ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 14–37 *Is. 70. P. 14–37*

УДК 517.956

ГЛАДКА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

Руслан АНДРУСЯК, Наталя БУРДЕЙНА, Володимир КИРИЛИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: kyrylych@franko.lviv.ua

Розглянуто мішану задачу з невідомими межами для одновимірної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з нелінійними умовами на поведінку меж області та нелокальними крайовими умовами. За допомогою методу характеристик та теореми Банаха про нерухому точку знайдено достатні умови класичної розв'язності задачі для малих значень часової змінної.

Ключові слова: гіперболічна задача з вільними межами, квазілінійні рівняння, класичний розв'язок, метод характеристик, теорема Банаха.

1. Вступ. Задачі з невідомими межами (задачі Стефана) для параболічних та еліптичних рівнянь описують багато різноманітних проблем фізики, механіки та природознавства [1]. Напевно, першими публікаціями з цієї проблематики для гіперболічних рівнянь і систем були праці [2]-[4], в яких описано математичні моделі газової динаміки, аеропружності, теплопровідності (швидкість поширення тепла скінченна).

При дослідженні гіперболічних задач з невідомими (вільними) межами в цій праці використано методику запропоновану в [5]-[6]. Варто зауважити, що такі задачі найчастіше розглядали для лінійних і напівлінійних гіперболічних рівнянь. Проте, наприклад, задача про визначення невідомої лінії розриву гідродинамічних параметрів потоку рідини або газу є однією з основних проблем гідро-газової динаміки та аеропружності. Саме її математичне формулювання зводиться до вивчення мішаної задачі для квазілінійної системи гіперболічного типу в області з однією або декількома вільними межами. Таким задачам присвячені праці [7]-[10], в яких було знайдено існування та єдиність локального і глобального узагальнених розв'язків для різних типів областей та крайових умов. Класичну розв'язність гіперболічних задач Стефана розглядали досить рідко, зокрема, в монографії [11] досліджено подібну задачу для спеціального виду гіперболічної системи першого порядку в кутовій області.

У цій праці знайдено достатні умови існування та єдиності локального класичного розв'язку мішаної задачі для одновимірної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з невідомими межами та нелокальними крайовими умовами.

2. Формулювання задачі. В області $G_T^a = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a_1(t) < x < a_2(t), 0 < t < T\}$, де функції $a_k, k = 1,2$ – наперед невідомі, розглянемо систему квазілінійних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$u(x,t) = (u_1(x,t),...,u_n(x,t)),$$

а поведінку меж області задамо системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da_k}{dt} = h_k(t,a,u(a,t)), \quad k = 1,2, \quad a(t) = (a_1(t),a_2(t)), \tag{2}$$

$$u(a,t) = (u(a_1,t),u(a_2,t)).$$

Нехай невідомі функції задовольняють початкові умови

$$a(0) = a^0, \quad a^0 = (a_1^0, a_2^0), \quad a_1^0 < a_2^0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad a_1^0 \leqslant x \leqslant a_2^0, \quad g(x) = (g_1(x),...,g_n(x)) \tag{4}$$

і, визначивши множини

$$I_1 = \{i : \ \lambda_i(a_1^0,0,g(a_1^0)) > h_1(0,a^0,g(a^0))\},$$

$$I_2 = \{i : \ \lambda_i(a_2^0,0,g(a_2^0)) < h_2(0,a^0,g(a^0))\},$$

крайові умови запишемо у вигляді

$$u_i(a_k(t),t) = \mu_k^i(t,a(t),\{u_s(a_{k'}(t),t)\}_{\substack{s\notin I_{k'}\\ k'=1,2}}), \qquad i \in I_k, \quad k = 1,2, \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Вважаємо, що функції $\lambda_i, f_i : \mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_k : [0,T] \times \mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R}$, $\mu_k^i : [0,T] \times \mathbb{R}^{2+2n-cardI_1-cardI_2} \to \mathbb{R}$, $g_i : [a_1^0,a_2^0] \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $k = 1,2$ – задані.

3. Локальна розв'язність задачі. Введемо позначення

$$B_R^n = \{u \in \mathbb{R}^n : |u_i| \leqslant R, \quad i = \overline{1,n}, \}, \quad G = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ x\in[a_1^0,a_2^0]}} |g_i(x)|,$$

$$h_k(0,a^0,g(a^0)) = \mathcal{H}_k, \quad r_k = cardI_k, \quad k = 1,2, \quad \{\omega_{k's}\} = \{\omega_{k's} : \ s \notin I_{k'}, \ k' = 1,2\},$$

$$\Omega_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ a_1^0 + (\mathcal{H}_1 - 1)t \leqslant x \leqslant a_2^0 + (\mathcal{H}_2 + 1)t, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \},$$

$$V_T = \Big\{(t,y) \in \mathbb{R}^3 : \ a_1^0 + (\mathcal{H}_1 - 1)t \leqslant y_1 \leqslant a_1^0 + (\mathcal{H}_1 + 1)t,$$

$$a_2^0 + (\mathcal{H}_2 - 1)t \leqslant y_2 \leqslant a_2^0 + (\mathcal{H}_2 + 1)t, \ 0 \leqslant t \leqslant T\Big\},$$

а також клас функцій $\Big(C_L^1(\overline{G_T^a})\Big)^n = \Big\{u \in (\mathbb{C}^1(\overline{G_T^a}))^n : \quad u_x \in (Lip(\overline{G_T^a}))^n\Big\}.$

Означення 1. *Класичним розв'язком задачі (1)-(5) на часовому проміжку* $[0, T_0]$ *називатимемо набір функцій* $(u(x,t), a(t)) \in \left(C^1_L(\overline{G^a_{T_0}})\right)^n \times (\mathbb{C}^1([0,T_0]))^2$, $T_0 \leqslant T$, *що задовольняють системи рівнянь (1)-(2),початкові умови (3)-(4) і граничні умови (5). Якщо* $T_0 < T$, *то такий розв'язок назвемо локальним.*

Головним результатом праці є така теорема.

Теорема 1. *Нехай*
1) $\lambda_i(x,t,u),\ f_i(x,t,u) \in \mathbb{C}^{1,0,1}(\Omega_T \times B^n_{G+1}) \cap Lip(\Omega_T \times B^n_{G+1})$,
$\left\{(\lambda_i)'_x, (\lambda_i)'_{u_j}, (f_i)'_x, (f_i)'_{u_j}\right\} \subset Lip_{x,u}(\Omega_T \times B^n_{G+1}), i,j = \overline{1,n}$;
2) $g_i(x) \in \mathbb{C}^1([a^0_1, a^0_2])$, $g'_i(x) \in Lip([a^0_1, a^0_2])$, $i = \overline{1,n}$;
3) $h_k(t,y,w) \in Lip(V_T \times B^{2n}_{G+1})$, $k = 1,2$;
4) $\mu^i_k(t,y,\{w^{k'}_s\}) \in \mathbb{C}^1\Big(V_T \times B^{2n-r_1-r_2}_{G+1}\Big)$, $\left\{\mu^i_k, (\mu^i_k)'_t, (\mu^i_k)'_y, (\mu^i_k)'_{w^{k'}_s}\right\} \subset$
$\subset Lip\Big(V_T \times B^{2n-r_1-r_2}_{G+1}\Big)$, $i \in I_k$, $k = 1,2$, $s \notin I_{k'}$, $k' = 1,2$;
5) виконуються умови погодження нульового та першого порядків

$$g_i(a^0_k) = \mu^i_k(0, a^0, \{g_s(a^0_{k'})\}), \quad i \in I_k, \quad k = 1,2,$$

$$(\mu^i_k)'_t(0,a^0,\{g_s(a^0_{k'})\}) + \sum_{m=1}^{2} (\mu^i_k)'_{a_m}(0,a^0,\{g_s(a^0_{k'})\})\mathcal{H}_m +$$

$$+ \sum_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}} (\mu^i_k)'_{w^{k'}_s}(0,a^0,\{g_s(a^0_{k'})\})[(\mathcal{H}_{k'} - \lambda_s(a^0_{k'},0,g(a^0_{k'})))g'_s(a^0_{k'}) + f_s(a^0_{k'},0,g(a^0_{k'}))] =$$

$$= f_i(a^0_k, 0, g(a^0_k)) + (\mathcal{H}_k - \lambda_i(a^0_k,0,g(a^0_k)))g'_i(a^0_k), \quad i \in I_k, \quad k = 1,2;$$

6) виконується умова

$$\lambda_i(a^0_k, 0, g(a^0_k)) \neq \mathcal{H}_k, \quad k = 1,2, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді для деякого $T_0 \leqslant T$ *існує єдиний класичний розв'язок задачі (1)-(5) на часовому проміжку* $[0, T_0]$.

Доведення. Введемо позначення:

$$\Lambda = \max_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ (x,t,u)\in\Omega_T\times B^n_{G+1}}} \Big\{|\lambda_i(x,t,u)|, |(\lambda_i)'_x(x,t,u)|, |(\lambda_i)'_{u_j}(x,t,u)|\Big\};$$

$$F = \max_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ (x,t,u)\in\Omega_T\times B^n_{G+1}}} \Big\{|f_i(x,t,u)|, |(f_i)'_x(x,t,u)|, |(f_i)'_{u_j}(x,t,u)|\Big\};$$

$$H = \max_{\substack{k=1,2\\ (t,y,w)\in V_T\times B^{2n}_{G+1}}} |h_k(t,y,w)|,\ G_1 = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ x\in[a^0_1,a^0_2]}} |g'_i(x)|,\ \gamma = \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ k=1,2}} |\lambda_i(a^0_k,0,g(a^0_k)) - \mathcal{H}_k|;$$

$$M = \max_{\substack{k=1,2, i\in I_k, k'=1,2, s\notin I_{k'},\\ (t,y,\{w^{k'}_s\})\in V_T\times B^{2n-r_1-r_2}_{G+1}}} \Big\{|\mu^i_k(t,y,\{w^{k'}_s\})|, |(\mu^i_k)'_t(t,y,\{w^{k'}_s\})|,$$

$$|(\mu^i_k)'_y(t,y,\{w^{k'}_s\})|, |(\mu^i_k)'_{w^{k'}_s}(t,y,\{w^{k'}_s\})|\Big\}, \quad \mathcal{H} = \max\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}.$$

Нехай λ_0 – стала Ліпшиця для функцій $\lambda_i(x,t,u)$, $(\lambda_i)'_x(x,t,u)$, $(\lambda_i)'_{u_j}(x,t,u)$, $i,j=\overline{1,n}$ на множині $\Omega_T\times B^n_{G+1}$; f_0 – для $f_i(x,t,u)$, $(f_i)'_x(x,t,u)$, $(f_i)'_{u_j}(x,t,u)$, $i,j=\overline{1,n}$ на $\Omega_T\times B^n_{G+1}$; h_0 – для $h_k(t,y,\omega)$, $k=1,2$ на $V_T\times B^{2n}_{G+1}$; μ_0 – для $\mu^i_k(t,y,\{w^{k'}_s\})$, $(\mu^i_k)'_t(t,y,\{w^{k'}_s\})$, $(\mu^i_k)'_y(t,y,\{w^{k'}_s\})$, $(\mu^i_k)'_{w^{k'}_s}(t,y,\{w^{k'}_s\})$, $s\notin I_{k'}, k'=1,2$, $i\in I_k, k=1,2$ на $V_T\times B^{2n-r_1-r_2}_{G+1}$; g_0 – для $g_i(x), g'_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ на $[a^0_1,a^0_2]$.

Введемо метричний простір $Q=Q(T_0,U,U_1,L,L_1)$, що складається з функцій (u,a), де $u=(u_1,...,u_n), a=(a_1,a_2)$, $u_i\in\mathbb{C}^1(\overline{G^a_{T_0}}), a_k\in\mathbb{C}([0,T_0])$, які задовольняють умови (3)-(4) і такі обмеження:

H1. $(a_k(t)-\mathcal{H}_k t)\in Lip([0,T_0],1), \quad k=1,2;$

H2. $|u_i(x,t)-\bar g_i(x)|\leqslant U, \quad i=\overline{1,n}, \quad (x,t)\in G^a_{T_0}$, де $U\leqslant\dfrac{1}{2}$, а $\bar g_i(x)$ набуває значення $g_i(a^0_1)$, якщо $x<a^0_1$, $g_i(x)$, якщо $a^0_1\leqslant x\leqslant a^0_2$ і $g_i(a^0_2)$, якщо $x>a^0_2$;

H3. $u_i\in Lip(G^a_{T_0},L), \quad i=\overline{1,n};$

H4. $|(u_i)'_x(x,t)|\leqslant U_1, \quad i=\overline{1,n}, \quad (x,t)\in G^a_{T_0};$

H5. $(u_i)'_x\in Lip(G^a_{T_0},L_1), \quad i=\overline{1,n}.$

Нехай $\{(u^1,a^1),(u^2,a^2)\}\subset Q$, тоді метрику на елементах простору Q визначимо як

$$\rho\Big((u^1,a^1),(u^2,a^2)\Big)=\max\Big\{\max_{\substack{k=1,2\\ t\in[0,T]}}|a^1_k(t)-a^2_k(t)|, \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ (x,t)\in G^{a^1}_T\cap G^{a^2}_T}}|u^1_i(x,t)-u^2_i(x,t)|,$$

$$\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ (x,t)\in G^{a^1}_T\cap G^{a^2}_T}}|(u^1_i)_x(x,t)-(u^2_i)_x(x,t)|\Big\}.$$

Позначимо через $\varphi_i(\tau;x,t,u)$, $i=\overline{1,n}$, розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\lambda_i(\xi,\tau,u(\xi,\tau)), \qquad \xi(t)=x, \tag{6}$$

що є характеристикою системи рівнянь (1), причому залежність $\varphi_i(\tau;x,t,u)$ від u є функціоналом. Введемо позначення $\varphi_i(\tau)\stackrel{def}{=}\varphi_i(\tau;x,t,u)$, якщо треба підкреслити залежність від якогось аргументу, то будемо записувати $\varphi^x_i(\tau)$, $\varphi^t_i(\tau)$, $\varphi^u_i(\tau)$. Часову координату точки перетину функції φ_i з межею області $G^a_{T_0}$ при русі в напрямі спадання аргументу τ позначимо через $\chi_i(x,t;u,a)$, тобто

$$\chi_i(x,t,u;a)=\min\{\tau\ :\ (\varphi_i(\tau),\tau)\in G^a_{T_0}\}.$$

Для $\chi_i(x,t;u,a)$ будемо використовувати аналогічні позначення χ_i, χ^x_i, χ^t_i, χ^u_i, χ^a_i. Проінтегрувавши рівності (1) вздовж відповідних характеристик $\xi=\varphi_i(\tau)$, і співвідношення (2), отримаємо системи інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t)=u_i\Big(\varphi_i(\chi_i),\chi_i\Big)+\int\limits_{\chi_i}^{t}f_i\Big(\varphi_i(\tau),\tau,u(\varphi_i(\tau),\tau)\Big)d\tau, \quad i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

$$a_k(t)=a^0_k+\int\limits_0^t h_k(\tau,a(\tau),u(a(\tau),\tau))d\tau, \quad k=1,2. \tag{8}$$

Зауважимо, набір функцій $(u,a) \in (\mathbb{C}^1(\overline{G^a_{T_0}}))^n \times (\mathbb{C}([0,T_0]))^2$, що задовольняє системи (7) і (8), буде розв'язком (1) і (2).

Нехай $(u,a) \in Q$, тоді згідно з умовами **H1** $-$ **H2**: $(t, a(t), u(a(t),t)) \in V_{T_0} \times B^{2n}_{G+1}$, $(a_k(t), t, u(a_k(t),t)) \in \Omega_{T_0} \times B^n_{G+1}$, $k=1,2$, $G^a_{T_0} \subset \Omega_{T_0}$. Правильні такі співвідношення

$$|h_k(t,a(t),u(a(t),t)) - \lambda_i(a_k(t),t,u(a_k(t),t))| \geqslant |\mathcal{H}_k - \lambda_i(a^0_k, 0, g(a^0_k))| -$$
$$-|h_k(t,a(t),u(a(t),t)) - \mathcal{H}_k| - |\lambda_i(a_k(t),t,u(a_k(t),t)) - \lambda_i(a^0_k,0,g(a^0_k))| \geqslant$$
$$\geqslant \gamma - h_0(T_0 + 2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + 2nU) - \lambda_0(T_0 + (\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + nU).$$

Якщо

$$h_0(T_0 + 2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + 2nU) + \lambda_0(T_0 + (\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + nU) \leqslant \gamma/2, \quad (9)$$

то одержимо оцінку

$$|h_k(t,a(t),u(a(t),t)) - \lambda_i(a_k(t),t,u(a_k(t),t))| \geqslant \gamma/2,\ i=\overline{1,n},\ k=1,2,\ t\in[0,T_0]. \quad (10)$$

Використаємо (10) та умови (3)-(5) і запишемо систему (7) у вигляді

$$u_i(x,t) = \vartheta_i(x,t;u,a) + \int\limits_{\chi_i}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau),\tau,u(\varphi_i(\tau),\tau)\Big)d\tau, \quad i = \overline{1,n}, \quad (11)$$

де

$$\vartheta_i(x,t;u,a) = \begin{cases} g_i(\varphi_i(0)), & \text{якщо } \chi_i = 0, \\ \mu^i_k(\chi_i, a(\chi_i), \{u_s(a_{k'}(\chi_i),\chi_i)\}), & \text{якщо } \chi_i > 0, \\ \varphi_i(\chi_i) = a_k(\chi_i), \quad i \in I_k,\ k=1,2. \end{cases}$$

Зауважимо, набір функцій $(u,a) \in Q$, що задовольняє систему (11), (8), буде класичним розв'язком задачі (1)-(5).

На просторі Q визначимо оператор $S : S(u,a) = (S^u(u,a), S^a(u,a))$, де $S^u(u,a) = (S^u_1(u,a),...,S^u_n(u,a))$, $S^a(u,a) = (S^a_1(u,a), S^a_2(u,a))$, отож,

$$(S^a_k(u,a))(t) = a^0_k + \int\limits_0^t h_k(\tau, a(\tau), u(a(\tau),\tau))d\tau, \quad k=1,2.$$

Тоді, ввівши позначення

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} (u_i)'_x(a_1(t),t)(x-a_1(t)) + u(a_1(t),t), & \text{якщо } x < a_1(t), \\ u(x,t), & \text{якщо } a_1(t) \leqslant x \leqslant a_2(t), \\ (u_i)'_x(a_2(t),t)(x-a_2(t)) + u(a_2(t),t), & \text{якщо } x > a_2(t), \end{cases}$$

$$\tilde{\chi_i} \stackrel{def}{=} \chi_i(x,t;\tilde{u},S^a), \qquad \tilde{\varphi_i}(\tau) \stackrel{def}{=} \varphi_i(\tau;x,t,\tilde{u}),$$

запишемо

$$(S^u_i(u,a))(x,t) = \tilde{\vartheta}_i(x,t,\tilde{u},u,a) + \int\limits_{\tilde{\chi_i}}^{t} f_i\Big(\tilde{\varphi_i}(\tau),\tau,\tilde{u}(\tilde{\varphi_i}(\tau),\tau)\Big)d\tau, \quad i=\overline{1,n},$$

де

$$\tilde{\vartheta}_i(x,t,\tilde{u},u,a) = \begin{cases} g_i(\tilde{\varphi_i}(0)), \quad \text{якщо } \tilde{\chi_i}=0, \\ \mu^i_k(\tilde{\chi_i}, (S^a(u,a))(\tilde{\chi_i}), \{(S^u_s(u,a))(S^a_{k'}(u,a)(\tilde{\chi_i}),\tilde{\chi_i})\}), \text{якщо } \tilde{\chi_i} > 0, \\ \tilde{\varphi_i}(\tilde{\chi_i}) = (S^a_k(u,a))(\tilde{\chi_i}), \quad i \in I_k,\ k=1,2. \end{cases}$$

Щоб уникнути громіздких виразів, позначимо $S^u := S^u(u,a)$, $S^a := S^a(u,a)$. Для коректності визначення оператора вимагаємо виконання таких умов

$$h_k(t, a(t), u(a(t), t)) \neq \lambda_i(S_k^a(t), t, \tilde{u}(S_k^a(t), t)), \quad i = \overline{1,n}, \quad k = 1,2, \quad t \in [0, T_0], \tag{12}$$

$$\tilde{\chi}_i(S_k^a(t), t) = 0, \quad k = 1,2, \quad i \notin I_k. \tag{13}$$

Покажемо, що існує набір параметрів (T_0, U, U_1, L, L_1), при яких оператор S відображає повний метричний простір (Q, ρ) в себе, є стискуючим і виконуються умови (12)-(13).

Почнемо з перевірки умов простору. Нехай $(u,a) \in Q$, покажемо, що $(S^u, S^a) \in Q$. Насамперед визначимо обмеження на параметри простору, при яких S^a задовольняє умову **H1.**

Оскільки,

$$\frac{d}{dt}\Big(S_k^a(t) - \mathcal{H}_k t\Big) = |h_k(t, a(t), u(a(t), t)) - \mathcal{H}_k| \leqslant h_0(T_0 + 2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + 2nU),$$

то $\Big(S_k^a(t) - \mathcal{H}_k t\Big) \in Lip\Big([0, T_0], 1\Big)$, $k = 1,2$, за умов

$$h_0(1 + 2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0))T_0 \leqslant \frac{1}{2}, \tag{14}$$

$$h_0 2nU \leqslant \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Знайдемо умови на параметри простору, при яких $\tilde{u} \in B_{G+1}$. Розглянемо можливі випадки:

1) $(x,t) \in G_{T_0}^a$, тоді $\tilde{u}_i(x,t) = u_i(x,t)$ і очевидно $\tilde{u} \in B_{G+1}$;

2) $(x,t) \in G_{T_0}^{S^a} \setminus G_{T_0}^a$, і для визначеності $S_1^a(t) \leqslant x \leqslant a_1(t)$. Тоді

$$|\tilde{u}_i(x,t)| = |(u_i)'_x(a_1(t), t)(x - a_1(t)) + u_i(a_1(t), t)| \leqslant 2U_1(\mathcal{H}+1)T_0 + G + \frac{1}{2} \leqslant G + 1,$$

якщо

$$2U_1(\mathcal{H}+1)T_0 \leqslant \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Тепер можемо перейти до доведення (12)-(13). Розглянемо

$$\begin{gathered}|h_k(t, a(t), u(a(t), t)) - \lambda_i(S_k^a(t), t, \tilde{u}(S_k^a(t), t))| \geqslant |\mathcal{H}_k - \lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0))| - \\ -|h_k(t, a(t), u(a(t), t)) - \mathcal{H}_k| - |\lambda_i(S_k^a(t), t, \tilde{u}(S_k^a(t), t)) - \lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0))| \geqslant\end{gathered}$$

$$\geqslant \gamma - h_0(T_0 + 2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + 2nU) - \lambda_0(T_0 + (\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + nU + nU_1 2(\mathcal{H}+1)T_0).$$

Якщо

$$\begin{gathered}h_0(T_0 + 2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + 2nU) - \\ -\lambda_0(T_0 + (\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + nU + nU_1 2(\mathcal{H}+1)T_0) \leqslant \gamma/2,\end{gathered} \tag{17}$$

то виводимо оцінку

$$|h_k(t, a(t), u(a(t), t)) - \lambda_i(S_k^a(t), t, \tilde{u}(S_k^a(t), t))| \geqslant \gamma/2, \ i = \overline{1,n}, \ k = 1,2, \ t \in [0, T_0]. \tag{18}$$

Зауважимо, щоб виконувалась рівність (13), достатньо вимагати виконання такої нерівності:

$$(2(\mathcal{H}+1) + \Lambda)T_0 \leqslant a_2^0 - a_1^0. \tag{19}$$

Дослідимо, за яких умов (S^u, S^a) задовольняє обмеження **H2** простору Q.

Розглянемо випадок $\tilde{\chi}_i = 0$. Оскільки

$$|S_i^u(x,t) - \bar{g}_i(x)| \leqslant |g_i(\widetilde{\varphi}_i(0)) - \bar{g}_i(x)| + \int\limits_0^t |f_i(\widetilde{\varphi}_i(\tau), \tau, \tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\tau), \tau))| d\tau \leqslant (g_0\Lambda + F)T_0,$$

то достатньо вимагати виконання нерівності

$$(g_0\Lambda + F)T_0 \leqslant U. \tag{20}$$

Розглянемо випадок $\tilde{\chi}_i > 0$ і попередньо доведемо допоміжну оцінку

$$|S_i^u(S_k^a(t), t) - g_i(a_k^0)| = |g_i(\tilde{\varphi}_i^{S_k^a(t), t}(0)) - g_i(a_k^0)| +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{\chi}_i}^t |f_i(\tilde{\varphi}_i(\tau), \tau, \tilde{u}(\tilde{\varphi}_i(\tau), \tau))| d\tau \leqslant g_0(H + \Lambda)T_0 + FT_0.$$

Враховуючи умови погодження нульового порядку, маємо

$$|S_i^u(x,t) - \bar{g}_i(x)| \leqslant |\mu_k^i(\tilde{\chi}_i, S^a(\tilde{\chi}_i), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i), \tilde{\chi}_i)\}) -$$

$$-\mu_k^i(0, a^0, \{S_s^u(a_{k'}^0, 0)\})| + |g_i(a_k^0) - \bar{g}_i(x)| + \int\limits_{\tilde{\chi}_i}^t |f_i(\tilde{\varphi}_i(\tau), \tau, \tilde{u}(\tilde{\varphi}_i(\tau), \tau))| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0(T_0 + 2HT_0 + 2n(g_0(H + \Lambda) + F)T_0) + g_0(H + \Lambda)T_0 + FT_0.$$

Тому, якщо

$$\Big(\mu_0(1 + 2H + 2n(g_0(H + \Lambda) + F)) + g_0(H + \Lambda) + F\Big)T_0 \leqslant U, \tag{21}$$

то

$$|S_i^u(x,t) - \bar{g}_i(x)| \leqslant U, \quad (x,t) \in G_{T_0}^{S^a}.$$

Для наступних оцінок нам знадобиться стала Ліпшиця для функції $\tilde{u}$ за двома змінними. Доведемо її спочатку за змінною x для можливих випадків розміщення точки (x,t) :

1) $\{(x_1, t), (x_2, t)\} \in G_{T_0}^{S^a} \setminus G_{T_0}^a$:

$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x_j, t)| \leqslant |\Delta_j((u_i)'_x(a_1(t), t)(x_j - a_1(t)) + u_i(a_1(t), t))| \leqslant U_1|\Delta x_j|;$$

2) $(x_1, t) \in G_{T_0}^{S^a} \setminus G_{T_0}^a,\ (x_2, t) \in G_{T_0}^a$:

$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x_j, t)| \leqslant |((u_i)'_x(a_1(t), t)(x_1 - a_1(t)) + u_i(a_1(t), t)) - u_i(x_2, t)| \leqslant$$

$$\leqslant U_1|x_1 - a_1(t)| + L|a_1(t) - x_2| \leqslant \max\{U_1, L\}|\Delta x_j|;$$

3) $\{(x_1, t), (x_2, t)\} \in G_{T_0}^a$:

$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x_j, t)| \leqslant L|\Delta x_j|.$$

Отже, для довільного випадку $|\Delta_j \tilde{u}_i(x_j, t)| \leqslant \max\{U_1, L\}|\Delta x_j|$. Тепер знайдемо сталу Ліпшиця за змінною t. Розглянувши ті ж випадки, що й попередньо, маємо:

1) $|\Delta_j \tilde{u}_i(x, t_j)| \leqslant |\Delta_j((u_i)'_x(a_1(t_j), t_j)||(x - a_1(t_1))| + U_1|\Delta_j a_1(t_j)| +$
$+|\Delta_j u_i(a_1(t_j), t_j)| \leqslant \Big(L_1(\mathcal{H} + 2)2(\mathcal{H} + 1)T_0 + U_1(\mathcal{H} + 1) + L(\mathcal{H} + 2)\Big)|\Delta t_j|,$

$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x, t_j)| \leqslant (1 + U_1(1 + \mathcal{H}) + L(\mathcal{H} + 2))|\Delta t_j|,$$

при
$$2L_1(\mathcal{H}+2)(\mathcal{H}+1)T_0 \leqslant 1; \tag{22}$$
2) $|\Delta_j \tilde{u}_i(x,t_j)| \leqslant |(u_i)'_x(a_1(t_1),t_1)|(x-a_1(t_1)) + u_i(a_1(t_1),t_1) - u_i(x,t_2)| \leqslant$
$\leqslant U_1|a_1(t_2)-a_1(t_1)| + L|a_1(t_2)-a_1(t_1)| + L|\Delta t_j| \leqslant ((U_1+L)(1+\mathcal{H})+L)|\Delta t_j|$;
3) $|\Delta_j \tilde{u}_i(x,t_j)| \leqslant L|\Delta t_j|$.

Для довільного випадку правильна оцінка
$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x,t_j)| \leqslant (1+(U_1+L)(1+\mathcal{H})+L)|\Delta t_j|.$$

Підсумовуючи попередні результати, можемо визначити загальну сталу Ліпшиця за двома змінними для функції $\tilde{u}$, а саме
$$\tilde{L} = 1+(U_1+L)(1+\mathcal{H})+L.$$

Доведемо твердження, які знадобляться нам надалі.

Лема 1. *Нехай* $(x_j,t_j) \in G^a_{T_0}$, $j=1,2,(u,a)\in Q$, *тоді функція* $\varphi_i(\tau)$ *задовольняє нерівність*
$$|\Delta_j\varphi_i(\tau;x_j,t,u)| \leqslant e^{\lambda_0(1+nL)T_0}|\Delta x_j|; \qquad |\Delta_j\varphi_i(\tau;x,t_j,u)| \leqslant \Lambda e^{\lambda_0(1+nL)T_0}|\Delta t_j|.$$

Доведення. Запишемо $\varphi_i(\tau;x_j,t,u)$ як розв'язок рівняння (6) у вигляді
$$\varphi_i(\tau;x_j,t,u) \;=\; x_j + \int\limits_t^\tau \lambda_i(\varphi_i(\theta;x_j,t,u),\theta,u(\varphi_i(\theta;x_j,t,u),\theta))d\theta, \quad j=1,2.$$
Розглянемо різницю цих виразів і застосуємо до неї лему Гронуолла-Белмана. Отож, отримуємо твердження леми. Другу оцінку доводимо аналогічно. □

Зауваження 1. Припустивши, що
$$\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0 \leqslant 1 \tag{23}$$
та використавши попередню лему, отримуємо оцінки для функції $\widetilde{\varphi}_i(\tau)$ в області $G^{S^a}_{T_0}$:
$$|\Delta_j\widetilde{\varphi}^{x_j}_i(\tau)| \leqslant e|\Delta x_j|, \qquad |\Delta_j\widetilde{\varphi}^{t_j}_i(\tau)| \leqslant \Lambda e|\Delta t_j|.$$

Лема 2. *Нехай* $\{(x_1,t_1),(x_2,t_2)\} \subset G^{S^a}_{T_0}$, $k=1,2$, $(u,a)\in Q$ *і для фіксованого* $k\in\{1,2\}$: $\widetilde{\varphi}^{x_j,t_j}_i(\tilde{\chi_i}^{x_j,t_j}) = S^a_k(\tilde{\chi}^{x_j,t_j}_i)$, $j=1,2$, *причому параметри* T_0 *та* U *є достатньо малими, а саме задовольняють умови (17) та*
$$\lambda_0(1+n\tilde{L})(\Lambda+H)T_0 \leqslant \frac{\gamma}{4}. \tag{24}$$
Тоді виконуються нерівності
$$|\Delta_j\tilde{\chi}^{x_j}_i| \leqslant \frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}|\Delta x_j|, \qquad |\Delta_j\tilde{\chi}^{t_j}_i| \leqslant \frac{4}{\gamma}\Lambda e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}|\Delta t_j|.$$

Доведення. Нехай для визначеності $k=1$, $\;x_1<x_2$. Тоді $\tilde{\chi}^{x_1}_i > \tilde{\chi}^{x_2}_i$. Розглянемо різницю $\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau) - S^a_1(\tau)$. За теоремою Лагранжа справджується оцінка
$$|\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tilde{\chi}^{x_1}_i) - S^a_1(\tilde{\chi}^{x_1}_i)| = |\lambda_i(\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau_0),\tau_0,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau_0),\tau_0)) -$$
$$-h_1(\tau_0,a(\tau_0),u(a(\tau_0),\tau_0))||\Delta_j\tilde{\chi}^{x_j}_i| \geqslant \Big[-|\lambda_i(\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau_0),\tau_0,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau_0),\tau_0)) -$$

$$-\lambda_i(S_1^a(\tau_0),\tau_0,\tilde u(S_1^a(\tau_0),\tau_0))|+|\lambda_i(S_1^a(\tau_0),\tau_0,\tilde u(S_1^a(\tau_0),\tau_0))-$$
$$-h_1(\tau_0,a(\tau_0),u(a(\tau_0),\tau_0))|\Big]|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\geqslant\Big[\frac{\gamma}{2}-\lambda_0(1+n\tilde L)|\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau_0)-(S^1a)(\tau_0)|\Big]|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\geqslant$$
$$\geqslant\Big[\frac{\gamma}{2}-\lambda_0(1+n\tilde L)(\Lambda+H)T_0\Big]|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\geqslant\frac{\gamma}{4}|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|.$$

Тому

$$|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\leqslant\frac{4}{\gamma}|\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tilde\chi_i^{x_1})-S_1^a(\tilde\chi_i^{x_1})|\leqslant\frac{4}{\gamma}|\Delta_j\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tilde\chi_i^{x_1})|.$$

Згідно з лемою 1 отримаємо оцінку

$$|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\leqslant\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde L)T_0}|\Delta x_j|.$$

Аналогічно отримуємо другу оцінку з твердження леми. □

Дослідимо умову **H3**.

Нехай ${\tilde\chi_i}^{x_j}=0,\ j=1,2$. Тоді

$$|\Delta_jS_i^u(x_j,t)|\leqslant|\Delta_jg_i(\widetilde\varphi_i^{x_j}(0))|+\int\limits_0^t\Big|\Delta_jf_i\Big(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant(g_0+T_0f_0(1+n\tilde L))e|\Delta x_j|\leqslant(g_0e+1)|\Delta x_j|.$$

Тепер вважатимемо ${\tilde\chi_i}^{x_j}>0,\ j=1,2$ і $x_1<x_2$, $\widetilde\varphi_i^{x_j}({\tilde\chi_i}^{x_j})=S_1^a({\tilde\chi_i}^{x_j})$, $j=1,2$, тоді ${\tilde\chi_i}^{x_1}>{\tilde\chi_i}^{x_2}$. Знайдемо допоміжну оцінку при $k=1,2,\ \ i\notin I_k$

$$|\Delta_jS_i^u(S_k^a(t_j),t_j)|\leqslant|\Delta_jg_i(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_j),t_j}(0))|+$$
$$+\int\limits_0^{t_1}\Big|\Delta_jf_i\Big(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_j),t_j}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_j),t_j}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big|f_i\Big(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_2),t_2}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_2),t_2}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau\leqslant\Big((g_0+f_0T_0(1+n\tilde L))(H+\Lambda)e+F\Big)|\Delta t_j|.$$

Припустимо, що T_0 достатньо мале, щоб виконувалась нерівність

$$T_0f_0(1+n\tilde L)\max\{1,H+\Lambda\}e\leqslant1. \tag{25}$$

Тоді

$$|\Delta_jS_i^u(S_k^a(t_j),t_j)|\leqslant k_1|\Delta t_j|, \tag{26}$$

де $k_1=g_0(H+\Lambda)e+F+1$. Розглянемо

$$|\Delta_jS_i^u(x_j,t)|\leqslant|\Delta_j\mu_k^i({\tilde\chi_i}^{x_j},S^a({\tilde\chi_i}^{x_j}),\{S_s^u(S_{k'}^a({\tilde\chi_i}^{x_j}),{\tilde\chi_i}^{x_j})\})|+$$
$$+\int\limits_{{\tilde\chi_i}^{x_2}}^{{\tilde\chi_i}^{x_1}}\Big|f_i\Big(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau+\int\limits_{{\tilde\chi_i}^{x_1}}^{t}\Big|\Delta_jf_i\Big(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant(\mu_0(1+2H+2nk_1)\frac{4}{\gamma}e+T_0f_0(1+n\tilde L)e+F\frac{4}{\gamma}e)|\Delta x_j|.$$

Отже, в будь-якому випадку правильна нерівність

$$|\Delta_jS_i^u(x_j,t)|\leqslant k_2|\Delta x_j|,$$

де $k_2 = \max\{g_0 e, \mu_0(1+2H+2nk_1)\frac{4}{\gamma}e + F\frac{4}{\gamma}e\}+1$. Оскільки $|\Delta_j S_i^u(x,t_j)| \leqslant$ $\leqslant (F+\Lambda k_2)|\Delta t_j|$, то $S_i^u \in Lip(G_{T_0}^{S^a}, L)$, якщо

$$F+\max\{1,\Lambda\}k_2 \leqslant L. \tag{27}$$

Введемо позначення $[\varphi_i]_x(\tau) \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_i(\tau;x,t,u) = (\varphi_i)'_x(\tau) + \sum\limits_j (\varphi_i)'_{u_j}(u_j)'_x$ та аналогічні для $[\varphi_i]_t(\tau)$. Перейдемо до перевірки умови **H4**. Зауважимо, що

$$(S_i^u)'_x(x,t) = \frac{\partial\tilde\vartheta_i}{\partial x}(x,t,\tilde u,u,a) + (Y_i\tilde u)(x,t,a) + (Z_i\tilde u)(x,t),$$

де

$$\frac{\partial\tilde\vartheta_i}{\partial x}(x,t,\tilde u,u,a) = \begin{cases} g_i'(\widetilde\varphi_i(0))[\widetilde\varphi_i]_x(0), \qquad \text{якщо } \tilde\chi_i = 0\ ; \\ \Big[(\mu_k^i)'_t(\tilde\chi_i, S^a(\tilde\chi_i), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde\chi_i),\tilde\chi_i)\})+ \\ +\sum\limits_{m=1}^{2}(\mu_k^i)'_{a_m}(\tilde\chi_i, S^a(\tilde\chi_i), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde\chi_i),\tilde\chi_i)\})\times \\ \times h_m(\tilde\chi_i, a(\tilde\chi_i), u(a(\tilde\chi_i),\tilde\chi_i))+ \\ +\sum\limits_{\substack{s\notin I_{k'}\\ k'=1,2}}(\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}(\tilde\chi_i, S^a(\tilde\chi_i), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde\chi_i),\tilde\chi_i)\})\times \\ \times[(S_s^u)'_x(S_{k'}^a(\tilde\chi_i),\tilde\chi_i)h_{k'}(\tilde\chi_i, a(\tilde\chi_i), u(a_{k'}(\tilde\chi_i),\tilde\chi_i))+ \\ +(S_s^u)'_t(S_{k'}^a(\tilde\chi_i),\tilde\chi_i)]\Big](\tilde\chi_i)'_x, \qquad \text{якщо } \tilde\chi_i > 0, \\ \quad \widetilde\varphi_i(\tilde\chi_i) = S_k^a(\tilde\chi_i), \quad i\in I_k, \quad k=1,2, \end{cases}$$

$$(Y_i\tilde u)(x,t,a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \tilde\chi_i = 0\ ; \\ -f_i(S_k^a(\tilde\chi_i),\tilde\chi_i,\tilde u(S_k^a(\tilde\chi_i),\tilde\chi_i))(\tilde\chi_i)'_x, & \text{якщо } \tilde\chi_i > 0, \\ \widetilde\varphi_i(\tilde\chi_i) = S_k^a(\tilde\chi_i), \quad i\in I_k, \quad k=1,2, \end{cases}$$

$$(Z_i\tilde u)(x,t) = \int\limits_{\tilde\chi_i}^{t}\Big((f_i)'_x(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(f_i)'_{\tilde u_j}(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau))(\tilde u_j)'_x(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau)\Big)[\widetilde\varphi_i]_x(\tau)d\tau.$$

Крім того, якщо $\tilde\chi_i = 0$, то

$$(S_i^u)'_t(x,t) = g_i'(\widetilde\varphi_i(0))[\widetilde\varphi_i]_t(0) + f_i(x,t,\tilde u(x,t)) + \int\limits_0^t\Big((f_i)'_x(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(f_i)'_{u_j}(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau))(\tilde u_j)'_x(\widetilde\varphi_i(\tau),\tau)\Big)[\widetilde\varphi_i]_t(\tau)d\tau.$$

Зазначимо, що правильні рівності

$$[\widetilde\varphi_i]_x(\tau) = \exp\Big(-\int\limits_\tau^t\Big((\lambda_i)'_x(\widetilde\varphi_i(\theta),\theta,\tilde u(\widetilde\varphi_i(\theta),\theta))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i)'_{u_j}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta))(\tilde{u}_j)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta)\Big)d\theta\Big),$$

$$(\tilde{\chi}_i)'_x=[\widetilde{\varphi}_i]_x(\tilde{\chi}_i)\Big(h_k(\tilde{\chi}_i,a(\tilde{\chi}_i),u(a(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i))-\lambda_i(S^a_k(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i,\tilde{u}(S^a_k(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i))\Big)^{-1},$$

$$[\widetilde{\varphi}_i]_t(\tau)=-\lambda_i(x,t,\tilde{u}(x,t))\exp\Big(-\int_{\tau}^{t}\Big((\lambda_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i)'_{u_j}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta))(\tilde{u}_j)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta)\Big)d\theta\Big).$$

Нехай $\tilde{\chi}_i=0$ і виконуються нерівності

$$\Lambda(1+nU_1)T_0\leqslant 1, \tag{28}$$

$$T_0F(1+nU_1)\max\{1,\Lambda\}e\leqslant 1. \tag{29}$$

Тоді справджуються оцінки

$$|(S^u_i)'_x(x,t)|\leqslant G_1e+T_0F(1+nU_1)e\leqslant G_1e+1,$$

$$|(S^u_i)'_t(x,t)|\leqslant G_1\Lambda e+F+T_0F(1+nU_1)\Lambda e\leqslant G_1\Lambda e+F+1.$$

При $\tilde{\chi}_i>0$

$$|(S^u_i)'_x(x,t)|\leqslant\Big(M+2MH+2nM((G_1e+1)H+(G_1\Lambda e+F+1))\Big)e\frac{2}{\gamma}+Fe\frac{2}{\gamma}+1.$$

Отже, ми можемо забезпечити виконання нерівності

$$|(S^u_i)'_x(x,t)|\leqslant U_1,\quad (x,t)\in G^{S^a}_{T_0},$$

якщо

$$\max\Big\{[M+2MH+F+2nM((G_1e+1)H+(G_1\Lambda e+F+1))]e\frac{2}{\gamma},G_1e\Big\}+1\leqslant U_1. \tag{30}$$

Розглянемо умову **H5**, тобто переконаємося, що $(S^u_i)'_x\in Lip(G^{S^a}_{T_0},L_1)$, $i=\overline{1,n}$.

Лема 3. *Нехай* $(x_j,t_j)\in G^a_{T_0}$, $j=1,2$, $(u,a)\in Q$. *Тоді справджуються оцінки*

$$|\Delta_j[\varphi_i]^{x_j}_x(\tau)\Big|\leqslant k_3|\Delta x_j|,\qquad |\Delta_j[\varphi_i]^{t_j}_x(\tau)\Big|\leqslant(\Lambda k_3+e\Lambda(1+nU_1))|\Delta t_j|,$$

де $k_3=e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}T_0(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1)+n\Lambda L_1)e^{\lambda_0(1+nL)T_0}$.

Доведення. Застосувавши нерівність $|e^a-e^b|\leqslant e^c|a-b|$, де $c\in(a,b)$ та провівши відповідні оцінки, отримаємо твердження леми 3. □

Зауваження 2. Аналогічна оцінка справджується для функцій $[\widetilde{\varphi}_i]_x$ в області $G^{S^a}_{T_0}$.

Згідно з попередніми припущеннями та врахувавши

$$T_0\Big(\lambda_0(1+n\tilde{L})(1+nU_1)+n\Lambda L_1\Big)e^2\leqslant 1, \tag{31}$$

отримуємо оцінку $k_3\leqslant 1$.

Лема 4. *Нехай* $(x,t) \in G^a_{T_0}$, $\tau_j \in [\chi_i, t]$, $j = 1,2$, $(u,a) \in Q$. *Тоді*

$$|\Delta_j[\varphi_i]_x(\tau_j)| \leqslant e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)|\Delta\tau_j|.$$

Доведення цієї леми з незначними змінами повторює доведення леми 3.

Зауваження 3. Аналогічна оцінка справджується для функцій $[\widetilde{\varphi}_i]_x$ в області $G^{S^a}_{T_0}$.

Із припущень доведення отримаємо, що

$$|\Delta_j[\tilde{\varphi}_i]_x(\tau_j)| \leqslant \Lambda(1+nU_1)e|\Delta\tau_j|.$$

Лема 5. *Нехай* $\{(x_1,t_1),(x_2,t_2)\} \subset G^{S^a}_{T_0}$, $k = 1,2$, $(u,a) \in Q$ *і для фіксованого* $k \in \{1,2\}$: $\widetilde{\varphi}_i^{x_j,t_j}(\tilde{\chi}_i^{x_j,t_j}) = S^a_k(\tilde{\chi}_i^{x_j,t_j})$, $j = 1,2$, *а також виконуються умови (17), (24). Тоді*

$$|\Delta_j(\tilde{\chi}_i^{x_j})'_x| \leqslant \Big(\frac{2}{\gamma}(k_3 + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}) +$$

$$+e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\frac{4}{\gamma^2}(h_0(1+2n\tilde{L})(2(\mathcal{H}+1)+1) + \lambda_0(1+n\tilde{L})(\mathcal{H}+2))\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}\Big)|\Delta x_j|,$$

$$|\Delta_j(\tilde{\chi}_i^{t_j})'_x| \leqslant \Big(\Lambda\Big(\frac{2}{\gamma}(k_3 + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}) +$$

$$+e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\frac{4}{\gamma^2}(h_0(1+2n\tilde{L})(2(\mathcal{H}+1)+1) + \lambda_0(1+n\tilde{L})(\mathcal{H}+2))\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}\Big) +$$

$$+\frac{2}{\gamma}\Lambda e(1+nU_1)\Big)|\Delta t_j|.$$

Доведення леми 5 безпосередньо випливає з означень відповідних функцій і попередніх оцінок.

Позначимо $k_4 = \dfrac{2}{\gamma}(1 + e^2\Lambda(1+nU_1)\dfrac{4}{\gamma}) + e^2\dfrac{16}{\gamma^3}(h_0(1+2n\tilde{L})(2(\mathcal{H}+1)+1) + \lambda_0(1+n\tilde{L})(\mathcal{H}+2))$. Тоді, врахувавши зроблені припущення, маємо

$$|\Delta_j(\tilde{\chi}_i^{x_j})'_x| \leqslant k_4|\Delta x_j|, \quad |\Delta_j(\tilde{\chi}_i^{t_j})'_x| \leqslant (\Lambda k_4 + \frac{2}{\gamma}\Lambda e(1+nU_1))|\Delta t_j|.$$

Нехай $\tilde{\chi}_i^{x_j} = 0$, $j = 1,2$. Розглянемо

$$|\Delta_j(S^u_i)'_x(x_j,t)| \leqslant |\Delta_j g'_i(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(0))||[\widetilde{\varphi}_i^{x_1}]_x(0)| + |\Delta_j[\widetilde{\varphi}_i^{x_j}]_x(0)||g'_i(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(0))| +$$

$$+\int\limits_0^t \Big[(|\Delta_j(f_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau))| +$$

$$+\sum_{m=1}^n[|\Delta_j(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau,\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau))|(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_1}(\tau),\tau) +$$

$$+(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau))|\Delta_j(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau)|])[\widetilde{\varphi}_i^{x_1}]_x(\tau) +$$

$$+\Big((f_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau)) +$$

$$+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau))(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\widetilde{\varphi}_i^{x_j}]_x(\tau)|\Big]d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \Big(G_1 + g_0 e^2 + T_0(f_0(1+\tilde{L})(1+nU_1) + nFL_1)e^2 + T_0F(1+nU_1)\Big)|\Delta x_j|.$$

Якщо

$$T_0\Big[(f_0(1+n\tilde{L})(1+nU_1) + nFL_1)e^2 + F(1+nU_1)\Big] \leqslant 1, \tag{32}$$

то

$$|\Delta_j (S_i^u)'_x(x_j, t)| \leqslant (G_1 + g_0 e^2 + 1)|\Delta x_j|.$$

Для випадку $\tilde{\chi}_i^{x_j} > 0$, $j = 1,2$ також проведемо оцінки, сформульовані у вигляді таких двох лем.

Лема 6. *Нехай* $t_j \in [0, T_0], j = 1,2, (u,a) \in Q$. *Тоді*

$$|\Delta_j [\varphi_i^{a_k(t_j), t_j}]_x(\tau)| \leqslant \Big(T_0 e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} e^{\lambda_0(1+nL)T_0}(\mathcal{H} + 1 + \Lambda)(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1)+$$

$$+n\Lambda L_1) + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)\Big)|\Delta t_j|.$$

Зауваження 4. Аналогічна оцінка справджується для $[\widetilde{\varphi}_i^{S_k^a, t_j}]_x$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1,2$.

Якщо

$$T_0 e^2 (\mathcal{H} + 1 + \Lambda)(\lambda_0(1+nU_1)(1+n\tilde{L}) + n\Lambda L_1) \leqslant 1, \tag{33}$$

то

$$|\Delta_j [\widetilde{\varphi}_i^{S_k^a(t_j), t_j}]_x(\tau)| \leqslant k_5 |\Delta t_j|,$$

де $k_5 = 1 + e\Lambda(1+nU_1)$.

Лема 7. *Нехай* $t_j \in [0, T_0]$, $j = 1,2$, $(u,a) \in Q$, *а також виконуються умови леми 2. Тоді правильна оцінка*

$$|\Delta_j [\varphi_i^{a_k(t_j), t_j}]_t(\tau)| \leqslant \Big(\lambda_0(1+nL)(\mathcal{H}+2)e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} + \Lambda(T_0 e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\times$$

$$\times e^{\lambda_0(1+nL)T_0}(\mathcal{H} + 1 + \Lambda)(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1) + n\Lambda L_1) + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1))\Big)|\Delta t_j|.$$

Доведення цих лем одразу випливають з означень функцій $\varphi_i(\tau)$, $i = \overline{1,n}$.

Зауваження 5. Аналогічна оцінка виконуються для $[\widetilde{\varphi}_i^{S_k^a(t_j), t_j}]_t$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1,2$.

Позначимо $k_6 = \lambda_0(1+n\tilde{L})(\mathcal{H}+2)e + \Lambda k_5$. Тоді

$$|\Delta_j [\widetilde{\varphi}_i^{S_k^a(t_j), t_j}]_t(\tau)| \leqslant k_6 |\Delta t_j|.$$

З цих оцінок маємо

$$|\Delta_j (S_i^u)'_x(S_k^a(t_j), t_j)| \leqslant \Big[g_0(H+\Lambda)e^2 + G_1 k_5 + F(1+nU_1)e + T_0(f_0(1+n\tilde{L})\times$$

$$\times(1+nU_1) + nFL_1)e^2(H+\Lambda) + T_0F(1+nU_1)k_5\Big]|\Delta t_j|.$$

Якщо ж

$$T_0\Big((f_0(1+n\tilde{L})(1+nU_1) + nFL_1)e^2(H+\Lambda) + F(1+nU_1)k_5\Big) \leqslant 1, \tag{34}$$

то

$$|\Delta_j (S_i^u)'_x(S_k^a(t_j), t_j)| \leqslant [g_0(H+\Lambda)e^2 + G_1 k_5 + F(1+nU_1)e + 1]|\Delta t_j| = k_7|\Delta t_j|.$$

Перейдемо до оцінки такої різниці

$$|\Delta_j (S_i^u)'_t (S_k^a(t_j), t_j)| \leqslant \Big[g_0(H+\Lambda)e^2\Lambda + G_1 k_6 + f_0(1+n\tilde{L})(H+1) + \Lambda e F(1+nU_1) +$$
$$+ T_0 (f_0(1+n\tilde{L})(H+\Lambda)e(1+nU_1) + nFL_1(H+\Lambda)e)e\Lambda + T_0 F(1+nU_1)k_6 \Big] |\Delta t_j|.$$

Зазначимо, якщо виконується нерівність

$$T_0 \Big((f_0(1+n\tilde{L})(1+nU_1) + nFL_1)(H+\Lambda)e^2\Lambda + F(1+nU_1)k_6 \Big) \leqslant 1, \qquad (35)$$

то

$$|\Delta_j (S_i^u)'_t (S_k^a(t_j), t_j)| \leqslant [g_0(H+\Lambda)e^2\Lambda + G_1 k_6 + f_0(1+n\tilde{L})(H+1) +$$
$$+ \Lambda e F(1+nU_1) + 1] |\Delta t_j| = k_8 |\Delta t_j|.$$

Легко бачити, що правильна нерівність

$$|(S_i^u)'_x (S_k^a(t), t) h_k(t, a(t), u(a(t), t)) + (S_i^u)'_t (S_k^a(t), t)| \leqslant$$
$$\leqslant (G_1 e + 1)H + G_1 \Lambda e + F + 1 = k_9.$$

Повернемося до перевірки умови **H5** при $\tilde{\chi}_i > 0$, тобто

$$|\Delta_j (S_i^u)'_x (x_j, t)| \leqslant \Big[|\Delta_j (\mu_k^i)'_t (\tilde{\chi}_i^{x_j}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})\})| +$$
$$+ \sum_{m=1}^{2} \Big[|\Delta_j (\mu_k^i)'_{a_m} (\tilde{\chi}_i^{x_j}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})\})| \times$$
$$\times h_m(\tilde{\chi}_i^{x_1}, a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1})) + |(\mu_k^i)'_{a_m} (\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\})| \times$$
$$\times |\Delta_j h_m(\tilde{\chi}_i^{x_j}, a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j}))| \Big] +$$
$$+ \sum_{\substack{s \notin I_{k'} \\ k'=1,2}} \Big(|\Delta_j (\mu_k^i)'_{w_s^{k'}} (\tilde{\chi}_i^{x_j}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})\})| \times$$
$$\times [(S_s^u)'_x (S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1}) h_{k'}(\tilde{\chi}_i^{x_1}, a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1})) +$$
$$+ (S_s^u)'_t (S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1})] + (\mu_k^i)'_{w_s^{k'}} (\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\}) \times$$
$$\times [|\Delta_j (S_s^u)'_x (S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})| h_{k'}(\tilde{\chi}_i^{x_1}, a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1})) +$$
$$+ |\Delta_j h_{k'}(\tilde{\chi}_i^{x_j}, a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})) (S_s^u)'_x (S_{k'}^a)(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2}) +$$
$$+ |\Delta_j (S_s^u)'_t (S_{k'}^a)(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})|] \Big) \Big] (\tilde{\chi}_i^{x_1})'_x +$$
$$+ \Big((\mu_k^i)'_t (\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\}) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{2} (\mu_k^i)'_{a_m} (\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\}) \times$$
$$\times h_m(\tilde{\chi}_i^{x_2}, a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})) +$$
$$+ \sum_{\substack{s \notin I_{k'} \\ k'=1,2}} (\mu_k^i)'_{w_s^{k'}} (\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\}) \times$$
$$\times [(S_s^u)'_x (S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2}) h_{k'}(\tilde{\chi}_i^{x_2}, a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})) +$$
$$+ (S_s^u)'_t (S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})] \Big) |\Delta_j (\tilde{\chi}_i^{x_j})'_x| +$$

$$+|\Delta_j f_i(S_k^a(\tilde\chi_i^{x_j}),\tilde\chi_i^{x_j},\tilde u(S_k^a(\tilde\chi_i^{x_j}),\tilde\chi_i^{x_j}))|(\tilde\chi_i^{x_1})'_x+$$
$$+|f_i(S_k^a(\tilde\chi_i^{x_2}),\tilde\chi_i^{x_2},\tilde u(S_k^a(\tilde\chi_i^{x_2}),\tilde\chi_i^{x_2}))||\Delta_j(\tilde\chi_i^{x_j})'_x|+$$
$$+\int\limits_{\tilde\chi_i^{x_1}}^{\tilde\chi_i^{x_2}}\Big((f_i)'_x(\widetilde\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau))+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde u_m}(\widetilde\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau))\times$$
$$\times(\tilde u_m)'_x(\widetilde\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau)\Big)[\widetilde\varphi_i^{x_1}]_x(\tau)d\tau+\int\limits_{\tilde\chi_i{}^{x_2}}^{t}\Big[\Big(|\Delta_j(f_i)'_x(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n\Big(|\Delta_j(f_i)'_{\tilde u_m}(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau))|(\tilde u_m)'_x(\widetilde\varphi_i^{x_1}(\tau),\tau)+$$
$$+(f_i)'_{\tilde u_m}(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau))|\Delta_j(\tilde u_m)'_x(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau)|\Big)\Big)[\widetilde\varphi_i^{x_1}]_x(\tau)+$$
$$+\Big((f_i)'_x(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau))+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde u_m}(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau))\times$$
$$\times(\tilde u_m)'_x(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\widetilde\varphi_i^{x_j}]_x(\tau)|\Big]d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\Big[\Big(\mu_0(1+2H+2nk_1)(1+2H+2nk_9)+$$
$$+2Mh_0(1+2(\mathcal H+1)+2n\tilde L(\mathcal H+2))+2Mn(k_7H+(G_1e+1)h_0(1+2(\mathcal H+1)+$$
$$+2n\tilde L(\mathcal H+2))+k_8)\Big)\frac{8}{\gamma^2}e^2+M(1+2H+2nk_9)k_4+$$
$$+f_0(1+H)(1+n\tilde L)\frac{8}{\gamma^2}e^2+Fk_4+F(1+nU_1)\frac{4}{\gamma}e^2+1\Big]|\Delta x_j|=k_{10}|\Delta x_j|.$$

Провівши аналогічні міркування та використавши вже знайдені оцінки, маємо

$$|\Delta_j(S_i^u)'_x(x,t_j)|\leqslant\Lambda k_{10}+e\Lambda(1+nU_1)\Big(\frac{2}{\gamma}(M(1+2H+2nk_9)+F)+$$
$$+1+eF(1+nU_1)\Big)|\Delta t_j|=k_{11}|\Delta t_j|.$$

Отже, $(S_i^u)'_x\in Lip(G_{T_0}^{S^a},L_1)$, $i=\overline{1,n}$, якщо

$$\max\{k_{10},k_{11},G_1+g_0e^2+1\}\leqslant L_1. \tag{36}$$

Тепер дослідимо стискуючі властивості оператора S в просторі Q.

Нехай $(u^j,a^j)\in Q,\ j=1,2$. Розглянемо

$$|\Delta_jS_k^{a^j}(t)|\leqslant\int\limits_0^t|\Delta_jh_k(\tau,a^j(\tau),u^j(a^j(\tau),\tau))|d\tau\leqslant2T_0h_0\rho(1+n(1+L)).$$

Перейдемо до оцінки різниць $|\Delta_j\tilde u_i^j(x,t)|$ і $|\Delta_j(\tilde u_i^j)'_x(x,t)|$, якщо $(x,t)\in G_{T_0}^{S^{a^1}}\cap$ $\cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$. Розглянемо найзагальніший випадок поведінки невідомих меж областей, тобто $(x,t)\in G_{T_0}^{S^{a^1}}\cap G_{T_0}^{S^{a^2}}:\ S_1^{a^2}(t)\leqslant x\leqslant S_2^{a^1}(t),\ 0\leqslant t\leqslant T_0$. Для визначеності будемо вважати, що $S_1^{a^2}(t) \leqslant a_1^2(t) \leqslant a_1^1(t)$. Тоді утворену область можна розбити на три підобласті і провести оцінку на кожній з них:

I) $S_1^{a^2}(t) \leqslant x \leqslant a_1^2(t)$,

$$|\Delta_j \tilde{u}_i^j(x,t)| \leqslant$$
$$\leqslant |(u_i^1)_x(a_1^1(t),t)(x-a_1^1(t)) + u_i^1(a_1^1(t),t) - (u_i^2)_x(a_1^2(t),t)(x-a_1^2(t)) - u_i^2(a_1^2(t),t)| \leqslant$$
$$\leqslant U_1|a_1^1(t)-a_1^2(t)| + L|a_1^1(t)-a_1^2(t)| + \rho \leqslant (2(\mathcal{H}+1)(L_1+1)+U_1+L+1)\rho = c\rho;$$
$$|\Delta_j(\tilde{u}_i^j)'_x(x,t)| \leqslant |(u_i^1)_x(a_1^1(t),t) - (u_i^2)_x(a_1^2(t),t)| \leqslant \rho + L_1\rho \leqslant (L_1+1)\rho;$$

II) $a_1^2(t) \leqslant x \leqslant a_1^1(t)$,

$$|\Delta_j \tilde{u}_i^j(x,t)| \leqslant |(u_i^1)_x(a_1^1(t),t)(x-a_1^1(t)) + u_i^1(a_1^1(t),t) - u_i^2(x,t)| \leqslant$$
$$\leqslant U_1|a_1^1(t)-a_1^2(t)| + L|a_1^1(t)-a_1^2(t)| + \rho \leqslant (L+U_1+1)\rho;$$
$$|\Delta_j(\tilde{u}_i^j)'_x(x,t)| \leqslant |(u_i^1)_x(a_1^1(t),t) - (u_i^2)_x(x,t)| \leqslant \rho + L_1\rho \leqslant (L_1+1)\rho;$$

III) $a_1^1(t) \leqslant x$,

$$|\Delta_j \tilde{u}_i^j(x,t)| \leqslant |u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| \leqslant \rho;$$
$$|\Delta_j(\tilde{u}_i^j)'_x(x,t)| \leqslant |(u_i^1)_x(x,t) - (u_i^2)_x(x,t)| \leqslant \rho.$$

Тепер одержимо для випадку $S_1^{a^2}(t) \leqslant a_2^1(t) \leqslant a_1^1(t)$ загальну оцінку

$$|\Delta_j \tilde{u}_i^j(x,t)| \leqslant c\rho, \qquad |\Delta_j(\tilde{u}_i^j)'_x(x,t)| \leqslant (L_1+1)\rho.$$

Всі інші випадки будуть лише частковими підвипадками розглянутого.

Правильні такі леми.

Лема 8. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j,a^j) \in Q$, $j=1,2$. *Тоді функція* $\varphi_i(\tau)$ *задовольняє нерівність*

$$|\Delta_j \varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau)| \leqslant \lambda_0 n e^{\lambda_0 T_0(1+n\tilde{L})} T_0 c\rho.$$

Доведення аналогічне до доведення леми 1.

З попередніх припущень одержуємо

$$|\Delta_j \varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau)| \leqslant \lambda_0 e n T_0 c\rho.$$

Лема 9. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j,a^j) \in Q$, $j=1,2$ *і для фіксованого* $k \in \{1,2\}$ $\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}) = S_k^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})$, $j=1,2$, *а параметри* U *та* T_0 *задовольняють умови (9), (24). Тоді справджується нерівність*

$$|\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}| \leqslant \frac{4}{\gamma} e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} \lambda_0 n T_0 c\rho + \frac{8}{\gamma} T_0 h_0 \rho(1+n(L+1)).$$

Доведення. Нехай $k=1$ і $\chi_i^{\tilde{u}^1,S^{a^1}} > \chi_i^{\tilde{u}^2,S^{a^2}}$. Розглянемо різницю $\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau) - S_1^{a^2}(\tau)$. За теоремою Лагранжа справджується оцінка

$$|\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\chi_i^{\tilde{u}^1,S^{a^1}}) - S_1^{a^2}(\chi_i^{\tilde{u}^1,S^{a^1}})| = |\lambda_i(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau_0),\tau_0,\tilde{u}^2(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau_0),\tau_0)) -$$
$$- h_1(\tau_0,a^2(\tau_0),u^2(a^2(\tau_0),\tau_0))||\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}| \geqslant \frac{\gamma}{4}|\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}|.$$

Враховуючи лему 8, одержуємо

$$|\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}| \leqslant \frac{4}{\gamma}|\Delta_j \varphi_i^{\tilde{u}^j}(\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}})| + \frac{4}{\gamma}|\Delta_j S_1^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}})| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\gamma} e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}\lambda_0 n T_0 c\rho + \frac{8}{\gamma} T_0 h_0 \rho(1 + n(L+1)).$$

$\square$

При виконанні припущень теореми 1 оцінка з цієї леми дещо спроститься

$$|\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}| \leqslant \frac{4}{\gamma} e n\lambda_0 T_0 c\rho + \frac{8}{\gamma} T_0 h_0 \rho(1 + n(L+1)).$$

Лема 10. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1, 2$. *Тоді*

$$|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_x(\tau)| \leqslant k_{12} T_0 \rho,$$

де $k_{12} = \lambda_0(n(1+n\tilde{L})T_0\lambda_0 e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} + 1)(1 + nU_1)e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}c +$
$+ n\Lambda(L_1\lambda_0 T_0\ e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} + 1)e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}(L_1 + 1).$

Доведення очевидне.

Враховуючи попередні умови, а також припущення

$$L_1 \lambda_0 T_0 e \leqslant 1, \tag{37}$$

одержуємо

$$|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_x(\tau)| \leqslant k_{13} T_0 \rho,$$

де $k_{13} = \lambda_0(e+1)(1 + nU_1) + enc + 2\Lambda n(L_1 + 1)$.

Введемо іншу метрику

$$\rho_0((u^1, a^1), (u^2, a^2)) = \max\Big\{ \max_{\substack{k=1,2\\ t\in[0,T]}} |a_k^1(t) - a_k^2(t)|, \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ (x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^2}}} |u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| \Big\}$$

і позначимо $\rho_0 = \rho_0((u^1, a^1), (u^2, a^2))$.

Зауважимо, що провівши аналогічні міркування, як і попередньо, отримуємо

$$\rho_0((\tilde{u}^1, a^1), (\tilde{u}^2, a^2)) \leqslant c\rho_0.$$

Наступні очевидні оцінки сформулюємо у вигляді двох допоміжних лем.

Лема 11. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1, 2$. *Тоді*

$$|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_t(\tau)| \leqslant \Lambda k_{12} T_0 \rho + \lambda_0 n e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} c\rho_0.$$

Лема 12. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1, 2$. *Тоді*

$$|\Delta_j(\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}})'_x| \leqslant \Big[\frac{2}{\gamma} k_{12} + \frac{4}{\gamma^2} e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\lambda_0 c\Big(\Lambda(1+nU_1)n e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} +$$

$$+ 2(1+n\tilde{L})h_0(1+n(L+1))\Big) + \frac{16}{\gamma^3} e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}\lambda_0 n(1+n\tilde{L})c \times$$

$$\times (h_0(\mathcal{H}+1) + \lambda_0(H+1))\Big] T_0 \rho + \Big[\frac{4}{\gamma^2} n e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}(h_0(1+n(L+1)) + \lambda_0 n)\Big] c\rho_0.$$

Згідно з попередніми припущеннями

$$|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_t(\tau)| \leqslant \Lambda k_{13}T_0\rho + \lambda_0 enc\rho_0, \qquad |\Delta_j(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})'_x| \leqslant k_{14}T_0\rho + k_{15}\rho_0,$$

де $k_{14} = \dfrac{2}{\gamma}k_{13} + \dfrac{4}{\gamma^2}e\lambda_0 n\Big(\Lambda e(1+nU_1)+(1+n\tilde{L})h_0(1+n(L+1))\Big)c+ \dfrac{16}{\gamma^3}e^2n\lambda_0(1+n\tilde{L})c\times$ $\times\Big(h_0(\mathcal{H}+2)+\lambda_0(H+1)\Big)$, $k_{15} = \dfrac{4}{\gamma^2}en\Big(h_0(1+n(L+1))+2\lambda_0 n\Big)c$. Перейдемо до оцінки різниці $|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)|$. Нехай $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1,2$. Розглянемо різні випадки поведінки характеристик, припустивши виконання нерівності

$$2(H+\Lambda)T_0 \leqslant a_2^0 - a_1^0. \tag{38}$$

Нехай $\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}} = 0,\ j = 1,2$. Тоді

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)| \leqslant |\Delta_j g_i(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(0))| + \int\limits_0^t |\Delta_j f_i(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau,\tilde{u}^j(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau))|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant g_0\lambda_0 nT_0 ec\rho + T_0 f_0(1+n\tilde{L})\lambda_0 nT_0 ec\rho + T_0 f_0 nc\rho \leqslant k_{16}T_0\rho,$$

де $k_{16} = [g_0\lambda_0 ne + f_0 n(e+1)]c$.

Якщо ж $\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}} > 0$, $\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}) = S_1^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})$, $j = 1,2$ і для визначеності $\chi_i^{\tilde{u}^1,S^{a^1}} < \chi_i^{\tilde{u}^2,S^{a^2}}$, то обидві характеристики перетинають ліву бічну межу відповідної області. Маємо оцінку

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)| \leqslant \Big|\Delta_j \mu_i^k\Big(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}, S^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})\{S_s^{u^j}(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})\}\Big)\Big|+$$

$$+\int\limits_{\chi_i^{\tilde{u}^2,S^{a^2}}}^t |\Delta_j f_i(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau,\tilde{u}^j(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau))|d\tau + \int\limits_{\chi_i^{\tilde{u}^1,S^{a^1}}}^{\chi_i^{\tilde{u}^2,S^{a^2}}} |f_i(\varphi_i^{\tilde{u}^1}(\tau),\tau,\tilde{u}^1(\varphi_i^{\tilde{u}^1}(\tau),\tau))|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \Big((\mu_0(1+2H+2nk_1(H+1))+F)\frac{4}{\gamma}\Big(\lambda_0 ne + 2h_0(1+n(\tilde{L}+1))\Big)c+$$

$$+2\mu_0(1+nk_1)2h_0(1+n(L+1))c + n\mu_0 k_{16} + f_0 n(e+1)c\Big)T_0\rho.$$

Нехай $\chi_i^{\tilde{u}^1,S^{a^1}} > 0$, $\chi_i^{\tilde{u}^2,S^{a^2}} = 0$, $\varphi_i^{\tilde{u}^1}(\chi_i^{\tilde{u}^1,S^{a^1}}) = S_1^{a^1}(\chi_i^{\tilde{u}^1,S^{a^1}})$. Цей випадок зводиться до двох попередніх. Для обґрунтування цього визначимо такі функції

$$a_1^3(t) = \max\{a_1^1(t), a_1^2(t)\}, \quad a_2^2(t) = \min\{a_2^1(t), a_2^2(t)\},$$

$$u^\alpha(x,t) = \alpha u^1(x,t) + (1-\alpha)u^2(x,t), \qquad \alpha \in [0,1].$$

Легко бачити таке: якщо $(u^1,a^1) \in Q$, $(u^2,a^2) \in Q$, то $(u^\alpha(x,t), a^3(t)) \in Q$ для всіх α. Розглянемо характеристику $x = \varphi(\tau;x,t,\alpha u^1+(1-\alpha)u^2) = \varphi^\alpha(\tau)$. Зауважимо, що $\varphi^\alpha(\tau)$ неперервна за параметром α. Тоді існує таке α_0, $\varphi^{\alpha_0}(0) = a_1^0$. Позначимо $u^3 = u^{\alpha_0}$. Розглянемо різницю

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)| \leqslant |S_i^{u^1}(x,t) - S_i^{u^3}(x,t)| + |S_i^{u^3}(x,t) - S_i^{u^2}(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \Big((\mu_0(1+2H+2nk_1(H+1))+F)\frac{4}{\gamma}(\lambda_0 ne+2h_0(1+n(L+1)))c+2\mu_0(1+nk_1)\times$$
$$\times 2h_0c(1+n(L+1))+n\mu_0k_{16}+f_0n(e+1)c\Big)T_0\cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^3}}}|u_i^1-u_i^3|+k_{16}T_0\times$$
$$\times \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^2}\cap G_T^{a^3}}}|u_i^3-u_i^2|\leqslant \Big((\mu_0(1+2H+2nk_1(H+1))+F)\frac{4}{\gamma}(\lambda_0 ne+$$
$$+2h_0(1+n(L+1)))c+2\mu_0(1+nk_1)2h_0(1+n(L+1))c+$$
$$+(1+n\mu_0)k_{16}+f_0n(e+1)c\Big)T_0\cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^2}}}|u_i^1-u_i^2|\leqslant$$
$$\leqslant \Big((\mu_0(1+2H+2nk_1(H+1))+F)\frac{4}{\gamma}(\lambda_0 ne+2h_0(1+n(L+1)))c+$$
$$+2\mu_0(1+nk_1)2h_0(1+n(L+1))c+(1+n\mu_0)k_{16}+f_0n(e+1)c\Big)T_0\rho=k_{17}T_0\rho.$$

Отже, в будь-якому з цих випадків правильна оцінка

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)|\leqslant k_{17}T_0\rho.$$

Тому

$$\rho_0((S^{u^1},S^{a^1}),(S^{u^2},S^{a^2}))\leqslant \max\{2h_0(1+n(L+1)),k_{17}\}T_0\rho=K_1T_0\rho.$$

Тепер оцінимо $|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x|$ при наведених випадках поведінки характеристик. Нехай маємо $\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}=0,\ j=1,2$. Тоді

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x(x,t)|\leqslant |\Delta_j g_i'(\varphi_i^{\tilde u^j}(0))|[\varphi_i^{\tilde u^1}]_x(0)+g_i'(\varphi_i^{\tilde u^2}(0))|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde u^j}]_x(0)|+$$
$$+\int\limits_0^t\Big(|\Delta_j(f_i)'_x(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau,\tilde u^j(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n|\Delta_j(f_i)'_{\tilde u_m}(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau,\tilde u^j(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau))|(\tilde u_m^1)'_x(\varphi_i^{\tilde u^1}(\tau),\tau)+$$
$$+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde u_m}(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau,\tilde u^2(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau))|\Delta_j(\tilde u_m^j)'_x(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau)|\Big)[\varphi_i^{\tilde u^1}]_x(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\Big((f_i)'_x(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau,\tilde u^2(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde u_m}(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau,\tilde u^2(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau))(\tilde u_m^2)'_x(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde u^j}]_x(\tau)|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant g_0\lambda_0ne^2T_0c\rho+G_1k_{13}T_0\rho+T_0ec\Big((1+nU_1)f_0(1+n\tilde L)\lambda_0enT_0\rho+$$
$$+(1+nU_1)f_0n\rho+nFL_1\lambda_0neT_0\rho+nF\rho\Big)+T_0F(1+nU_1)k_{13}T_0\rho\leqslant$$
$$\leqslant[g_0ne^2\lambda_0c+(G_1+1)k_{13}+f_0en(1+nU_1)(e+1)c+2nFec]T_0\rho=k_{18}T_0\rho.$$

Випишемо ще одну оцінку для цього випадку, яка знадобиться нам надалі

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})_t'(x,t)| \leqslant |\Delta_j g_i'(\varphi_i^{\tilde u^j}(0))|[\varphi_i^{\tilde u^1}]_t(0)+g_i'(\varphi_i^{\tilde u^2}(0))|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde u^j}]_t(0)|+$$
$$+|\Delta_j f_i(x,t,\tilde u^j(x,t))|+\int\limits_0^t\Big(|\Delta_j(f_i)_x'(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau,\tilde u^j(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n|\Delta_j(f_i)_{\tilde u_m}'(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau,\tilde u^j(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau))|(\tilde u_m^1)_x'(\varphi_i^{\tilde u^1}(\tau),\tau)+$$
$$+\sum_{m=1}^n(f_i)_{\tilde u_m}'(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau,\tilde u^2(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau))|\Delta_j(\tilde u_m^j)_x'(\varphi_i^{\tilde u^j}(\tau),\tau)|\Big)[\varphi_i^{\tilde u^1}]_t(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\Big((f_i)_x'(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau,\tilde u^2(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n(f_i)_{\tilde u_m}'(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau,\tilde u^2(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau))(\tilde u_m^2)_x'(\varphi_i^{\tilde u^2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde u^j}]_t(\tau)|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant g_0\lambda_0ne^2T_0\rho\Lambda ec+G_1k_{13}\Lambda T_0\rho+\Big(G_1\lambda_0en\rho_0+f_0n\rho_0+$$
$$+T_0\Lambda e\Big((1+nU_1)f_0(1+n\tilde L)\lambda_0neT_0\rho+(1+nU_1)f_0n\rho+nFL_1\lambda_0neT_0\rho+$$
$$+nF\rho\Big)\Big)c+T_0F(1+nU_1)k_{13}\Lambda T_0\rho+T_0F(1+nU_1)\lambda_0enc\rho_0\leqslant$$
$$\leqslant[g_0ne^2\lambda_0\Lambda+(G_1+\Lambda)k_{13}+f_0\Lambda ne(1+nU_1)(e+1)+2n\Lambda Fe]T_0\rho+$$
$$+[f_0n+\lambda_0en(G_1+1)]\rho_0\leqslant k_{19}T_0\rho+k_{20}\rho_0,$$

де $k_{19}=g_0\lambda_0ne^2\Lambda c+(G_1+\Lambda)k_{13}+[ef_0n(1+nU_1)(e+1)+2nF]e\Lambda c$,
$k_{20}=((G_1+1)\lambda_0ne+f_0n)c$.

Оцінимо попередньо

$$|\Delta_j[\varphi_i^{S_k^{a^j}}]_t(\tau)|\leqslant|\Delta_j\lambda_i(S_k^{a^j}(t),t,\tilde u(S_k^{a^j}(t),t))|e+$$
$$+\Lambda e\Big(|\Delta_j(\lambda_i)_x'(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta,\tilde u(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta))|+nU_1|\Delta_j(\lambda_i)_{\tilde u_m}'(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta,\tilde u(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta))|+$$
$$+n\Lambda|\Delta_j(\tilde u_m)(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta)|\Big)\leqslant\lambda_0e(1+n\tilde L)2T_0h_0\rho(1+n(1+L))+$$
$$+\Lambda e(1+nU_1)\lambda_0(1+n\tilde L)e2T_0h_0\rho(1+n(1+L))+ne\Lambda^2L_1e2T_0h_0\rho(1+n(1+L))=$$
$$=2eh_0(1+n(L+1))[\lambda_0(1+n\tilde L)(1+\Lambda e(1+nU_1))+neL_1\Lambda^2]T_0\rho=k_{21}T_0\rho.$$

Тепер можемо розглянути

$$|\Delta_j(S_i^u)_t'(S_k^{a^j}(t),t)|\leqslant|\Delta_jg_i'(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(0))|[\varphi_i^{S_k^{a^1}}]_t(0)+g_i'(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(0))|\Delta_j[\varphi_i^{S_k^{a^j}}]_t(0)|+$$
$$+|\Delta_jf_i(S_k^{a^j}(t),t,\tilde u(S_k^{a^j}(t),t))|+\int\limits_0^t\Big(|\Delta_j(f_i)_x'(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau,\tilde u(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n|\Delta_j(f_i)_{\tilde u_m}'(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau,\tilde u(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau))|(\tilde u_m)_x'(\varphi_i^{S_k^{a^1}}(\tau),\tau)+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(f_i)'_{\tilde u_m}(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau,\tilde u(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau))|\Delta_j(\tilde u_m)'_x(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau)|\Big)[\varphi_i^{S_k^{a^1}}]_t(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\Big((f_i)'_x(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau,\tilde u(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau))|+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(f_i)'_{\tilde u_m}(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau,\tilde u(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau))(\tilde u_m)'_x(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{S_k^{a^j}}]_t(\tau)|d\tau.$$

Припустимо, що виконується нерівність

$$\Lambda F e^2 n L_1 T_0\leqslant 1. \tag{39}$$

Тоді

$$|\Delta_j(S_i^u)'_t(S_k^{a^j})(t),t)|\leqslant[(G_1+1)k_{19}+(g_0\Lambda e^2+f_0(1+n\tilde L)(e+1)+1)2h_0(1+n(L+1))]\times$$
$$\times(L+U_1+1)T_0\rho=k_{22}T_0\rho.$$

Для випадку $\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}>0$, $j=1,2$, для визначеності $\varphi_i^{\tilde u^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})=S_1^{a^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})$, $j=1,2$, маємо

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x(x,t)|\leqslant\frac{2}{\gamma}e\Big|\Delta_j(\mu_i^k)'_t\Big(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}},S^{a^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})\{S_s^{u^j}(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})\}\Big)\Big|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}eH\Big|\Delta_j(\mu_i^k)'_{a_m}\Big(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}},S^{a^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})\{S_s^{u^j}(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})\}\Big)\Big|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}eM|\Delta_jh_m(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}},a^j(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}),u^j(a^j(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}))|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}enk_9\Big|\Delta_j(\mu_i^k)'_{w_s^{k'}}\Big(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}},S^{a^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})\{S_s^{u^j}(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})\}\Big)\Big|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}enMH|\Delta_j(S_s^{u^j})'_x(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}enMU_1|\Delta_jh_{k'}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}},a^j(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}),u^j(a^j(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}))|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}enM|\Delta_j(S_s^{u^j})'_t(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})|+M(1+2H+2nk_1)|\Delta_j(\chi_i^{\tilde u^j,S^{a^j}})'_x|\leqslant$$
$$\leqslant\Big[\frac{2}{\gamma}e\mu_0\Big((1+2H+2nk_1)\frac{4}{\gamma}en\lambda_0+2(1+n\tilde L)h_0(1+n(L+1))+k_{17}\Big)(1+2H+$$
$$+2nk_9)+\frac{4}{\gamma}eM\Big(2h_0(1+nU_1)(\mathcal H+1)(1+n\tilde L)\frac{4}{\gamma}en\lambda_0+\frac{4}{\gamma}en^2\lambda_0L_1(H+1)^2+$$
$$+nHL_1h_0(1+n(L+1))+nH[g_0e^2\lambda_0n+(G_1+1)k_{13}+f_0en(1+nU_1)(e+1)+2nFe]+n(k_{19}+$$
$$+k_{22})\Big)\Big]T_0\rho+\frac{2}{\gamma}e(H(1+nU_1)h_0(1+n\tilde L)+nMk_{20})\rho_0=k_{22}T_0\rho+k_{24}\rho_0.$$

Розглянемо останній можливий випадок поведінки характеристик, а саме $\chi_i^{\tilde u^1,S^{a^1}}>0$, $\chi_i^{\tilde u^2,S^{a^2}}=0$. Аналогічно як для різниці $\Delta_jS_i^{u^j}(x,t)$ він зводиться до двох попередніх випадків, а саме

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x(x,t)|\leqslant|(S_i^{u^1})'_x(x,t)-(S_i^{u^3})'_x(x,t)|+|(S_i^{u^3})'_x(x,t)-(S_i^{u^2})'_x(x,t)|\leqslant$$

$$\leqslant k_{23}T_0 \cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^3}}} |(u^1)'_x - (u^3)'_x| + k_{24} \cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^3}}} |u^1 - u^3| + k_{16}T_0 \times$$
$$\times \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^2}\cap G_T^{a^3}}} |(u^2)'_x - (u^3)'_x| \leqslant \max\{k_{18}, k_{23}\}T_0\rho + k_{24}\rho_0.$$

Отож, у будь-якому з розглянутих випадків правильна оцінка

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x(x,t)| \leqslant \max\{k_{18}, k_{23}\}T_0\rho + k_{24}\rho_0 = K_2T_0\rho + k_{24}\rho_0.$$

Отже,

$$\rho((S^{u^1}, S^{a^1}), (S^{u^2}, S^{a^2})) \leqslant \max\{K_1, K_2\}T_0\rho + k_{24}\rho_0.$$

Легко бачити, що оператор S не є стискуючим. Розглянемо його квадрат

$$\rho((S^2u^1, S^2a^1), (S^2u^2, S^2a^2)) \leqslant \max\{K_1, K_2\}T_0\rho((S^{u^1}, S^{a^1}), (S^{u^2}, S^{a^2}))+$$
$$+k_{24}\rho_0((S^{u^1}, S^{a^1}), (S^{u^2}, S^{a^2})) \leqslant \max\{K_1, K_2\}T_0(\max\{K_1, K_2\}T_0\rho + k_{24}\rho)+$$
$$+k_{24}K_1T_0\rho = K_3T_0\rho.$$

Звідси, якщо T_0 задовольняє нерівність

$$K_3T_0 \leqslant 1, \tag{40}$$

то відображення $S^2 : Q \to Q$ буде стискуючим.

Зазначимо, що сукупність усіх накладених умов є сумісною. Справді, зафіксуємо достатньо малі U, T_0, щоб виконувалась (9). Виберемо тепер достатньо великий параметр L, щоб виконувалась нерівність (27), а потім зафіксуємо U_1 згідно з (30). Далі за допомогою (36) визначаємо L_1 та зменшуємо T_0, щоб задовольнити нерівності (14), (16), (17), (19)-(25), (28), (29), (31)-(35), (37)-(40).

Зауваження 6. Нехай $\hat{U} \leqslant U$, $\hat{U}_1 \geqslant U$, $\hat{L} \geqslant L$, тоді існує $\tilde{L}_1 \geqslant L_1$, таке що для довільного $\hat{L}_1 \geqslant \tilde{L}_1$ існує $\tilde{T}_0 \leqslant T_0$, при якому для будь-якого $\hat{T}_0 \leqslant \tilde{T}_0$ оператор S в просторі $Q(\hat{T}_0, \hat{U}, \hat{U}_1, \hat{L}, \hat{L}_1)$ задовольняє умови теореми Банаха.

Нехай усі зазначені обмеження виконуються. Тоді за теоремою Банаха про стискуючі відображення існує єдина нерухома точка оператора S в просторі Q, яка і буде класичним розв'язком задачі (1)-(5).

Покажемо, що розв'язок єдиний. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що існують два набори функцій $(u^0, a^0) \in Q$, $(u^1, a^1) \in \left(C^1_L(\overline{G^a_{T_0}})\right)^n \times \left(\mathbb{C}^1[0, T_0]\right)^2$, що є розв'язками задачі (1)-(5).

Позначимо

$$\Upsilon_1 = \{t \in [0, T_0] : a^0(t) \neq a^1(t)\}, \quad T_1 = \inf \Upsilon_1,$$
$$\Upsilon_2 = \{t \in [0, T_1] : u^0(x,t) \neq u^1(x,t) \ \text{ для деякого } \ (x,t) \in \overline{G^{a^0}_{T_0}}, \}, \quad T_2 = \inf \Upsilon_2.$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $T_2 = 0$. Розглянемо задачу (1), (2), (5) з такими початковими умовами:

$$a(0) = a^0(0),$$
$$u(x,0) = g^0(x), \quad a^0_1(0) \leqslant x \leqslant a^0_2(0), \quad g^0(x) = u^0(x,0) = u^1(x,0).$$

Зазначимо, що вибравши параметри $\hat{U}_1, \hat{L}, \hat{L}_1$ – достатньо великими, а параметри $\hat{U}, \hat{T}_0$ – достатньо малими, ми забезпечимо належність розв'язків (u^0, a^0) та (u^1, a^1) простору $Q(\hat{T}_0, \hat{U}, \hat{U}_1, \hat{L}, \hat{L}_1)$ на $[0, \hat{T}_0]$. Згідно з зауваженням 6 оператор S в цьому просторі задовольняє умови теореми Банаха, причому має дві різні нерухомі точки.

Отримана суперечність доводить, що $T_2 = T_0$, тому $a^0 = a^1$ на $[0, T_0]$, $u^0 = u^1$ на $\overline{G^{a^0}_{T_0}}$. Теорему 1 доведено.

Зауваження 7. Запропонована схема доведення теореми дає змогу, з незначними змінами, отримати розв'язок задачі, якщо (2) замінити, як запропоновано в [7]-[8], співвідношенням

$$\frac{d^m a_k}{dt^m} = h_k(t, a(t), a'(t), ..., a^{(m-1)}(t), u(a, t)), \quad k = 1, 2.$$

$\square$

1. *Gupta S.C.* The Classical Stefan Problem: Basic consepts, modeling and analisis / *Gupta S.C.* – Amsterdam, Elsevier., 2003.
2. *Lee Da-tsin.* Some existence theorems for quasilinear hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables / *Lee Da-tsin, Wen-tsu Y.* // Scientia Sinica. – 1964. – Vol. 13, №5. – P. 551-562.
3. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в однородном пространстве / *Самарин Ю.П.* // Прикл. матем. и мех. – 1964. – Т. 28, №3. – С. 542-543.
4. *Hill C.D.* A hyperbolic free boundary problem / *Hill C.D.* // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – Vol. 31, №1. – P. 117-129.
5. *Мышкис А.Д.* Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными / *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* // Диф.уравнения. – 1981. – Т. 17, №3. – С. 488-500.
6. *Мышкис А.Д.* О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений / *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* // Диф. уравнения. – 2008. – Т. 44, №3. – С. 394-407.
7. *Казаков К.Ю.* Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейных гиперболических систем / *Казаков К.Ю., Морозов С.Ф.* // Укр. мат.журн. – 1985. – Т. 37, №4. – С. 443-450.
8. *Bassanini P.* Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations / *Bassanini P., Turo J.* // Ann. math. pura ed appl. – 1990. – Vol. CLVI, №4. – P. 211-230.
9. *Андрусяк Р.В.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой / *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* // Диф. уравнения. – 2006. – Т. 42, №4. – С. 489-503.
10. *Андрусяк Р.В.* Задача для квазілінійної системи гіперболічного типу у криволінійному секторі з вільними межами / *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М.* // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 421. – С. 5-12.
11. *Li Ta-tsien.* Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems / *Li Ta-tsien.* – New York, 1994.

SMOOTH SOLVABILITY OF QUASILINEAR HYPERBOLIC PROBLEM WITH FREE BOUNDARIES

Ruslan ANDRYAK, Natalya BURDEINA, Volodymyr KYRYLYCH

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: kyrylych@franko.lviv.ua

A Mixed problem with unknown boundaries for one-dimensional hyperbolic systems of the first order quasi-linear equations with nonlinear conditions of the behavior of the domain boundaries and nonlocal boundary conditions is considered. Applying the method of characteristic and the Banach fixed point theorem sufficient conditions for the local classical solvability of the problem for small values of time variable are established.

Key words: hyperbolic problem with free boundaries, quasi-linear equations, classical solution, method of characteristic, Banach theorem.

ГЛАДКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Руслан АНДРУСЯК, Наталья БУРДЕЙНА, Владимир КИРИЛИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: kyrylych@franko.lviv.ua

Рассмотрено смешанную задачу с неизвестными границами для одномерной гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка с нелинейными условиями на поведение границ области и нелокальными граничными условиями. С помощью метода характеристик и теоремы Банаха о неподвижной точке установлено достаточные условия классической разрешимости задачи для малых значений переменной по времени.

Ключевые слова: гиперболическая задача со свободными границами, квазилинейные уравнения, классическое решение, метод характеристик, теорема Банаха.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.2009

Прийнята до друку 12.06.2009