

УДК 517.95

## ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМОГО КОЕФІЦІЄНТА ПРИ ПОХІДНІЙ ЗА ЧАСОМ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

Уляна ФЕДУСЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
79000, Львів, вул. Університетська, 1

З'ясовано умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного параболічного рівняння загального вигляду з невідомим коефіцієнтом при похідній за часом у випадку крайових умов другого роду та нелокальної умови перевизначення.

*Ключові слова:* обернена задача, параболічне рівняння, нелокальна умова перевизначення.

**1. Формулювання результатів.** Дослідження обернених задач зумовлене необхідністю розв'язання певних проблем у геофізиці, медицині, астрономії, біології, сейсмології тощо. Типовим прикладом оберненої задачі є задача визначення невідомих коефіцієнтів параболічного рівняння – в цьому випадку говорять про коефіцієнтну обернену задачу. Для одновимірних параболічних рівнянь поширенішою є задача визначення невідомого коефіцієнта при другій похідній за просторовою змінною. Випадок такого розміщення невідомого коефіцієнта у параболічному рівнянні загального вигляду з нелокальною додатковою умовою досліджено в [1], для однорідного рівняння теплопровідності з локальною умовою перевизначення – в [2]. Серед задач з невідомим коефіцієнтом, розміщеним при похідній за часом, виділимо працю Прилепка О.І. та Костіна А.Б. [3], в якій було розглянуто питання ідентифікації коефіцієнта  $\rho(x)$  у рівнянні

$$\rho(x)u_t - Lu = g, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T),$$

де  $L$  – рівномірно еліптичний оператор. Визначення двох невідомих коефіцієнтів в однорідному рівнянні теплопровідності досліджував Іванчов М.І. [4]. Єдиність розв'язку задачі для нелінійного рівняння

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x, \quad 0 < x < 1, \quad t \in [0, T],$$

з невідомими коефіцієнтами  $c(u)$  та  $k(u)$  довів Музильов М.В. [5].

Мета нашої праці – дослідити можливість однозначного визначення невідомого коефіцієнта  $c(t)$  у рівнянні

$$c(t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

з нелокальною умовою перевизначення. Доведення існування розв'язку полягає у зведенні цієї задачі до системи операторних рівнянь стосовно невідомих функцій і застосуванні до неї теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Доведення єдиності розв'язку задачі ґрунтується на використанні властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

В області  $Q_T = (0, h) \times (0, T)$  розглядаємо рівняння (1) з невідомим коефіцієнтом  $c(t) > 0$ , початковою умовою

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h], \quad (2)$$

крайовими умовами

$$u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(h, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

та умовою перевизначення вигляду

$$\nu_1(t)u(0, t) + \nu_2(t)u(h, t) = \mu_3(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

**Теорема 1.** При виконанні умов

$$(A1) \quad \varphi \in C^2([0, h]), \quad \mu_i \in C^1([0, T]), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \nu_i \in C^1([0, T]), \quad i = 1, 2, \quad a, b, d, f \in C^{1,0}(\overline{Q_T}),$$

$$(A2) \quad \varphi''(x) > 0, \quad \varphi(x) \geq 0, \quad x \in [0, h], \quad \mu_1(t) \leq 0, \quad \mu_2(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad f(x, t) \geq 0, \\ a(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q_T}, \quad \nu_1(t) + \nu_2(t) > 0, \quad \nu_1(t) \geq 0, \quad \nu_2(t) \geq 0, \quad \nu_1'(t) \leq 0, \quad \nu_2'(t) \leq 0, \\ d(0, t)\mu_3(t) + \nu_1(t)b(0, t)\mu_1(t) + \nu_2(t)b(h, t)\mu_2(t) + \nu_1(t)f(0, t) + \nu_2(t)f(h, t) > 0, \\ d(h, t) - d(0, t) \geq 0, \quad \mu_3'(t) > 0, \quad t \in [0, T],$$

$$(A3) \quad \varphi'(0) = \mu_1(0), \quad \varphi'(h) = \mu_2(0), \quad \nu_1(0)\varphi(0) + \nu_2(0)\varphi(h) = \mu_3(0),$$

можна зазначити таке число  $t_0, 0 < t_0 \leq T$ , що розв'язок  $(c, u) \in C([0, t_0]) \times C^{2,1}(\overline{Q_{t_0}})$  задачі (1)-(4) існує.

**Теорема 2.** Нехай виконуються умови (A2), (A3) і

$$(A4) \quad \varphi \in H^{2+\gamma}([0, h]), \quad \mu_i \in H^{1+\gamma/2}([0, T]), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \nu_i \in H^{1+\gamma/2}([0, T]), \quad i = 1, 2, \\ a, b, d, f \in H^{1,\gamma/2}(\overline{Q_T}),$$

Тоді розв'язок  $(c, u)$  задачі (1)-(4) належить класу  $H^{\gamma/2}([0, t_0]) \times H^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{Q_{t_0}})$ .

**Теорема 3.** Якщо

$$a, b, d \in H^{\gamma,0}(\overline{Q_T}), \\ \varphi(x) \geq 0, \quad x \in [0, h], \quad \mu_3'(t) > 0, \quad \nu_1'(t) \leq 0, \quad \nu_2'(t) \leq 0, \quad \mu_1(t) \leq 0, \quad \mu_2(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \\ f(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{Q_T},$$

то розв'язок  $(c, u) \in H^{\gamma/2}([0, T]) \times H^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{Q_T})$  задачі (1)-(4) єдиний.

**2. Доведення теореми 1.**

Зафіксуємо довільну точку  $y \in [0, h]$  і подамо рівняння (1) у такому вигляді

$$c(t)u_t = a(y, t)u_{xx} + (a(x, t) - a(y, t))u_{xx} + b(x, t)u_x + d(x, t)u + f(x, t). \quad (5)$$

При відомій функції  $c(t)$  знаходження розв'язку задачі (5), (2), (3) зводиться до інтегро-диференціального рівняння

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^h \varphi(\xi) G_2(x, t, \xi, 0; y) d\xi - \int_0^t \frac{a(y, \tau) \mu_1(\tau)}{c(\tau)} G_2(x, t, 0, \tau; y) d\tau + \int_0^t \frac{a(y, \tau) \mu_2(\tau)}{c(\tau)} \times \\ & \times G_2(x, t, h, \tau; y) d\tau + \int_0^t \int_0^h \frac{f(\xi, \tau)}{c(\tau)} G_2(x, t, \xi, \tau; y) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^h \frac{G_2(x, t, \xi, \tau; y)}{c(\tau)} ((a(\xi, \tau) - \\ & - a(y, \tau))u_{\xi\xi} + b(\xi, \tau)u_{\xi} + d(\xi, \tau)u) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} G_2(x, t, \xi, \tau; y) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t, y) - \theta(\tau, y))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, y) - \theta(\tau, y))}\right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, y) - \theta(\tau, y))}\right) \right), \quad \theta(t, y) = \int_0^t \frac{a(y, \tau)}{c(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Введемо позначення  $v(x, t) = u_x(x, t)$ ,  $w(x, t) = u_{xx}(x, t)$ . Диференціюючи (6) двічі по  $x$  з врахуванням рівності

$$G_{2xx}(x, t, \xi, \tau; y) = -\frac{c(\tau)}{a(y, \tau)} G_{2\tau}(x, t, \xi, \tau; y),$$

інтегруючи частинами, врахувавши умови (A3) і прийнявши  $y = x$ , отримаємо

$$\begin{aligned} w(x, t) = & \int_0^h \varphi''(\xi) G_2(x, t, \xi, 0; x) d\xi - \int_0^t \mu_1'(\tau) G_2(x, t, 0, \tau; x) d\tau + \int_0^t \mu_2'(\tau) G_2(x, t, h, \tau; x) d\tau + \\ & + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h (a(\xi, \tau) - a(x, \tau)) w(\xi, \tau) G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h (f_{\xi\xi}(\xi, \tau) + d_{\xi\xi}(\xi, \tau) w + \\ & + (d(\xi, \tau) + b_{\xi\xi}(\xi, \tau))v + b(\xi, \tau)w) G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi \equiv \sum_{k=1}^5 I_k(x, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Знайдемо рівняння стосовно невідомої функції  $c(t)$ . Для цього продиференціюємо умову перевизначення по  $t$  і використаємо рівняння (1) для знаходження  $u_t(0, t)$ ,

$u_t(h, t)$ . Отримаємо

$$\begin{aligned} \nu_1'(t)u(0, t) + \nu_2'(t)u(h, t) + \frac{\nu_1(t)}{c(t)}(a(0, t)w(0, t) + b(0, t)\mu_1(t) + d(0, t)u(0, t) + f(0, t)) + \\ + \frac{\nu_2(t)}{c(t)}(a(h, t)w(h, t) + b(h, t)\mu_2(t) + d(h, t)u(h, t) + f(h, t)) = \mu_3'(t). \end{aligned}$$

Звідси приходимо до такого рівняння стосовно  $c(t)$

$$\begin{aligned} c(t) = (\nu_1(t)a(0, t)w(0, t) + \nu_2(t)a(h, t)w(h, t) + \nu_1(t)d(0, t)u(0, t) + \nu_2(t)d(h, t)u(h, t) + \\ + \nu_1(t)b(0, t)\mu_1(t) + \nu_2(t)b(h, t)\mu_2(t) + \nu_1(t)f(0, t) + \nu_2(t)f(h, t))(\mu_3'(t) - \nu_1'(t)u(0, t) - \\ - \nu_2'(t)u(h, t))^{-1} \end{aligned}$$

або, використовуючи умову перевизначення (4),

$$\begin{aligned} c(t) = (\nu_1(t)a(0, t)w(0, t) + \nu_2(t)a(h, t)w(h, t) + \nu_2(t)u(h, t)(d(h, t) - d(0, t)) + d(0, t)\mu_3(t) + \\ + \nu_1(t)b(0, t)\mu_1(t) + \nu_2(t)b(h, t)\mu_2(t) + \nu_1(t)f(0, t) + \nu_2(t)f(h, t))(\mu_3'(t) - \nu_1'(t)u(0, t) - \\ - \nu_2'(t)u(h, t))^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

З очевидних рівностей

$$u(x, t) = u(0, t) + \int_0^x v(x, t) dx, \quad u(x, t) = u(h, t) - \int_x^h v(x, t) dx$$

маємо

$$u(x, t) = \frac{1}{\nu_1(t) + \nu_2(t)} \left( \mu_3(t) + \nu_1(t) \int_0^x v(x, t) dx - \nu_2(t) \int_x^h v(x, t) dx \right), \quad (9)$$

оскільки

$$v(x, t) = v(0, t) + \int_0^x w(x, t) dx = \mu_1(t) + \int_0^x w(x, t) dx, \quad (10)$$

то задача (1)-(4) зводиться до системи інтегральних рівнянь (7), (8) щодо невідомих  $c$  та  $w$ .

Доведення існування розв'язку задачі (1)-(4) ґрунтується на використанні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, тому треба визначити апіорні оцінки розв'язків системи (7), (8).

Визначимо спочатку оцінку  $c(t)$  знизу. З умов (A2) маємо

$$\begin{aligned} \nu_1(t)a(0, t)I_1(0, t) + \nu_2(t)a(h, t)I_1(h, t) \geq \\ \geq (\nu_1(t)a(0, t) + \nu_2(t)a(h, t)) \min_{[0, h]} \varphi''(x) \geq C_1 > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки у виразі  $\nu_1(t)a(0,t)w(0,t) + \nu_2(t)a(h,t)w(h,t)$  всі доданки, крім доданка  $\nu_1(t)a(0,t)I_1(0,t) + \nu_2(t)a(h,t)I_1(h,t)$ , прямують до нуля при  $t \rightarrow 0$ , то існує такий проміжок  $[0, T_0]$ ,  $0 < T_0 \leq T$ , на якому буде виконуватись нерівність

$$\nu_1(t)a(0,t)I_1(0,t) + \nu_2(t)a(h,t)I_1(h,t) \geq - \sum_{k=2}^5 (\nu_1(t)a(0,t)I_k(0,t) + \nu_2(t)a(h,t)I_k(h,t)), \quad (12)$$

звідки  $\nu_1(t)a(0,t)w(0,t) + \nu_2(t)a(h,t)w(h,t) \geq 0$ . Згідно з припущеннями (A2) маємо  $u(x,t) \geq 0$ . З рівності (9) приходимо до оцінки

$$|u(x,t)| \leq C_2 + C_3 V(t), \quad (13)$$

де  $V(t) = \max_{x \in [0,h]} |v(x,t)|$ . Тоді

$$c(t) \geq \frac{C_4}{C_5 + C_6 V(t)} > 0. \quad (14)$$

Запишемо задачу стосовно функції  $v(x,t)$ . Продиференціювавши (1) і (2) по  $x$ , в області  $Q_T$  отримаємо рівняння

$$c(t)v_t = a(x,t)v_{xx} + (a_x(x,t) + b(x,t))v_x + (b_x(x,t) + d(x,t))v + d_x(x,t)u + f_x(x,t) \quad (15)$$

з умовами

$$v(x,0) = \varphi'(x), \quad x \in [0,h], \quad v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T]. \quad (16)$$

Розв'язок цієї задачі подамо у вигляді

$$v(x,t) = v_0(x,t) + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h ((b_\xi(\xi,\tau) + d(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + d_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)) \tilde{G}_1(x,t,\xi,\tau) d\xi. \quad (17)$$

Тут  $\tilde{G}_1$  – функція Гріна для рівняння

$$c(t)v_t = a(x,t)v_{xx} + (a_x(x,t) + b(x,t))v_x \quad (18)$$

з однорідними умовами першого роду, а  $v_0$  задовольняє рівняння

$$c(t)v_{0t} = a(x,t)v_{0xx} + (a_x(x,t) + b(x,t))v_{0x} + (b_x(x,t) + d(x,t))v_0 + f_x(x,t)$$

й умови (16). Згідно з принципом максимуму [8, с. 20] маємо  $|v_0(x,t)| \leq C_7 < \infty$ .

Розв'язком задачі для рівняння (18) з умовами

$$v(x,0) = 1, \quad v(0,t) = 1, \quad v_0(h,t) = 1$$

буде

$$1 = \int_0^h \tilde{G}_1(x,t,\xi,0) d\xi + \int_0^t \frac{a(0,\tau)}{c(\tau)} \tilde{G}_{1\xi}(x,t,0,\tau) d\tau - \int_0^t \frac{a(h,\tau)}{c(\tau)} \tilde{G}_{1\xi}(x,t,h,\tau) d\tau.$$

Згідно з властивостями функції  $\tilde{G}_1$  кожен член у правій частині цієї рівності є невід'ємною функцією, тому виконується оцінка  $\int_0^{\tilde{h}} \tilde{G}_1(x, t, \xi, \tau) d\xi \leq 1$ . Тоді, продовжуючи з (17), отримаємо

$$V(t) \leq C_7 + C_8 \int_0^t \frac{V(\tau)}{c(\tau)} d\tau.$$

За нерівністю Гронуолла-Белмана [10, с. 188],

$$V(t) \leq C_7 \exp C_8 \theta_0(t), \quad (19)$$

де  $\theta_0(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}$ . Враховуючи (14), приходимо до нерівності

$$c(t) \geq \frac{C_4}{C_5 + C_9 \exp C_8 \theta_0(t)}, \quad t \in [0, T_0]. \quad (20)$$

Подамо (20) у вигляді

$$\frac{1}{c(t)(C_5 + C_9 \exp C_8 \theta_0(t))} \leq C_{10}.$$

Скористаємося методом доведення нерівності Біхарі [10]. Прийmemo в цій нерівності  $t = \tau$  і проінтегруємо від 0 до  $t$ . Отримаємо

$$\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)(C_5 + C_9 \exp C_8 \theta_0(\tau))} \leq C_{10} t.$$

Зробивши заміну  $\theta_0(\tau) = \sigma$ , прийдемо до нерівності

$$\int_0^{\theta_0(t)} \frac{d\sigma}{C_5 + C_9 \exp C_8 \sigma} \leq C_{10} t. \quad (21)$$

Якщо розглянути функцію

$$r(s) = \int_0^s \frac{d\sigma}{C_5 + C_9 \exp C_8 \sigma} = \frac{1}{C_5 C_8} \ln \frac{(C_5 + C_9) \exp C_8 s}{C_5 + C_9 \exp C_8 s} = \frac{1}{C_5 C_8} \ln \frac{C_5 + C_9}{C_5 \exp(-C_8 s) + C_9},$$

то (21) можна подати у вигляді

$$r(\theta_0(t)) \leq C_{10} t. \quad (22)$$

Позначимо  $R_0 = \sup_{[0, \infty)} r(s)$ . Очевидно, що  $r(s)$ —монотонно зростаюча неперервна на  $[0, \infty)$ , тому існує обернена монотонно зростаюча неперервна функція  $r^{-1}(\sigma)$ , визначена на проміжку  $[0, R_0)$ . Тоді з (22) маємо

$$\theta_0(t) \leq r^{-1}(C_{10}t) \leq C_{11}, \quad t \in [0, T_1],$$

де число  $T_1$ ,  $0 < T_1 \leq T$ , задовольняє нерівність

$$C_{10}T_1 < R_0.$$

Використовуючи оцінку  $\theta_0(t)$  в (20), (19), визначаємо

$$c(t) \geq A_0 > 0, \quad V(t) \leq C_{12}, \quad t \in [0, T_1]. \quad (23)$$

Звідси

$$|u(x, t)| \leq C_{13}, \quad (x, t) \in Q_{T_1}. \quad (24)$$

Знайдемо оцінку  $c(t)$  зверху. Введемо позначення  $W(t) = \max_{x \in [0, h]} |w(x, t)|$ . Оскільки за умовами (A2)

$$\mu'_3(t) - \nu'_1(t)u(0, t) - \nu'_2(t)u(h, t) \geq \min_{[0, T]} \mu'_3(t),$$

то з (8) отримаємо

$$c(t) \leq C_{14} + C_{15}W(t), \quad t \in [0, T]. \quad (25)$$

Оцінимо  $W(t)$ . З відомих співвідношень [9, с. 12]

$$\int_0^h G_2(x, t, \xi, 0; x) d\xi = 1, \quad G_2(x, t, \xi, \tau; x) \leq C_{16} + \frac{C_{17}}{\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} \quad (26)$$

маємо

$$\left| \sum_{k=1}^3 I_k(x, t) \right| \leq C_{18} + C_{19} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}}.$$

Оскільки

$$\int_0^t \frac{a(x, \tau) d\tau}{c(\tau) \sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} = 2\sqrt{\theta(t, x)},$$

то, враховуючи (25) і оцінку  $\theta_0(t)$  зверху, одержимо

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^3 I_k(x, t) \right| &\leq C_{18} + C_{20} \sqrt{\theta(t, x)} + C_{21} \int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau) \sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} d\tau \leq C_{22} + \\ &+ C_{21} \int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau) \sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} d\tau. \end{aligned}$$

Використаємо нерівність

$$z^p \exp(-qz^2) \leq C_{p,q} < \infty, \quad \forall z \in [0, \infty), \quad p \geq 0, \quad q > 0, \quad (27)$$

для оцінки  $|G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x)|$ :

$$\begin{aligned} |G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x)| &\leq \frac{1}{4\sqrt{\pi(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( |x - \xi + 2nh| \times \right. \\ &\times \exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) + |x + \xi + 2nh| \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) \Big) \leq \frac{C_{23}}{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)} \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{8(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) + \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{8(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) \right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^h \left( \exp\left(\frac{-(x - \xi + 2nh)^2}{8(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) + \exp\left(\frac{-(x + \xi + 2nh)^2}{8(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) \right) d\xi \leq C_{24},$$

то

$$\left| -\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h f_\xi(\xi, \tau) G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi \right| \leq C_{25} \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau) \sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} \leq C_{26}.$$

Тоді, враховуючи (24), (23) та визначену оцінку  $|G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x)|$ , отримаємо

$$|I_5(x, t)| \leq C_{27} \sqrt{\theta(t, x)} + C_{28} \int_0^t \frac{W(\tau) d\tau}{c(\tau) \sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} \leq C_{29} + C_{28} \int_0^t \frac{W(\tau) d\tau}{c(\tau) \sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}}.$$

Для оцінки інтеграла  $I_4(x, t)$  обчислимо  $G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x)$

$$\begin{aligned} G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x) &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) + \right. \\ &+ \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) \Big) + \frac{1}{8\sqrt{\pi(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))^5}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( (x - \xi + 2nh)^2 \times \right. \\ &\times \exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) + (x + \xi + 2nh)^2 \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t, x) - \theta(\tau, x))}\right) \Big). \quad (28) \end{aligned}$$

Оскільки  $|x - \xi| \leq |x - \xi + 2nh|$  і  $|x - \xi| \leq |x + \xi + 2nh|$  при  $n \geq 1$ , то, використовуючи нерівність (27), одержуємо

$$\left| \int_0^h (a(\xi, \tau) - a(x, \tau)) w(\xi, \tau) G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi \right| \leq \frac{C_{30} W(\tau)}{\sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}}.$$



Звідси

$$|I_4(x, t)| \leq C_{30} \int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau) \sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} d\tau.$$

Отже, враховуючи всі визначені оцінки, отримаємо

$$|w(x, t)| \leq C_{31} + C_{32} \int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau) \sqrt{\theta(t, x) - \theta(\tau, x)}} d\tau,$$

звідки приходимо до нерівності

$$W(t) \leq C_{31} + C_{33} \int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau) \sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} d\tau.$$

Використавши лему 2.2.1 [9, с.22] та оцінку  $\theta_0(t)$  зверху, одержуємо

$$W(t) \leq C_{31} \exp(C_{33} \theta_0(t)) \leq C_{34}, \quad t \in [0, T_1]. \quad (29)$$

Звідси

$$c(t) \leq A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_1]. \quad (30)$$

При відомих оцінках  $c(t)$  і  $w(x, t)$  справджується нерівність

$$\left| - \sum_{k=2}^5 (\nu_1(t) a(0, t) I_k(0, t) + \nu_2(t) a(h, t) I_k(h, t)) \right| \leq C_{35} \sqrt{t} + C_{36} t,$$

тоді з (11) і (12) маємо таке обмеження на  $T_0$

$$C_{35} \sqrt{T_0} + C_{36} T_0 \leq C_1.$$

Виберемо  $t_0 = \min\{T_0, T_1\}$ . Тоді оцінки (23), (29), (30) виконуються на проміжку  $[0, t_0]$ . У визначених оцінках  $C_i (i = \overline{1, 36})$ ,  $A_0, A_1$  – відомі величини.

Розглянемо систему рівнянь (8), (7) як операторне рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де  $\omega = (c, w)$ ,  $P = (P_1, P_2)$ , а оператори  $P_1, P_2$  визначаються рівняннями (8), (7), відповідно. Нехай  $N = \{(c, w) \in C[0, t_0] \times C(\overline{Q}_{t_0}) : 0 < A_0 \leq c(t) \leq A_1, |w(x, t)| \leq C_{34}\}$ . Внаслідок апіорних оцінок (23), (29), (30) оператор  $P$  переводить множину  $N$  в себе. Компактність оператора вигляду  $P$  доведено в [9, с. 27]. Застосовуючи теорему Шаудера до оператора  $P$ , отримуємо існування неперервного розв'язку системи рівнянь (8), (7), а отже, й існування розв'язку задачі (1)-(4).

**3. Доведення теореми 2.** В умовах теореми 1 маємо існування розв'язку  $(c, u) \in C([0, t_0]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$  задачі (1)-(4). Доведемо, що при зроблених припущеннях  $(c, u)$  належатиме до класу  $H^{\gamma/2}([0, t_0]) \times H^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$ .

При відомих  $u$  і  $v$  рівняння (7) можна розглядати як інтегральне стосовно функції  $w$  з ядром

$$K(x, t, \xi, \tau) = \frac{a(\xi, \tau) - a(x, \tau)}{c(\tau)} G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x) - \frac{b(\xi, \tau)}{c(\tau)} G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x) = K_1(x, t, \xi, \tau) + K_2(x, t, \xi, \tau)$$

і вільним членом

$$\tilde{f}(x, t) = \sum_{k=1}^3 I_k(x, t) - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h (f_\xi(\xi, \tau) + d_\xi(\xi, \tau)u + (d(\xi, \tau) + b_\xi(\xi, \tau))v) G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x) d\xi,$$

де  $I_k$  – раніше введені позначення. Тоді (7) перепишемо у вигляді

$$w(x, t) = \tilde{f}(x, t) + \int_0^t \int_0^h K(x, t, \xi, \tau) w(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Розв'язок цього інтегрального рівняння шукаємо методом послідовних наближень

$$w_0(x, t) = \tilde{f}(x, t), w_k(x, t) = \tilde{f}(x, t) + \sum_{i=1}^k \int_0^t \int_0^h K_i(x, t, \xi, \tau) \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau, k = 1, 2, \dots$$

$$K_1(x, t, \xi, \tau) = K(x, t, \xi, \tau), K_{i+1}(x, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_0^h K(x, t, \eta, \sigma) K_i(\eta, \sigma, \xi, \tau) d\eta d\sigma, i = 1, 2, \dots$$

Згідно з оцінками теплових потенціалів [8, с. 318] маємо, що  $\tilde{f} \in H^{\gamma, \gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$ . Можна стверджувати, що для ядра  $K$  виконується лема.

**Лема 1.** Для  $x, \xi \in [0, h], \tau, t \in [0, T]$  та  $\forall \beta, 0 < \beta < \gamma$ , правильна нерівність

$$|K_1(x, t, \xi, \tau) - K_1(y, t, \xi, \tau)| \leq \frac{C_1 |x - y|^\beta}{c(\tau)(\theta_0(t) - \theta_0(\tau))^{(3-\alpha)/2}} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \exp\left(-\frac{\tilde{\lambda}(x - \xi + 2nh)^2}{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{\tilde{\lambda}(y - \xi + 2nh)^2}{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}\right) \right),$$

де  $\tilde{\lambda}$  – довільна додатна стала, а  $\alpha = \gamma - \beta$ .

Доведення цієї леми проводиться аналогічно до доведення теореми 7 [11, с. 29-31].

Оцінимо, враховуючи визначену оцінку  $G_{2\xi}$  та оцінки  $\theta(t)$ , наступну різницю

$$\Delta = |K_2(x, t, \xi, \tau) - K_2(y, t, \xi, \tau)| \leq \frac{C_2}{c(\tau)(\theta_0(t) - \theta_0(\tau))} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t) - \theta_0(\tau))}\right) + \exp\left(-\frac{(y - \xi + 2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t) - \theta_0(\tau))}\right) \right).$$

Отже,

$$\Delta \leq \frac{C_3|x-y|^\gamma}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1+\gamma/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \exp\left(\frac{-(x-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\right) + \exp\left(\frac{-(y-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\right) \right).$$

Тоді, враховуючи лему, маємо

$$|K(x, t, \xi, \tau) - K(y, t, \xi, \tau)| \leq \frac{C_4|x-y|^\gamma}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\gamma/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\right) + \exp\left(-\frac{(y-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\right) \right),$$

звідки

$$|w_1(x, t) - w_1(y, t)| \leq C_5|x-y|^\gamma \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\frac{\gamma-1}{2}}} = C_6|x-y|^\gamma \theta_0(t)^{\frac{3-\gamma}{2}} \leq C_7|x-y|^\gamma,$$

тобто  $w_1 \in H^{\gamma, \gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$ . Аналогічно доводиться, що  $w_k \in H^{\gamma, \gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Оскільки інтегральні оператори типу Вольєрра не мають власних значень, то послідовність  $w_k$  рівномірно збігається до  $w$ . Звідси маємо, що  $w \in H^{\gamma, \gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$  як границя послідовності функцій з класу Гельдера. Тоді з (8) матимемо  $c \in H^{\gamma/2}([0, t_0])$ , а з (10), (9) –  $u \in H^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$ . Тут  $C_i$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , – довільні додатні сталі. Теорему доведено.

**4. Доведення теореми 3.** Припустимо, що існують два розв'язки  $(c_1, u_1)$  і  $(c_2, u_2)$  задачі (1)-(4) з класу  $H^{\gamma/2}([0, T]) \times H^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$ . Нехай  $c(t) = c_1(t) - c_2(t)$ ,  $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . Утворимо задачу для  $(c, u)$ :

$$c_1(t)u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + d(x, t)u - c(t)u_{2t}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (31)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, h], \quad (32)$$

$$u_x(0, t) = u_x(h, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (33)$$

$$\nu_1(t)u(0, t) + \nu_2(t)u(h, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (34)$$

За допомогою функції Гріна  $\tilde{G}_2$  запишемо розв'язок задачі (31) – (33)

$$u(x, t) = - \int_0^t \int_0^h \tilde{G}_2(x, t, \xi, \tau) \frac{c(\tau)u_{2\tau}(\xi, \tau)}{c_1(\tau)} d\xi d\tau. \quad (35)$$

Продиференціювавши умову (34) по  $t$  і використавши рівняння (31) для знаходження  $u_t(0, t)$ ,  $u_t(h, t)$ , отримаємо

$$c(t)(\nu_1(t)u_{2t}(0, t) + \nu_2(t)u_{2t}(h, t)) - (c_1(t)\nu_1'(t) + \nu_1(t)d(0, t))u(0, t) - (c_1(t)\nu_2'(t) + \nu_2(t)d(h, t))u(h, t) - \nu_1(t)a(0, t)u_{xx}(0, t) - \nu_2(t)a(h, t)u_{xx}(h, t) = 0. \quad (36)$$

З того, що  $(c_2(t), u_2(t))$  – розв’язок задачі (1)-(4), одержуємо

$$\nu_1(t)u_{2t}(0, t) + \nu_2(t)u_{2t}(h, t) = \mu'_3(t) - \nu'_1(t)u_2(0, t) - \nu'_2(t)u_2(h, t).$$

Тоді (36) можемо переписати у вигляді

$$c(t)(\mu'_3(t) - \nu'_1(t)u_2(0, t) - \nu'_2(t)u_2(h, t)) - (c_1(t)\nu'_1(t) + \nu_1(t)d(0, t))u(0, t) - (c_1(t)\nu'_2(t) + \nu_2(t)d(h, t))u(h, t) - \nu_1(t)a(0, t)u_{xx}(0, t) - \nu_2(t)a(h, t)u_{xx}(h, t) = 0$$

або

$$c(t)(\mu'_3(t) - \nu'_1(t)u_2(0, t) - \nu'_2(t)u_2(h, t)) + \int_0^t c(\tau)K(t, \tau)d\tau = 0, \quad (37)$$

де

$$K(t, \tau) = \frac{1}{c_1(\tau)} \int_0^h \left( \nu_1(t)a(0, t)\tilde{G}_{2xx}(0, t, \xi, \tau) + \nu_2(t)a(h, t)\tilde{G}_{2xx}(h, t, \xi, \tau) + (c_1(t)\nu'_1(t) + \nu_1(t)d(0, t))\tilde{G}_2(0, t, \xi, \tau) + (c_1(t)\nu'_2(t) + \nu_2(t)d(h, t))\tilde{G}_2(h, t, \xi, \tau) \right) u_{2\tau}(\xi, \tau)d\xi.$$

З припущень теореми отримаємо, що  $\mu'_3(t) - \nu'_1(t)u_2(0, t) - \nu'_2(t)u_2(h, t) > 0$ , а це означає, що (37) – однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду. Тоді з того, що  $u_2 \in H^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{Q_T})$  та з властивостей об’ємних теплових потенціалів [8, с. 318] випливає, що ядро  $K(t, \tau)$  рівняння (37) має інтегровну особливість

$$|K(t, \tau)| \leq \frac{C_1}{(t - \tau)^{1-\gamma/2}}.$$

Тут  $C_1$  – деяка додатна стала. Оскільки рівняння (37) має єдиний розв’язок  $c(t) \equiv 0$  на  $[0, T]$ , то, повертаючись до задачі (31)-(33), отримаємо  $u(x, t) \equiv 0$ . Тобто,  $c_1(t) = c_2(t)$  і  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ , що і доводить єдиність розв’язку задачі.

1. Березницька І.Б. Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 54-62.
2. Jones V.F. Various methods for finding unknown coefficient in parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – Vol. 16. – P. 33-34.
3. Прилепко А.И., Костин А.Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, № 5. – С. 147-162.
4. Иванчов Н.И. Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т. 35, № 3. – С. 612-621.
5. Музылев Н.В. Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1980. – Т. 20, № 2. – С.388-400.
6. Иванчов М.И. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – К., 1995.

7. Гуль О., Дорожовець У., Іванчов М. Обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при похідній за часом у параболічному рівнянні // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 27-37.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
9. Ivanchov M.I. Inverse problems for equations of parabolic type. VNTL Publishers, 2003.
10. Беккенбах Э. Беллман Р. Неравенства. – М., 1965.
11. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1967.

## ON INVERSE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN COEFFICIENT AT THE DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME VARIABLE

**Ulyana FEDUS**

*Ivan Franko National University of L'viv,  
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

We establish conditions for existence and uniqueness of solution of the inverse problem for one-dimensional parabolic equation of general type with unknown coefficient at the derivative with respect to time variable and nonlocal overdetermination condition.

*Key words:* inverse problem, parabolic equation, nonlocal overdetermination condition, Green function.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.2007

Прийнята до друку 24.10.2007