ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 68–78 *Is. 70. P. 68–78*

УДК 519.212

ЕРГОДИЧНІ РОЗПОДІЛИ ДЛЯ ДЕЯКИХ МОДИФІКАЦІЙ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ M/M/1/m

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: zyurvas@meta.ua

Для системи обслуговування M/M/1/m, в якій відбувається блокування вхідного потоку від моменту початку другого обслуговування поспіль до моменту звільнення системи, розглянуто випадки: 1) перерви в роботі неможливі (задача I); 2) після n обслуговувань поспіль оголошується перерва в роботі системи (задача II). Для задачі I та для задачі II у випадках $m \in [n, 2n]$; $m = n - 1$; $n = 1$ одержано ергодичні розподіли ймовірностей станів системи та довжини черги, а для $m \geqslant n$ побудовано алгоритм для визначення ергодичного розподілу. У випадку відсутності обмежень на довжину черги (система обслуговування M/M/1/∞) з'ясовано умови існування ергодичного процесу для задачі I та для задачі II при $n = 1$. Запропоновано алгоритм знаходження ергодичного розподілу для узагальнення задачі I, коли блокування вхідного потоку триває від моменту початку $(n+1)$-го обслуговування поспіль.

Ключові слова: система обслуговування M/M/1/m, блокування вхідного потоку, перерви в роботі, ергодичний розподіл імовірностей.

1. Вступ. В [1, 2] вивчали системи обслуговування типу M/G/1/m з обмеженою чергою та блокуванням вхідного потоку. Якщо довжина черги досягає числа m, то надходження замовлень у систему блокується і відновлюється лише тоді, коли довжина черги зменшиться до деякого порогового рівня $l \in [0, m-1]$. У статті [3] розглянуто систему M/G/1/m, особливістю якої є те, що після n обслуговувань поспіль оголошується вимушена перерва в роботі системи. Необхідність такої перерви може бути зумовлена технологічними або іншими причинами. Наприклад, технічний пристрій, який послідовно виконує однорідні операції, час початку і тривалість кожної з яких залежить від випадкових чинників, під час проектування може бути розрахований на обмежену кількість операцій, які виконуються без перерви між операціями.

Нижче запропоновано інші модифікації системи обслуговування M/M/1/m, пов'язані з блокуванням вхідного потоку й оголошенням перерви в роботі системи після n обслуговувань поспіль. Блокування вхідного потоку замовлень триває від моменту початку другого обслуговування поспіль аж до звільнення системи від замовлень. Ми розглянемо два варіанти формулювання задачі для системи M/M/1/m з таким блокуванням вхідного потоку: 1) перерви в роботі неможливі; 2) після n обслуговувань поспіль оголошується перерва в роботі системи, під час якої також відбувається блокування вхідного потоку. Вивчимо узагальнення першої задачі, яке полягає в тому, що блокування вхідного потоку триває від моменту початку $(n+1)$-го обслуговування поспіль.

2. Система з блокуванням вхідного потоку. Розглянемо одноканальну систему обслуговування, для якої довжина черги не може перевищувати числа m. Замовлення в систему надходять по одному, а проміжки часу між моментами надходження замовлень і тривалості обслуговування одного замовлення – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковими законами з параметрами λ і μ, відповідно.

Замовлення надходять до системи, коли вона вільна, а також під час першого обслуговування після стану простою системи, якщо довжина черги не перевищує числа m.

Введемо подвійну нумерацію станів системи: s_{kl} – стан k рівня l. Тут k $(k = \overline{0, m+1})$ – кількість замовлень, що перебувають у системі; значення l $(l = \overline{1, m+1})$ відповідають тим станам системи, коли обслуговується l-те за порядком замовлення після періоду простою системи; s_{01} – стан, коли система вільна. Стан s_{01} умовно віднесений до групи станів першого рівня, завдяки чому стаціонарні ймовірності, що відповідають станам s_{kl} $\left(k = \overline{0,\ m}\right)$, ми зможемо записати одною формулою (див. співвідношення (4)).

Нехай $p_{kl}(t)$ – імовірність того, що система в момент часу t перебуває у стані s_{kl}. Очевидно (див., наприклад, [4, с. 69], [5, с. 61]), що існують границі

$$p_{kl} = \lim_{t\to\infty} p_{kl}(t) \qquad \left(k = \overline{0,\ m+1};\quad l = \overline{1,\ m+1}\,\right).$$

Користуючись графом станів системи, запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_{kl}

$$\begin{gathered}
\mu \sum_{k=1}^{m+1} p_{1k} - \lambda p_{01} = 0; \qquad \lambda p_{k-1,1} - (\lambda+\mu) p_{k1} = 0 \quad \left(k = \overline{1,\ m}\right); \\
\lambda p_{m1} - \mu p_{m+1,1} = 0; \\
\mu \left(p_{k+1,\,l} - p_{k,\,l+1}\right) = 0 \qquad \left(l = \overline{1,\ m};\quad k = \overline{1,\ m-l+1}\,\right).
\end{gathered} \tag{1}$$

Вигляд рівнянь (1) дає змогу виразити всі ймовірності, що відповідають станам рівнів $l \geqslant 2$, через імовірності станів першого рівня p_{k1}

$$p_{kl} = p_{k+l-1,1} \quad \left(l = \overline{2,\ m+1};\quad k = \overline{1,\ m-l+2}\,\right). \tag{2}$$

Система для ймовірностей p_{k1} разом з нормувальною умовою матиме вигляд

$$\begin{gathered} p_{01} = \beta \sum_{k=1}^{m+1} p_{k1}; \quad p_{k-1,1} = (1+\beta) p_{k1} \quad \left(k = \overline{1,\ m}\right); \\ p_{m1} = \beta p_{m+1,1}; \quad p_{01} + \sum_{k=1}^{m+1} k p_{k1} = 1, \end{gathered} \tag{3}$$

де $\beta = \mu/\lambda$. За допомогою рівнянь (3) маємо змогу виразити всі ймовірності p_{k1} через $p_{m+1,1}$

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{0,\ m}\ \right). \tag{4}$$

Імовірність $p_{m+1,1}$ знайдемо після підстановки правих частин співвідношень (4) у нормувальну умову

$$p_{m+1,1} = \frac{\beta}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1}. \tag{5}$$

Рівності (2), (4), (5) цілковито визначають ергодичний розподіл імовірностей станів s_{kl}.

Використовуючи цей розподіл, можна знайти ергодичний розподіл довжини черги у системі. Позначимо через π_k стаціонарну ймовірність того, що довжина черги дорівнює k ($k = \overline{0, m}$). Тоді

$$\begin{gathered} \pi_0 = \sum_{k=0}^{m+1} p_{k1} = (1+\beta)^{m+1} p_{m+1,1} = \frac{\beta(1+\beta)^{m+1}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1}; \\ \pi_k = \sum_{s=k+1}^{m+1} p_{s1} = (1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} = \frac{\beta(1+\beta)^{m-k}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1} \quad \left(k = \overline{1,\ m}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Середню довжину черги визначаємо як математичне сподівання дискретної випадкової величини

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{m} k \pi_k = \frac{(1+\beta)^{m+1} - (m+1)\beta - 1}{\beta\big((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1\big)}. \tag{7}$$

Стаціонарне значення ймовірності обслуговування замовлення, що надійшло на вхід системи, обчислимо як суму ймовірностей тих станів, коли вхідний потік не заблокований

$$P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{m} p_{k1} = \frac{\beta\big((1+\beta)^{m+1} - 1\big)}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1}. \tag{8}$$

Перейшовши до границі при $m \to \infty$ у співвідношеннях (4)–(8), одержимо ергодичні розподіли $\{p_{kl}\}$ і $\{\pi_k\}$ та відповідні формули для середньої довжини черги і ймовірності обслуговування для системи M/M/1/∞ з блокуванням вхідного потоку

$$p_{k1} = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^k(\beta^2+\beta+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$
$$p_{kl} = p_{k+l-1,1} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ l = 2, 3, \ldots);$$
$$\pi_0 = \frac{\beta(1+\beta)}{\beta^2+\beta+1}; \quad \pi_k = \frac{\beta}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^k} \quad (k = 1, 2, \ldots);$$
$$\overline{r} = \frac{1+\beta}{\beta(\beta^2+\beta+1)}; \quad P_{\text{обс}} = \frac{\beta(1+\beta)}{\beta^2+\beta+1}.$$

Зауважимо, що ергодичний процес для системи M/M/1/∞ з блокуванням вхідного потоку існує для будь-яких значень β на відміну від звичайної системи M/M/1/∞, для якої він існує лише при $\beta > 1$.

3. Система з блокуванням вхідного потоку та вимушеними перервами в роботі після n обслуговувань поспіль. У формулювання попередньої задачі внесемо лише одну зміну: після n обслуговувань поспіль у роботі системи оголошується перерва, яка триває протягом випадкового часу, розподіленого за показниковим законом з параметром γ.

Замовлення, які на момент оголошення перерви перебувають у черзі, залишаються в системі і чекають на відновлення обслуговування. Новоприбулі замовлення під час перерви отримують відмову навіть за наявності вільних місць у черзі. Блокування вхідного потоку замовлень відбувається за таких самих умов як у попередній задачі, тому задача має сенс лише при $m \geqslant n-1$. Інакше, кількість замовлень, обслужених поспіль завжди менша за n.

Збережемо введену вище нумерацію станів системи, додатково позначивши через $s_{k,n+1}$ $\left(k = \overline{0,\ m-n+1}\right)$ стани системи під час вимушеної перерви. Отже, стан $s_{k,n+1}$ означає, що під час перерви у системі є k замовлень, які очікують на відновлення обслуговування.

Спочатку припустимо, що $m \geqslant n$, $n \geqslant 2$, і запишемо систему рівнянь для стаціонарних імовірностей p_{kl}

$$\begin{gathered}
\mu\sum_{k=1}^{n-1} p_{1k} + \gamma p_{0,n+1} - \lambda p_{01} = 0;\\
\lambda p_{k-1,1} + \gamma p_{k,n+1} - (\lambda+\mu)p_{k1} = 0 \qquad \left(k = \overline{1,\ m-n+1}\right);\\
\lambda p_{k-1,1} - (\lambda+\mu)p_{k1} = 0 \qquad \left(k = \overline{m-n+2,\ m}\right); \quad \lambda p_{m1} - \mu p_{m+1,1} = 0;\\
\mu\left(p_{k+1,l} - p_{k,l+1}\right) = 0 \qquad \left(l = \overline{1,\ n-1};\quad k = \overline{1,\ m-l+1}\ \right);\\
\mu p_{k+1,n} - \gamma p_{k,n+1} = 0 \qquad \left(k = \overline{0,\ m-n+1}\ \right).
\end{gathered} \tag{9}$$

Рівняння (9) дають змогу виразити ймовірності станів вищих рівнів ($l \geqslant 2$) через імовірності станів першого рівня p_{k1}

$$\begin{gathered}
p_{kl} = p_{k+l-1,1} \quad \left(l = \overline{2,\ n};\quad k = \overline{1,\ m-l+2}\ \right);\\
p_{k,n+1} = \delta p_{k+n,1} \quad \left(k = \overline{0,\ m-n+1}\ \right),
\end{gathered} \tag{10}$$

де $\delta = \mu/\gamma$. Система рівнянь для ймовірностей p_{k1} набуває вигляду

$$p_{01} = \beta \sum_{k=1}^{n} p_{k1}; \quad p_{k1} = p_{k-1,1} + \beta(p_{k+n,1} - p_{k1}) \quad \left(k = \overline{1,\ m-n+1}\,\right); \tag{11}$$

$$p_{k-1,1} = (1+\beta)p_{k1} \quad \left(k = \overline{m-n+2,\ m}\,\right); \quad p_{m1} = \beta p_{m+1,1}; \tag{12}$$

$$p_{01} + \sum_{k=1}^{n-1} kp_{k1} + (n+\delta) \sum_{k=n}^{m+1} p_{k1} = 1, \tag{13}$$

де, як і вище, $\beta = \mu/\lambda$, а (13) – нормувальна умова.

За допомогою рівнянь (12) маємо змогу виразити ймовірності p_{k1} $\left(k = \overline{m-n+1,\ m}\right)$ через $p_{m+1,1}$

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{m-n+1,\ m}\,\right). \tag{14}$$

Зі співвідношень (11) послідовно отримуємо

$$p_{k1} = \beta \sum_{s=1}^{n} p_{k+s,1} \qquad \left(k = \overline{0,\ m-n}\,\right). \tag{15}$$

Використовуючи рівності (14), за допомогою співвідношень (15), починаючи від $p_{m-n,1}$ і далі рухаючись за спаданням індексу k, можна послідовно виразити ймовірності p_{k1} $\left(k = \overline{0,\ m-n}\right)$ через $p_{m+1,1}$. Для обчислення $p_{m+1,1}$ слугує нормувальна умова (13). Отже, для будь-яких значень m і n, якщо лише $m \geqslant n$, маємо алгоритм для визначення ергодичного розподілу $\{p_{kl}\}$ $\left(k = \overline{0,\ m+1};\ \ l = \overline{1,\ n+1}\,\right)$.

Нижче детальніше розглянемо такі випадки співвідношень між m і n, коли вдається знайти ергодичний розподіл у явному вигляді.

3.1. Випадок $n \leqslant m \leqslant 2n$. З (15) і (14) одержуємо

$$p_{m-n,1} = \beta \sum_{k=m-n+1}^{m} p_{k1} = \beta^2(1+\beta)^m p_{m+1,1} \sum_{k=m-n+1}^{m} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k =$$
$$= \beta\big((1+\beta)^n - 1\big)p_{m+1,1};$$
$$p_{m-n-1,1} = \beta \sum_{k=m-n}^{m-1} p_{k1} = \beta p_{m-n,1} + \beta \sum_{k=m-n+1}^{m-1} p_{k1} =$$
$$= \Big(\beta^2\big((1+\beta)^n - 1\big) + \beta(1+\beta)\big((1+\beta)^{n-1} - 1\big)\Big)p_{m+1,1};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_{m-n-k,1} = \bigg(\beta^2(1+\beta)^{k-1} \sum_{s=0}^{k-1}\big((1+\beta)^{n-s} - 1\big) +$$
$$+ \beta(1+\beta)^k\big((1+\beta)^{n-k} - 1\big)\bigg)p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{1,\ m-n}\,\right).$$

Після обчислення скінченних сум і заміни індексів остаточно отримаємо

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{m-n-k-1} \times$$
$$\times\big((1+\beta)^{n+1} - (m-n-k+1)\beta - 1\big)p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{0,\ m-n}\,\right). \tag{16}$$

Формули (16) правильні лише для $n \leqslant m \leqslant 2n$. Якщо $m > 2n$, то $m - n > n$ і під час обчислення p_{k1} для $k < m - 2n$ за формулами (15) не використовуються ймовірності p_{k1} $\left(k = \overline{m-n+1,\ m}\right)$, для визначення яких слугують співвідношення (14). Тому в цьому випадку конструкція p_{k1} для $k < m - 2n$ інша, ніж для $k = \overline{m-2n,\ m-n}$. Отже, якщо $m > 2n$, то формулами (16) можна користуватися лише для $k = \overline{m-2n,\ m-n}$.

Підставивши праві частини рівностей (14) і (16) у нормувальну умову (13), яку для зручності обчислень потрібно записати у вигляді

$$p_{01} + \sum_{k=1}^{m-n} k p_{k1} + \sum_{k=m-n+1}^{n-1} k p_{k1} + (n+\delta) \sum_{k=n}^{m+1} p_{k1} = 1,$$

знайдемо ймовірність $p_{m+1,1}$

$$\begin{gathered} p_{m+1,1} = \frac{\beta}{A_{mn}(\beta,\delta)}, \\ A_{mn}(\beta,\delta) = (\beta^2+\beta+1)\big((1+\beta)^m - (m-n)\beta(1+\beta)^{m-n-1}\big) + \\ +\beta(\delta-1)(1+\beta)^{m-n+1} - 1. \end{gathered} \tag{17}$$

Отже, співвідношення (10), (14), (16) і (17) цілковито визначають ергодичний розподіл імовірностей станів s_{kl} для системи з блокуванням вхідного потоку і перервами в роботі після n обслуговувань поспіль для випадку, коли $n \leqslant m \leqslant 2n$.

Знайдемо ергодичний розподіл довжини черги в системі і середню довжину черги

$$\pi_0 = \sum_{k=0}^{n} p_{k1} + \delta p_{n1} = \frac{1+\beta}{\beta} p_{01} + \delta p_{n1} =$$

$$= (1+\beta)^{m-n}\big((1+\beta)^{n+1} - (m-n+1-\delta)\beta - 1\big) p_{m+1,1};$$

$$\pi_k = \sum_{s=k+1}^{k+n} p_{s1} + \delta p_{k+n,1} = \frac{1}{\beta} p_{k1} + \delta p_{k+n,1} = (1+\beta)^{m-n-k-1} \times$$

$$\times\big((1+\beta)^{n+1} - (m-n-k+1)\beta + \delta\beta(1+\beta) - 1\big) p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{1,\ m-n}\right);$$

$$\pi_{m-n+1} = \sum_{k=m-n+2}^{m+1} p_{k1} + \delta p_{m+1,1} =$$

$$= \frac{1}{\beta} p_{m-n+1,1} + \delta p_{m+1,1} = \big((1+\beta)^{n-1} + \delta\big) p_{m+1,1};$$

$$\pi_k = \sum_{s=k+1}^{m+1} p_{s1} = (1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{m-n+2,\ m}\right);$$

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{m} k\pi_k = \Bigg((1+\beta)^{m+1} - \big((m-n)\beta - 1\big)(1+\beta)^{m-n} +$$

$$+\delta\beta\big((1+\beta)^{m-n+1} - 1\big) - (m+1)\beta - 2\Bigg) \frac{p_{m+1,1}}{\beta^2}.$$

Стаціонарне значення ймовірності обслуговування визначаємо як суму ймовірностей станів s_{k1} $(k=\overline{0,m})$

$$P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{m} p_{k1} = \frac{\beta}{A_{mn}(\beta,\delta)}\big((1+\beta)^{m+1} - (m-n+1)\beta(1+\beta)^{m-n} - 1\big).$$

3.2. Випадок $m = n-1$. На відміну від випадку $m \geqslant n$ тут існує лише один стан рівня $n+1$, це – стан $s_{0,n+1}$, тому система рівнянь (9) спрощується до вигляду

$$\mu\sum_{k=1}^{n-1} p_{1k} + \gamma p_{0,n+1} - \lambda p_{01} = 0;$$
$$\lambda p_{k-1,1} - (\lambda+\mu)p_{k1} = 0 \quad \big(k=\overline{1,\ n-1}\big); \quad \lambda p_{n-1,1} - \mu p_{n1} = 0;$$
$$\mu\,(p_{k+1,\,l} - p_{k,\,l+1}) = 0 \quad \big(l=\overline{1,\ n-1};\ \ k=\overline{1,\ n-l}\ \big); \quad \mu p_{1n} - \gamma p_{0,n+1} = 0.$$

Як і раніше, виражаємо ймовірності станів вищих рівнів $(l \geqslant 2)$ через p_{k1}

$$p_{kl} = p_{k+l-1,1} \quad \big(l=\overline{2,\ n};\ \ k=\overline{1,\ n-l+1}\ \big); \quad p_{0,n+1} = \delta p_{n,1} \tag{18}$$

і записуємо систему рівнянь для ймовірностей p_{k1} разом з нормувальною умовою

$$p_{01} = \beta\sum_{k=1}^{n} p_{k1}; \quad p_{k-1,1} = (1+\beta)p_{k1} \quad \big(k=\overline{1,\ n-1}\ \big);$$
$$p_{n-1,1} = \beta p_{n1}; \quad p_{01} + \sum_{k=1}^{n-1} k p_{k1} + (n+\delta)p_{n1} = 1. \tag{19}$$

Розв'язавши систему (19), отримуємо

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{n-k-1}p_{n1} \quad \big(k=\overline{0,\ n-1}\ \big);$$
$$p_{n1} = \frac{\beta}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1}+\delta\beta-1}. \tag{20}$$

Користуючись співвідношеннями (18), (20), знаходимо ергодичний розподіл довжини черги і стаціонарні значення середньої довжини черги та ймовірності обслуговування

$$\pi_0 = \sum_{k=0}^{n} p_{k1} + \delta p_{n1} = \frac{\beta\big((1+\beta)^n+\delta\big)}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1}+\delta\beta-1};$$
$$\pi_k = \sum_{s=k+1}^{n} p_{s1} = \frac{\beta(1+\beta)^{n-k-1}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1}+\delta\beta-1} \quad \big(k=\overline{1,\ n-1}\big); \tag{21}$$

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{n-1} k\pi_k = \frac{(1+\beta)^n - n\beta - 1}{\beta\big((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1}+\delta\beta-1\big)};$$
$$P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k1} = \frac{\beta\big((1+\beta)^n-1\big)}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1}+\delta\beta-1}. \tag{22}$$

У випадку $m = n-1$ граф станів системи обслуговування, яку ми розглядаємо, відрізняється від графа станів системи з блокуванням вхідного потоку, вивченої у п. 2, лише наявністю додаткового стану $s_{0,n+1}$, який відповідає перерві після n обслуговувань поспіль. Тому, прийнявши $n = m + 1$, $\delta = 0$ у формулах (20) – (22), отримуємо співвідношення (4) – (8).

3.3. Випадок $n = 1$. У такій системі перерва настає після кожного обслуговування. Цей випадок заслуговує окремого розгляду, тому що має свою специфіку, яка дає змогу отримати формули для ергодичного розподілу ймовірностей станів для всіх m $(1 \leqslant m \leqslant \infty)$.

Запишемо систему рівнянь для визначення стаціонарних імовірностей p_{kl}:

$$\gamma p_{02} - \lambda p_{01} = 0; \quad \lambda p_{k-1,1} + \gamma p_{k2} - (\lambda + \mu) p_{k1} = 0 \quad \big(k = \overline{1,\ m}\big);$$
$$\lambda p_{m1} - \mu p_{m+1,1} = 0; \quad \mu p_{k+1,1} - \gamma p_{k2} = 0 \quad \big(k = \overline{0,\ m}\big).$$

Виразивши ймовірності станів другого рівня за формулами

$$p_{k2} = \delta p_{k+1,1} \quad \big(k = \overline{0,\ m}\big),$$

отримуємо співвідношення

$$p_{k1} = \beta p_{k+1,1} \quad \big(k = \overline{0,\ m}\big),$$

звідки маємо

$$p_{k1} = \beta^{m-k+1} p_{m+1,1} \quad \big(k = \overline{0,\ m}\big). \tag{23}$$

Використовуючи нормувальну мову

$$p_{01} + (1 + \delta) \sum_{k=1}^{m+1} p_{k1} = 1$$

і відокремлюючи випадки $\beta \neq 1$ та $\beta = 1$, знаходимо

$$p_{m+1,1} = \frac{\beta - 1}{\beta^{m+2} + \delta(\beta^{m+1} - 1) - 1}, \quad \beta \neq 1;$$
$$p_{k1} = \frac{1}{1 + (m+1)(1+\delta)} \quad \big(k = \overline{0,\ m+1}\big), \quad \beta = 1. \tag{24}$$

Тепер маємо змогу обчислити ергодичний розподіл довжини черги і стаціонарні значення середньої довжини черги та ймовірності обслуговування

$$\pi_0 = p_{01} + (1+\delta) p_{11} = \frac{\beta^m (\beta - 1)(1 + \beta + \delta)}{\beta^{m+2} + \delta(\beta^{m+1} - 1) - 1}, \quad \beta \neq 1;$$
$$\pi_k = (1+\delta) p_{k+1,1} = \frac{\beta^{m-k}(1+\delta)(\beta - 1)}{\beta^{m+2} + \delta(\beta^{m+1} - 1) - 1} \quad \big(k = \overline{1,\ m}\big), \quad \beta \neq 1; \tag{25}$$
$$\pi_0 = \frac{2 + \delta}{1 + (m+1)(1+\delta)}, \quad \pi_k = \frac{1 + \delta}{1 + (m+1)(1+\delta)} \quad \big(k = \overline{1,\ m}\big), \quad \beta = 1;$$

$$
\begin{gathered}
\overline{r}=\sum_{k=1}^{m}k\pi_k=\frac{(1+\delta)\big(\beta^{m+1}-(m+1)\beta+m\big)}{(\beta-1)\big(\beta^{m+2}+\delta(\beta^{m+1}-1)-1\big)},\quad \beta\neq 1;\\
\overline{r}=\frac{m(m+1)(1+\delta)}{2\big(1+(m+1)(1+\delta)\big)},\quad \beta=1;\\
P_{\text{обс}}=\sum_{k=0}^{m}p_{k1}=\frac{\beta(\beta^{m+1}-1)}{\beta^{m+2}+\delta(\beta^{m+1}-1)-1},\quad \beta\neq 1;\\
P_{\text{обс}}=\frac{m+1}{1+(m+1)(1+\delta)},\quad \beta=1.
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Перейшовши до границі при $m\to\infty$ у співвідношеннях (23)-(26), переконуємось, що ергодичний розподіл у випадку відсутності обмежень на довжину черги ($m=\infty$) існує лише за умови, що $\beta>1$. Тоді маємо

$$
\begin{gathered}
p_{k1}=\frac{\beta-1}{\beta^k(\beta+\delta)},\quad p_{k2}=\delta p_{k+1,1}\quad (k=0,1,2,\ldots)\,;\\
\pi_0=\frac{(\beta-1)(1+\beta+\delta)}{\beta(\beta+\delta)}\,;\qquad \pi_k=\frac{(\beta-1)(1+\delta)}{\beta^{k+1}(\beta+\delta)}\quad (k=1,2,\ldots)\,;\\
\overline{r}=\frac{1+\delta}{(\beta-1)(\beta+\delta)}\,;\qquad P_{\text{обс}}=\frac{\beta}{\beta+\delta}.
\end{gathered}
$$

У п. 2 ми бачили, що ергодичний процес для системи M/M/1/∞ з блокуванням вхідного потоку існує для будь-яких значень β. Цю систему можемо отримати внаслідок граничного переходу при $n\to\infty$ і $m\to\infty$ у системі з блокуванням вхідного потоку і перервами в роботі після n обслуговувань поспіль. Тому є підстави прогнозувати, що для системи M/M/1/∞ з блокуванням вхідного потоку і перервами в роботі після n обслуговувань поспіль за достатньо великих значень n можливе існування ергодичного процесу навіть при $\beta\leqslant 1$. Якщо $\beta>1$, то він безумовно існує для всіх $n\geqslant 1$.

4. Блокування вхідного потоку після n обслуговувань поспіль. Узагальнимо формулювання задачі, вивченої у п. 2, припустивши, що блокування вхідного потоку триває від моменту початку $(n+1)$-го обслуговування поспіль до звільнення системи.

Запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_{kl}

$$
\begin{gathered}
\mu\sum_{k=1}^{m+n}p_{1k}-\lambda p_{01}=0;\qquad \lambda p_{k-1,1}-(\lambda+\mu)p_{k1}=0\quad \big(k=\overline{1,\ m}\big)\,;\\
\lambda p_{m1}-\mu p_{m+1,1}=0;
\end{gathered}
\tag{27}
$$

$$
\begin{gathered}
\mu p_{2l}-(\lambda+\mu)p_{1,\,l+1}=0\quad \big(l=\overline{1,\ n-1}\big)\,;\\
\lambda p_{k-1,l}+\mu p_{k+1,l-1}-(\lambda+\mu)p_{kl}=0\quad \big(k=\overline{2,\ m};\ \ l=\overline{2,\ n}\ \big)\,;\\
\lambda p_{ml}-\mu p_{m+1,\,l}=0\quad \big(l=\overline{2,\ n}\big)\,;
\end{gathered}
\tag{28}
$$

$$
\mu\left(p_{k+1,\,l}-p_{k,\,l+1}\right)=0\qquad \big(l=\overline{n,\ m+n-1};\ \ k=\overline{1,\ m+n-l}\ \big)\,.
\tag{29}
$$

Рівняння (29) дають змогу виразити всі ймовірності, що відповідають станам рівнів $l\geqslant n+1$, через імовірності станів n-го рівня p_{kn}

$$p_{kl} = p_{k+l-n,\,n} \quad \left(l = \overline{n+1,\ m+n};\quad k = \overline{1,\ m+n-l+1}\ \right),$$

тому нормувальна умова для системи рівнянь (27) – (29) набуває вигляду

$$p_{01} + \sum_{k=1}^{m+1} \left(p_{k1} + kp_{kn} \right) + \sum_{l=2}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{m+1} p_{kl} \right) = 1. \tag{30}$$

За допомогою рівнянь (27) виражаємо всі ймовірності p_{k1} через $p_{m+1,1}$

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{0,\ m}\ \right),$$

а рівняння (28) перепишемо у вигляді

$$\begin{gathered} p_{1,\,l+1} = \frac{\beta}{1+\beta}\, p_{2l} \qquad \left(l = \overline{1,\ n-1}\ \right); \\ p_{kl} = \frac{1}{1+\beta}\, p_{k-1,\,l} + \frac{\beta}{1+\beta}\, p_{k+1,\,l-1} \qquad \left(k = \overline{2,\ m};\quad l = \overline{2,\ n}\ \right); \\ p_{m+1,\,l} = \frac{1}{\beta}\, p_{ml} \qquad \left(l = \overline{2,\ n}\ \right). \end{gathered} \tag{31}$$

Рекурентні співвідношення (31) дають змогу послідовно виразити всі ймовірності p_{kl} рівнів $l = \overline{2,\ n}$ через $p_{m+1,1}$. Для визначення ергодичного розподілу $\{p_{kl}\}$ залишається лише використати нормувальну умову (30) і знайти $p_{m+1,1}$.

---

1. *Takagi H.* Analysis of finite-capacity M/G/1 queue with a resume level // Performance Evaluation. – 1985. – Vol. 5, №3. – P. 197-203.
2. *Братійчук А.М.* Граничні теореми для системи типу $M^{\theta}/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку // Укр. матем. журн. – 2007. – Т. 59, №7. – С. 884-889.
3. *Єлейко Я.* Стаціонарний розподіл імовірностей станів для одноканальної системи масового обслуговування з вимушеними перервами в роботі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 82-92.
4. *Жерновий Ю.В.* Марковські моделі масового обслуговування: Тексти лекцій. – Львів, 2004.
5. *Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М., 1983.

ERGODIC DISTRIBUTIONS FOR CERTAIN MODIFICATIONS OF THE M/M/1/m QUEUEING SYSTEM

Yuriy ZHERNOVYI

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: zyurvas@meta.ua

For the M/M/1/m queueing system with blocking of an input flow from the moment of the beginning of the second service in a row to the moment of free system such cases are examined: 1) breaks in work are impossible (problem I); 2) after n services in a row a break in work of system occurs (problem II). For the problem I and for the problem II as $m \in [n, 2n]$; $m = n - 1$; $n = 1$ ergodic distributions of probabilities of states of system and of length of queue are obtained, and for $m \geqslant n$ an algorithm for finding of ergodic distribution is constructed. In the case of the M/M/1/∞ system conditions of existence of ergodic process for the problem I and for the problem II as $n = 1$ are defined. An algorithm for finding of ergodic distribution for generalized problem I, when blocking of an input flow continues from the start of $(n+1)$-th service in a row is offered.

Key words: M/M/1/m queueing system, blocking of an input flow, breaks in work, ergodic distribution of probabilities.

ЭРГОДИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ M/M/1/m

Юрий ЖЕРНОВЫЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: zyurvas@meta.ua

Для системы обслуживания M/M/1/m, в которой осуществляется блокирование входного потока от момента начала второго обслуживания подряд до момента освобождения системы, рассмотрены случаи: 1) перерывы в работе невозможны (задача I); 2) после n обслуживаний подряд объявляется перерыв в работе системы (задача II). Для задачи I и для задачи II в случаях $m \in [n, 2n]$; $m = n - 1$; $n = 1$ получены эргодические распределения вероятностей состояний системы и длины очереди, а для $m \geqslant n$ построен алгоритм для определения эргодического распределения. В случае отсутствия ограничений на длину очереди (система обслуживания M/m/1/∞) определены условия существования эргодического процесса для задачи I и для задачи II при $n = 1$. Предложен алгоритм нахождения эргодического распределения для обобщения задачи I, когда блокирование входного потока длится от момента начала $(n+1)$-го обслуживания подряд.

Ключевые слова: система обслуживания M/M/1/m, блокирование входного потока, перерывы в работе, эргодическое распределение вероятностей.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2009

Прийнята до друку 12.06.2009