позаяк

$$a_{3i}(t, y_i) = 2\Big(\omega(t)\Big)^{-3}\omega'(t)\left(\Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)^2\left(\frac{\beta'(t)\omega(t)}{\beta(t)\omega'(t)} - 1\right) + \right.$$

$$+\frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}\frac{\omega(t)}{\omega'(t)}\left(f_i\left(t, \frac{u_*(t)}{\beta(t)}, \frac{u'_*(t)}{\beta(t)} - \frac{u_*(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right) - \right.$$

$$\left.\left. -f_i\left(t, \frac{u_{**}(t)}{\beta(t)}, \frac{u'_{**}(t)}{\beta(t)} - \frac{u_{**}(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right)\right)\Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)\right),$$

причому

$$\frac{\beta'(t)\omega(t)}{\beta(t)\omega'(t)} - 1 = -\frac{1}{t\dfrac{\omega'(t)}{\omega(t)}} \cdot t\frac{\Big(\omega(t)/\beta(t)\Big)'}{\omega(t)/\beta(t)} = -\frac{\Omega_0}{\omega_0} + \xi_1(t),$$

де $\xi_1 : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервна функція; $\lim\limits_{t\to+0} \xi_1(t) = 0$, то неважко переконатися в тому, що $a_{3i}(t, y_i) < 0$ при $(t, y_i) \in \Phi_{3i}$. Звідси випливає (див. [7, с. 758]), що довільна інтегральна крива $J : (t, y_i(t))$ рівняння (14), яка перетинає Φ_{3i}, поблизу точки (t_*, y_{i*}) перетину з Φ_{3i} розташована так: $(t, y_i(t)) \in \mathcal{D}_{3i}$ при $t \in (t_*, t_* + \delta)$ та $(t, y_i(t)) \,\overline{\in}\, \overline{\mathcal{D}}_{3i}$ при $t \in (t_* - \delta, t_*)$ (тут $\delta > 0$ – достатньо мале, $t_* + \delta < \rho$). Крім того,

$$|y_{i*}(t) - y_{i**}(t)| \leqslant |y_{i*}(t)| + |y_{i**}(t)| \leqslant \frac{2M}{\sqrt{n}}\beta(t)\gamma(t) < \eta\omega(t)h,$$

якщо $t \in (0, t(h)]$, де стала $t(h) \in (0, \rho)$ визначається з умови

$$\frac{\beta(t)\gamma(t)}{\omega(t)} < \frac{\eta h\sqrt{n}}{2M} \quad \text{при} \quad t \in (0, t(h)].$$

Тому інтегральна крива $J_* : (t, y_{i*}(t))$ рівняння (14) лежить в $\mathcal{D}_{3i}$ при $t \in (0, t(h)]$. Якщо t зростає від $t = t(h)$ до $t = \rho$, то, на підставі сказаного вище, ця інтегральна крива не зможе мати спільних точок з Φ_{3i}; тому вона розташована в $\mathcal{D}_{3i}$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Це означає, що

$$|y_{i*}(t) - y_{i**}(t)| \leqslant \eta\omega(t)h, \quad t \in (0, \rho]; \tag{22}$$

тому

$$|y'_{i*}(t) - y'_{i**}(t)| \leqslant \Big(\nu_0(\beta_0\eta + l_x + \beta_0 l_y) + \xi_2(t)\Big)h, \quad t \in (0, \rho], \tag{23}$$

де $\xi_2 : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ – неперервна функція, $\lim\limits_{t\to+0} \xi_2(t) = 0$. Нерівності (22), (23) виконуються для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$. Оскільки ρ достатньо мале, то з цих нерівностей випливає, що

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \theta h, \quad t \in (0, \rho],$$

де

$$\theta = \frac{1}{2}\Big(1 + n\nu_0(\beta_0\eta + l_x + \beta_0 l_y)\Big);$$

очевидно, $0 < \theta < 1$. Тому

$$\|y_* - y_{**}\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta h,$$

або, остаточно,

$$\|\mathrm{T}u_* - \mathrm{T}u_{**}\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta\|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}}, \quad \text{де} \quad 0 < \theta < 1.$$

Наведені міркування не залежать від вибору функцій $u_* \in \mathcal{U}$, $u_{**} \in \mathcal{U}$. Отже, $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ – оператор стиску. За принципом Банаха стиснутих відображень існує єдина функція $y_0 \in \mathcal{U}$ така, що $\mathrm{T}y_0 = y_0$. Очевидно, виконані нерівності (20). Враховуючи (5), задача Коші (1), (2) має ρ-розв'язок $x_0 : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ з властивостями (21), та лише єдиний. Теорема 2 доведена.

1. *Андреев А.Ф.* Усиление теоремы единственности O-кривой в N_2 / *Андреев А.Ф.* // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146, №1. – С. 9-10.
2. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / *Арнольд В.И.* – М., 1978.
3. *Витюк А.Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных / *Витюк А.Н.* // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, №9. – С. 1575-1580.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. / *Демидович Б.П.* – М., 1967.
5. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / *Еругин Н.П.* – Минск, 1972.
6. *Еругин Н.П.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. / *Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко П.С. и др.* – К., 1974.
7. *Зернов А.Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши / *Зернов А.Е.* // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, №5. – С. 756-760.
8. *Зернов А.Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши / *Зернов А.Е.* // Укр. мат. журнал. – 2001. – Т. 54, №3. – С. 302-310.
9. *Зернов А.Е.* Геометричний аналіз задачі Коші для неявного диференціального рівняння / *Зернов А.Е., Кузина Ю.В.* // Мат. Студії. – 2008. – Т. 29, №1. – С.63-70.

10. *Зернов А.Е.* Геометрический анализ некоторой сингулярной задачи Коши / *Зернов А.Е., Кузина Ю.В.* // Нелін. коливання. – 2004. – Т. 7, №1. – С. 67-80.
11. *Кигурадзе И.Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / *Кигурадзе И.Т.* // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1, №10. – С. 1271-1291.
12. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / *Кигурадзе И.Т.* – Тбилиси, 1975.
13. *Немыцкий В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений / *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* – М.; Л., 1949.
14. *Рудаков В.П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных / *Рудаков В.П.* // Известия высш. учебн. заведений. Математика. – 1971. – №9. – С. 79-84.
15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / *Хартман Ф.* – М., 1970.
16. *Чечик В.А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью / *Чечик В.А.* // Труды Московск. матем. об-ва. – 1959. – №8. – С. 155-198.
17. *Anichini G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case / *Anichini G., Conti G.* // Differential Equations and Dynamical Systems. – 1999. – Vol. 7, №4. – P. 437-459.
18. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ / *Conti R.* // Ann. mat. pura ed appl. – 1959. – №48. – P. 97-102.
19. *Frigon M.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations / *Frigon M., Kaczynski T.* // J. Math. Anal. and Appl. – 1993. – Vol. 179, №2. – P. 317-326.
20. *Kowalski Z.* The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ / *Kowalski Z.* // Ann. polon. math. – 1963. – Vol. 13, №2. – P. 173-204.
21. *Kowalski Z.* A difference method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ / *Kowalski Z.* // Ann. polon. math. – 1965-1965 – Vol. 16, №2. – P. 121-148.

QUALITATIVE INVESTIGATION OF SOME SINGULAR CAUCHY PROBLEM

Oleksandr ZERNOV[1], Yuliya KUZINA[2]

[1]*K. D. Ushynsky Southukrainian State Pedagogical University,*
65020, Odesa, Staroportofrankivs'ka Str., 26
e-mail: zernov@ukr.net
[2]*Odesa Institute of Finance USUFIS,*
65070, Odesa, 25 Chapayivs'koi dyviziyi Str., 6
e-mail: yuliak@te.net.ua

The singular Cauchy problem for some system of degenerate ordinary differential equations are considered. The theorems about solvability of these problems and about quantity of the solutions to our problems are proved. The asymptotic behaviour of the solution are find if $t \to +0$. In this paper there are two schemes of investigation of these problems.

Key words: singular Cauchy problem, degenerate ordinary differential equations.

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Александр ЗЕРНОВ[1]**, Юлия КУЗИНА**[2]

[1] *Южноукраинский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского, 65020, Одесса, ул. Старопортофранковская, 26*
e-mail: zernov@ukr.net
[2] *Одесский институт финансов УГУФМТ, 65070, Одесса, ул. 25-й Чапаевской дивизии, 6*
e-mail: yuliak@te.net.ua

Исследуется сингулярная задача Коши для одной системы обычных дифференциальных уравнений с вырождением. Предлагается две схемы изучения вопроса разрешимости этой задачи и количества её решений. Кроме того, рассматривается ассимптотическое поведение решений при $t \to +0$.

Ключевые слова: сингулярная задача Коши, дифференциальные уравнения с вырождением.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2009

Прийнята до друку 12.06.2009