ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 70. С. 38–44
VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 70. P. 38–44

УДК 519.8, 336.761.6

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗШИРЕНОГО ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ

Микола БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

У рамках нечітко-множинної теорії запропоновано метод розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю.

Ключові слова: розширений фондовий портфель, опціони, хеджування.

1. Вступ. Звичайною інвестиційною практикою в розвинутих країнах є розміщення коштів на фондовому ринку, оскільки сьогодні це більш вигідно, ніж інвестування, наприклад, у нерухомість. Така тенденція притаманна і фондовому ринку України, який, певною мірою, вже сформувався і перебуває в стадії інтенсивного розвитку й удосконалення.

Відомо, що вкладання коштів в цінні папери достатньо ризикована фінансова операція. Однак, формуючи портфель цінних паперів, можна практично звести до нуля його несистематичний ризик: якщо деякі типи компонент портфеля матимуть низьку дохідність, то інші типи можуть певною мірою компенсувати втрати інвестора. Чим більш диверсифікований фондовий портфель ризикових цінних паперів, тим менший його рівень несистематичного ризику. Оптимальну диверсифікацію портфеля можна провести, зокрема класичними методами Марковіца [1] або Шарпа [2].

Значно складнішою є задача зменшення систематичного ризику фондового портфеля, який породжується невизначеністю зовнішнього середовища. Цього ризику практично неможливо уникнути, однак зменшити його рівень можна шляхом хеджування (або форсування) компонент портфеля ризикових цінних паперів похідними цінними паперами (деривативами), зокрема опціонами. Такі фондові портфелі умовно називають розширеними. Стосовно таких портфелів можна формулювати задачу про оптимальний вибір не тільки часткового співвідношення його компонент, а й глибини хеджування (або форсування) кожної ризикової компоненти опціонами.

Якщо дохідності компонент портфеля вважати випадковими величинами з відомими ймовірнісними розподілами, то щільність розподілу дохідності портфеля можна знайти, наприклад, відомим чисельним методом Монте-Карло. Однак цей метод передбачає громіздку обчислювальну процедуру – десятки тисяч операцій на одну точку межі ефективності портфеля. Для об'ємних розширених фондових портфелів чисельне розв'язування задачі оптимізації займає невиправдано багато оперативного часу.

Одним з можливих варіантів виходу з цієї ситуації є модельна зміна способу врахування невизначеності під час формулювання задачі оптимізації: перехід від випадкових величин до нечітких величин у рамках нечітко-множинної теорії [3]. Зокрема, в [4] в рамках цієї теорії запропонований чисельний метод розв'язування задачі про оптимізацію фондового портфеля акцій, хеджованого put-опціонами. В основу цього методу покладено ітераційний вибір часткового співвідношення компонент розширеного фондового портфеля з наступним уточненням глибини хеджування кожної ризикової компоненти опціонами.

В рамках нечітко-множинної теорії ми пропонуємо один з можливих варіантів зведення задачі про оптимізацію фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю, до еквівалентної задачі математичного програмування. Це дає змогу (в загальному випадку на підставі методу дефазифікації [5]) ефективно використовувати стандартні прикладні пакети для розв'язування таких задач оптимізації.

2. Формулювання нечіткої задачі оптимізації та схема її розв'язування. Нехай інвестор хоче сформувати фондовий портфель з n типів акцій і не планує змінювати цей портфель протягом деякого періоду T. Позначимо через x_i $(i=\overline{1,n})$ – відносну частку акції i-го типу в портфелі, а через r_i $(i=\overline{1,n})$ – фінальну дохідність акції i-го типу в момент часу T.

На підставі експертних даних відомо, що ринкова ціна компонент портфеля в межах періоду T може знизитися, тому інвестор хеджує кожну акцію put-опціонами європейського стилю з терміном дії T на глибину $\delta_i \in [0,1]$ $(i=\overline{1,n})$: якщо $\delta_i=0$, хеджування немає (опціону на акцію i-го типу немає), якщо $\delta_i=1$, то акція i-го типу хеджована повністю (хеджована кожна грошова одиниця вартості акції).

Отже, в зазначених умовах інвестор формує розширений фондовий портфель, який складається з n типів акцій і n наборів put-опціонів. Позначимо через x_i $(i=\overline{n+1,2n})$ – відносну частку збірки "акція $(i-n)$-го типу – put-опціон з i-го набору, який повністю хеджує цю акцію, а через r_i $(i=\overline{n+1,2n})$ – фінальну дохідність цієї збірки в момент часу T. Всього розширений портфель містить $2n$ компонент з відносними частками x_i $(i=\overline{1,2n})$, причому

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1. \tag{2}$$

Нехай у момент формування розширеного фондового портфеля стосовно основних параметрів, які характеризують кожну його складову, наявна така інформація.

1. Ринкова ціна акції i-го типу становить $S_{i,0}$ $(i=\overline{1,n})$.
2. На підставі експертних даних знайдено, що на момент часу T ринкова ціна акції i-го типу буде в інтервалі $[S_{i,min}, S_{i,max}]$ $(i=\overline{1,n})$, тобто буде нечітким числом прямокутного вигляду [3].
3. Ринкова ціна put-опціону з i-го набору становить $C_{i,p}$ $(i=\overline{n+1,2n})$.
4. Страйк-ціна акції i-го типу (ціна виконання відповідного put-опціону) становить $X_{i,p}$ $(i=\overline{n+1,2n})$, причому $S_{i-n,min} < X_{i,p} < S_{i-n,max}$ $(i=\overline{n+1,2n})$.

На підставі цих даних можна обчислити нечітку дохідність розширеного фондового портфеля в момент часу T.

Справді, якщо хеджування акції i-го типу немає $(\delta_i = 0)$, то дохідність цієї акції в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^a прямокутного вигляду

$$r_i^a = [r_{i,min}^a, r_{i,max}^a] = \left[\frac{S_{i,min}-S_{i,0}}{T\cdot S_{i,0}}, \frac{S_{i,max}-S_{i,0}}{T\cdot S_{i,0}}\right] \quad (i=\overline{1,n}). \tag{3}$$

Оскільки абсолютний прибуток $I_{i,p}, (i=\overline{n+1,2n})$ put-опціону європейського стилю з i-го набору в момент часу T за умови 100% хеджування відповідної акції $(\delta_i = 1)$ обчислюється за формулою [6]

$$I_{i,p} = \max\{0, X_{i,p} - S_{i-n}\} - C_{i,p} = \begin{cases} X_{i,p} - S_{i-n} - C_{i,p}, & X_{i,p} > S_{i-n}, \\ -C_{i,p}, & X_{i,p} \leqslant S_{i-n}, \end{cases}$$

де S_{i-n} $(i=\overline{n+1,2n})$ – ринкова ціна відповідної акції в момент часу T, то дохідність збірки "акція $i-$ го типу – put-опціон з i-го набору" в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^o прямокутного вигляду

$$r_i^o = [r_{i,min}^o, r_{i,max}^o] =$$

$$= \left[\frac{X_{i,p}-S_{i-n,0}-C_{i,p}}{T\cdot(C_{i,p}+S_{i-n,0})}, \frac{S_{i-n,max}-S_{i-n,0}-C_{i,p}}{T\cdot(C_{i,p}+S_{i-n,0})}\right] \quad (i=\overline{n+1,2n}). \tag{4}$$

Тепер на підставі (3), (4) знайдемо, що дохідність розширеного фондового портфеля в момент часу T характеризується нечітким числом r прямокутного вигляду

$$r = [r_{\min}, r_{max}] = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_{i,min}^a + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \cdot r_{i,min}^o, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_{i,max}^a + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \cdot r_{i,max}^o\right].$$

У розгорнутому вигляді цю формулу запишемо так:

$$r = [r_{\min}, r_{max}] = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,min}-S_{i,0}}{T\cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{X_{i,p}-S_{i-n,0}-C_{i,p}}{T\cdot(C_{i,p}+S_{i-n,0})},\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max}-S_{i,0}}{T\cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max}-S_{i-n,0}-C_{i,p}}{T\cdot(C_{i,p}+S_{i-n,0})}\right]. \tag{5}$$

Формуючи розширений фондовий портфель, інвестор найперше обов'язково фіксує нормативний параметр – нижню межу дохідності портфеля. У випадку, який розглядається, нижню межу дохідності портфеля задамо у вигляді нечіткого прямокутного числа

$$r^P = [r_{min}^P, r_{max}^P]. \tag{6}$$

Оскільки ступінь ризику інвестицій у портфель залежатиме від того, наскільки дохідність портфеля буде нижчою від нормативної, очевидно, що рівень ризику інвестицій у портфель з дохідністю (5) буде визначатися взаємним розміщенням інтервалів (5), (6). У цьому разі ризик того, що дохідність розширеного фондового портфеля, який розглядається, буде нижчою (вищою) від нормативної, можна обчислити за такою формулою [7]:

$$R = \begin{cases} 0, & r^P_{max} \leqslant r_{min}, \\ \dfrac{(r^P_{max} - r_{min})^2}{2(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min})}, & r^P_{min} < r_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{r^P_{min} + r^P_{max} - 2r_{min}}{2(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r^P_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{2r^P_{max} - r_{min} - r_{max}}{2(r^P_{max} - r^P_{min})}, & r^P_{min} \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r^P_{max}, \\ 1 - \dfrac{(r_{max} - r^P_{min})^2}{2(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r^P_{min} \leqslant r_{max} \leqslant r^P_{max}, \\ 1, & r_{max} \leqslant r^P_{min}. \end{cases} \tag{7}$$

За цільову функцію в задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю, природно вибрати нижню межу його дохідності. Оптимізувати портфель у такому формулюванні означає максимізувати мінімум його дохідності в момент часу T при заданому (фіксованому) значенні ризику $R = R_0$. У цьому разі формалізований запис задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій і put-опціонів європейського стилю виглядатиме так:

$$r_{min}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{X_{i,p} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})} \to \max, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \tag{10}$$

$$R(x_1, ..., x_{2n}, r^P_{min}, r^P_{max}) = R_0. \tag{11}$$

Для побудови розв'язку задачі (8)-(11) в загальному випадку треба врахувати те, що умова (11) має нестандартний ("гіллястий") вигляд: за відомої структури розширеного фондового портфеля притаманний йому рівень ризику обчислюється на підставі однієї з гілок формули (7) залежно від взаємного розміщення інтервалів дохідності (5), (6). Якщо ж структуру розширеного фондового портфеля шукати шляхом розв'язування задачі оптимізації, то кожну з гілок формули (7) треба прийняти за обмеження на шуканий розв'язок. Тоді задача (8)-(11) розбивається на шість задач математичного програмування, для кожної з яких умову (11) треба конкретизувати на підставі співвідношення (7).

Для теоретично безризикового портфеля ($R_0 = 0$) умову, яка еквівалентна (11), запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{X_{i,p} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})} \geqslant r^P_{max}. \tag{12}$$

Аналогічно, для портфеля з ризиком $R_0 = 1$ замість умови (11) треба розглянути умову

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})} \leqslant r^P_{min}. \tag{13}$$

Для визначення складових оптимального за дохідністю розширеного фондового портфеля у випадку, коли ризик портфеля $R_0 \in (0, 1)$, умову (11) в задачі оптимізації потрібно конкретизувати так.

Якщо

$$r^P_{min} < r_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max},$$

то (11) треба замінити такими умовами:

$$\begin{gathered} (r^P_{max} - r_{min})^2 = 2R_0(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min}), \\ r_{min} > r^P_{min}, \quad r_{min} < r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{max}. \end{gathered} \tag{14}$$

Коли

$$r_{min} \leqslant r^P_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max},$$

то замість умови (11) потрібно розглянути такі умови:

$$\begin{gathered} r^P_{min} + r^P_{max} - 2r_{min} = 2R_0(r_{max} - r_{min}), \\ r_{min} \leqslant r^P_{min}, \quad r^P_{min} < r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{max}. \end{gathered} \tag{15}$$

У випадку

$$r^P_{min} \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r^P_{max}$$

умова (11) еквівалентна умовам

$$\begin{gathered} 2r^P_{max} - r_{min} - r_{max} = 2R_0(r^P_{max} - r^P_{min}), \\ r_{min} \geqslant r^P_{min}, \quad r_{min} < r_{max}, \quad r_{max} \leqslant r^P_{max}. \end{gathered} \tag{16}$$

Якщо

$$r_{min} \leqslant r^P_{min} \leqslant r_{max} \leqslant r^P_{max},$$

то умову (11) треба замінити системою умов

$$\begin{gathered} (r_{max} - r^P_{min})^2 = 2(1 - R_0)(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min}), \\ r_{min} \leqslant r^P_{min}, \quad r_{max} \leqslant r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{min}. \end{gathered} \tag{17}$$

Зауважимо, що співвідношення (12)-(17) явно записуються через невідомі часткові частки x_i ($i = \overline{1, 2n}$) відповідних компонент розширеного фондового портфеля, оскільки через ці параметри явно виражаються функції r_{min}, r_{max} з (5).

Отже, за заданих значень параметрів $S_{i,0}$, $S_{i,min}$, $S_{i,max}$ ($i = \overline{1, n}$), $C_{i,p}$, $X_{i,p}$ ($i = \overline{n+1, 2n}$), r^P_{min}, r^P_{max}, T, R_0, складові x_i ($i = \overline{1, 2n}$) розширеного фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю, повинні бути розв'язком однієї з задач (8), (9), (10), (12) - (8), (9), (10), (17) залежно від взаємного розміщення інтервалів (5), (6). Для побудови межі ефективності цього портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля – мінімум очікуваної дохідності портфеля" треба розв'язати відповідну задачу оптимізації, змінюючи параметр R_0 в межах $R_{0,min} \leqslant R_0 \leqslant R_{0,max}$, де $R_{0,min}$ – ризик збірки "акція з найменшою дохідністю – put-опціон, який 100% хеджує цю акцію", а $R_{0,max}$ – ризик компоненти портфеля з найбільшою дохідністю.

3. Висновки. Заміна стандартного способу моделювання дохідності активів (як випадкових величин) нечіткими значеннями дохідностей цих активів дала змогу сформулювати й описати схему розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю. Побудова розв'язку задачі оптимізації зводиться до розв'язування деякої задачі математичного програмування. Це дає підстави не тільки достатньо легко побудувати межу ефективності портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля – мінімум очікуваної дохідності портфеля", але й ефективно проводити дослідження ролі опціонів у розширеному фондовому портфелі.

---

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – 1952. (March) – Vol. 7. – P. 77-91.
2. *Sharpe W.F.* Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. / *Sharpe W.F.* // Journal of Finance. – 1964 (September). – Vol. 19. – P. 425-442.
3. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений / *Заде Л.А.* – М: Мир, 1976.
4. *Недосекин А.О.* Оптимизация фондового портфеля, содержащего put-опционы / *Недосекин А.О.* // Банки и Риски. – 2005. – №1. (http://www.hedging.ru/stored/ad/9.pdf)
5. *Сявавко М.* Математичне моделювання за умов невизначеності. / *Сявавко М., Рибицька О.* – Львів: НВФ "Українські технології", 2000.
6. *Іващук Н.Л.* Ринок деривативів: економіко-математичне моделювання процесів ціноутворення. / *Іващук Н.Л.* – Львів: Вид-тво Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2008.
7. *Недосекин А.О.* Оценка риска инвестиций для произвольно-размытых факторов инвестиционного проекта. / *Недосекин А.О., Кокош А.М.* http://sedok.narod.ru/sc_group_2003.html

ABOUT SOME OPTIMIZATION'S PROBLEM OF THE EXTENDED PORTFOLIO

Mykola BUGRIY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Using fuzzy-plural theory we find the method of solving of optimization's problems for the extended portfolio of the stocks. This stocks are hedging by the put-options of European style.

Key words: extended portfolio, option, hedging.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ РАСШИРЕННОГО ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ

Николай БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Используя нечётко-множественную теорию, в работе предлагается метод решения задачи оптимизации расширенного фондового портфеля акций, которые хеджируются put-опционами европейского стиля.

Ключевые слова: расширенный фондовый портфель, опционы, хеджирование.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.2008

Прийнята до друку 12.06.2009