ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.248-267 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.248-267*

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Одержано достатні умови існування і єдиності узагальненого розв'язку в класі типу Тихонова мішаної задачі для рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} (a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j})_{x_sx_l} - \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t)u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{k} (b_{ij}(z,t)u_{tx_i})_{x_j} -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{m} (c_{ij}(z,t)u_{y_i})_{y_j} + a_0(z,t)u + b(z,u_t) = \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}(z,t))_{x_ix_j} -$$
$$-\sum_{i=1}^{k} (f_i(z,t))_{x_i} + f_0(z,t) - \sum_{i=1}^{m} (g_i(z,t))_{y_i}$$

в необмеженій області за просторовими змінними.

Ключові слова: еволюційне рівняння, задача в необмеженій області.

У 1960 р. С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, ввівши термін "$\overrightarrow{2b}$-параболічні системи". У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними приписують різну вагу стосовно диференціювання за змінною t. За цей час було достатньо детально розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем зазначеного типу (див. праці [2-21]).

Зазначимо, що параболічне рівняння з другою похідною за часом і четвертими похідними за просторовими змінними моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. Зокрема, задачі для нелінійних рівнянь такого типу досліджено в [22-25].

У цій праці розглянуто еволюційне рівняння з другою похідною за часом, четвертими похідними за однією групою просторових змінних і другою похідною за другою групою просторових змінних. Такі рівняння можна зарахувати до $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь Ейдельмана. Досліджено мішану задачу в необмеженій області за просторовими змінними.

Нехай Ω_x – необмежена область в просторі $\mathbb{R}^k$ з межею $\partial\Omega_x \in C^1$, Ω_y – необмежена область в просторі $\mathbb{R}^m$ з межею $\partial\Omega_y \in C^1$, $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $k + m = n$, $z = (x,y)$, $x \in \Omega_x$, $y \in \Omega_y$.

Розглянемо обмежені області $\Omega_x^R = \Omega_x \cap B_x^R$, $\Omega_y^R = \Omega_y \cap B_y^R$, де $B_x^R = \{x \in \mathbb{R}^k\colon |x| < R\}$ і $B_y^R = \{y \in \mathbb{R}^m : \ |y| < R\}$, $\Omega^R = \Omega_x^R \times \Omega_y^R$, $Q_T^R = \Omega^R \times (0,T)$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$.

У необмеженій області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами і вільним членом

$$A(u) \equiv u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} (a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t) u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{k} (b_{ij}(z,t) u_{t x_i})_{x_j} -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{m} (c_{ij}(z,t) u_{y_i})_{y_j} + a_0(z,t) u + b(z, u_t) = \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}(z,t))_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{k} (f_i(z,t))_{x_i} +$$

$$+ f_0(z,t) - \sum_{i=1}^{m} (g_i(z,t))_{y_i} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u(z,0) = u_0(z), \quad u_t(z,0) = u_1(z) \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)} = 0, \tag{3}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)$.

Введемо простори:

$$L^p((0,T);B) = \left\{ u : \int_0^T ||u(\cdot,t)||_B^p dt < \infty \right\}, \ ||u||_{L^p((0,T);B)} = \left(\int_0^T ||u(\cdot,t)||_B^p dt \right)^{1/p},$$

де $p \in (1, +\infty)$, B – деякий банахів простір;

$$L^p_{loc}(\overline{\Omega}) = \left\{ u : \ \forall K - \ \text{компактної множини з} \ \overline{\Omega} \ \ u \in L^p(K) \right\};$$

$$V_0^{1,0}(\Omega^R) = \left\{ u : \ u, \ u_{x_i} \in L^2(\Omega^R), \ i \in \{1,...,k\}, \ u\big|_{\partial\Omega_x^R} = 0 \right\},$$

$$V_0^{2,1}(\Omega^R) = \left\{ u : \ u, \ u_{x_i}, \ u_{x_i x_j}, u_{y_l} \in L^2(\Omega^R), \ i,j \in \{1,...,k\}, \ l \in \{1,...,m\}, \right.$$

$$\left. u\big|_{\partial\Omega^R} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega_x^R \times \Omega_y^R} = 0 \right\},$$

з відповідними нормами

$$||u||^2_{V_0^{1,0}(\Omega^R)} = \int\limits_{\Omega^R} \left(\sum_{i=1}^{k} u^2_{x_i} + u^2 \right) dz,$$

$$||u||^2_{V_0^{2,1}(\Omega^R)} = \int\limits_{\Omega^R} \left(\sum_{i=1}^{k} u^2_{x_i} + u^2 + \sum_{i,j=1}^{k} u^2_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} u^2_{y_i} \right) dz;$$

$$V^{1,0}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u: \ u, \ u_{x_i} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega}), \ i \in \{1, ..., k\}, \ u|_{\partial\Omega_x} = 0 \Big\},$$

$$V^{2,1}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u: \ u, \ u_{x_i}, \ u_{x_i x_j} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega}), \ i,j \in \{1, ..., k\}, \ u_{y_l} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega}), \ l \in \{1, ..., m\},$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega_x \times \partial\Omega_y} = 0 \Big\},$$

$$V^{2,1}_{0}(\Omega) = \Big\{ u: \ u, \ u_{x_i}, \ u_{x_i x_j}, u_{y_l} \in L^2(\Omega), \ i,j \in \{1, ..., k\}, \ l \in \{1, ..., m\},$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y} = 0 \Big\},$$

$$H^{i,j}(\Omega^R) = \big\{ u: \ u \in L^2(\Omega^R_y; H^i(\Omega^R_x)) \cap L^2(\Omega^R_x; H^j(\Omega^R_y)), \ i,j \in \mathbb{N} \big\},$$

$$W_0(\Omega^R) = V^{2,1}_0(\Omega^R) \cap H^{1,2}(\Omega^R) \cap L^{2p-2}(\Omega^R).$$

Припустимо виконання таких умов:

(A): $a^{sl}_{ij}, \ a^{sl}_{ijt}, \ a^{sl}_{ijtt}, \ a_{ij}, \ a_{ijt}, \ a_{ijtt}, \ a_0, \ a_{0t} \in L^\infty(Q_T), \ D^4_x a^{sl}_{ij}(\cdot, 0), \ D^2_x a_{ij}(\cdot, 0),$ $a_0(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega)$, де $D^\alpha_x = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_k^{\alpha_k}}, \ |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_k,$

$$A_0 \sum_{i,j=1}^{k} |\xi_{ij}|^2 \leqslant \sum_{i,j,s,l=i}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t) \xi_{ij} \xi_{sl}, \quad A_0 > 0,$$

для майже всіх $(z,t) \in Q_T$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$,

$$a^{sl}_{ij}(z,t) = a^{ij}_{sl}(z,t), \quad a_{ij}(z,t) = a_{ji}(z,t) \quad \text{майже для всіх} \quad (z,t) \in Q_T;$$

(B): Функція $b: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і її похідна b_ξ вимірні в Ω для всіх $\xi \in \mathbb{R}$; $b(z, \cdot)$ неперервна на $\mathbb{R}$ майже для всіх $z \in \Omega$; $b_\xi(z, \cdot)$ неперервна на $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ майже для всіх $z \in \Omega$; для всіх $\xi, \ \widetilde{\xi} \in \mathbb{R}$ і майже всіх $z \in \Omega$ виконуються такі нерівності:

$$(b(z,\xi) - b(z, \widetilde{\xi}))(\xi - \widetilde{\xi}) \geqslant b_0 |\xi - \widetilde{\xi}|^p,$$

де $b_0 = 0$ при $p \in (1, 2]$ і $b_0 > 0$ при $p > 2$,

$$|b(z, \xi)| \leqslant b^0 |\xi|^{p-1};$$

$$b_{ij},\ b_{ijt} \in L^\infty(Q_T),\ D_x^2 b_{ij}(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega),\ i,j \in \{1,...,k\},$$

$$\sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \geqslant B_0 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2, B_0 > 0$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^k$ і майже всіх $(z,t) \in Q_T$;

(C): $c_{ij},\ c_{ijt},\ c_{ijtt} \in L^\infty(Q_T),\ D_y^2 c_{ij}(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega)$, де $D_y^\beta = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1}...\partial y_m^{\beta_m}}$, $|\beta| = \beta_1 + ... + \beta_m$,

$$C_0 \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j, \quad C_0 > 0$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ і майже всіх $(z,t) \in Q_T,\ c_{ij}(z,t) = c_{ji}(z,t),\ i,j \in \{1,...,m\}$.

Означення 1. *Функцію $u \in L^2((0,T); V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega}))$ таку, що $u_t \in L^2((0,T); V_{0,loc}^{1,0}(\overline{\Omega}))\cap$ $\cap L^p((0,T); L_{loc}^p(\overline{\Omega}))$, $u_{tt} \in L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$ і u задовольняє початкові умови (2) і рівність*

$$\int_{Q_\tau} \Big[u_{tt}v + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_ix_j} v_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{tx_i} v_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i} v_{y_j} + a_0(z,t)uv + b(z,u_t)v - \sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}(z,t) v_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{k} f_i(z,t) v_{x_i} -$$
$$-f_0(z,t)v - \sum_{i=1}^{m} g_i(z,t) v_{y_i} \Big] dzdt = 0 \tag{4}$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ і функцій $v \in L^2((0,T); V_0^{2,1}(\Omega)) \cap L^p((0,T); L^p(\Omega))$, які мають обмежений носій в Q_T, називаємо узагальненим розв'язком задачі (1)-(3).

Розглянемо спочатку задачу в обмеженій області Q_T^R для рівняння

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}^R(z,t))_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{k} (f_i^R(z,t))_{x_i} + f_0^R(z,t) - \sum_{i=1}^{m} (g_i^R(z,t))_{y_i} \tag{5}$$

з початковими умовами

$$u(z,0) = u_0^R(z), \quad u_t(z,0) = u_1^R(z) \tag{6}$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega^R \times (0,T)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega_x^R \times \Omega_y^R \times (0,T)} = 0, \tag{7}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x^R \times \Omega_y^R \times (0,T)$.

Накладемо на вільний член умову

(F): $f_{ij}^R,\ f_{ijt}^R,\ f_{ijtt}^R,\ f_i^R,\ f_{it}^R,\ g_l^R,\ g_{lt}^R,\ g_{ltt}^R,\ f_0^R,\ f_{0t}^R \in L^2(Q_T^R)$, $(f_{ij}^R(\cdot,0))_{x_ix_j},\ (f_i^R(\cdot,0))_{x_i},\ (g_l^R(\cdot,0))_{y_l} \in L^2(\Omega^R),\ l \in \{1,...,m\},\ i,j \in \{1,...,k\}$.

Означення 2. *Функцію* $u \in L^2((0,T); V_0^{2,1}(\Omega^R))$ *таку, що* $u_t \in L^2((0,T); V_0^{1,0}(\Omega^R)) \cap$ $\cap L^p((0,T); L^p(\Omega^R))$, $u_{tt} \in L^2((0,T); L^2(\Omega^R))$ *і* u *задовольняє початкові умови (6) і рівність*

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[u_{tt} v + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{t x_i} v_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i} v_{y_j} + a_0(z,t) uv + b(z,u_t) v - \sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}^R(z,t) v_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{k} f_i^R(z,t) v_{x_i} -$$
$$- f_0^R(z,t) v - \sum_{i=1}^{m} g_i^R(z,t) v_{y_i} \Big] dz dt = 0 \qquad (8)$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ *і* $v \in L^2((0,T); V_0^{2,1}(\Omega^R)) \cap L^p((0,T); L^p(\Omega^R))$, *називаємо узагальненим розв'язком задачі (5)-(7).*

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C), (F) *і* $u_0^R \in V_0^{2,1}(\Omega^R) \cap$ $\cap H^{4,2}(\Omega^R)$, $u_1^R \in V_0^{1,0}(\Omega^R) \cap L^{2p-2}(\Omega^R) \cap H^{2,2}(\Omega^R)$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (5)-(7).*

Доведення. Методом Фаедо-Гальоркіна побудуємо наближений розв'язок. Оскільки простір $W_0(\Omega^R)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\varphi_h\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $W_0(\Omega^R)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\varphi_h\}$ ортонормована в $L^2(\Omega^R)$.

Розглянемо функції

$$u^N(z,t) = \sum_{h=1}^{N} c_h^N(t) \varphi_h(z), \quad N = 1,2,...,$$

де $c_1^N, c_2^N, ..., c_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int\limits_{\Omega^R} \Big[u_{tt}^N \varphi_h + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^N (\varphi_h)_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i}^N (\varphi_h)_{x_j} + a_0(z,t) u^N \varphi_h +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{t x_i}^N (\varphi_h)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i}^N (\varphi_h)_{y_j} + b(z,u_t^N) u_t^N \varphi_h \Big] dz =$$
$$= \int\limits_{\Omega^R} \Big[\sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}^R (\varphi_h)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{k} f_i^R (\varphi_h)_{x_i} + f_0^R \varphi_h + \sum_{i=1}^{m} g_i^R (\varphi_h)_{y_i} \Big] dz, \quad t \in [0,T], \qquad (9)$$

$$c_h^N(0) = u_{0,h}^{R,N}, \quad c_{ht}^N(0) = u_{1,h}^{R,N}, \quad h = 1,...,N, \qquad (10)$$

де

$$u_0^N(z) = \sum_{h=1}^{N} u_{0,h}^{R,N} \varphi_h(z), \quad \|u_0^{R,N} - u_0^R\|_{V_0^{2,1}(\Omega^R) \cap H^{4,2}(\Omega^R)} \to 0,$$

$$u_1^N(z) = \sum_{h=1}^{N} u_{1,h}^{R,N} \varphi_h(z), \quad \|u_1^{R,N} - u_1^R\|_{V_0^{1,0}(\Omega^R)\cap L^{2p-2}(\Omega^R)\cap H^{2,2}(\Omega^R)} \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

На підставі теореми Каратеодорі [26, с. 54] існує розв'язок задачі (9), (10), який має абсолютно неперервну похідну на проміжку $[0, t_m]$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_m = T$.

Домножимо (9) на $c_{ht}^N(t)$, підсумуємо за h від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0, T]$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^N u_{t x_s x_l}^N + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i}^N u_{t x_j}^N + a_0(z,t) u^N u_t^N +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{tx_i}^N u_{tx_j}^N + \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i}^N u_{ty_j}^N + b(z, u_t^N) u_t^N \Bigg] dzdt = \int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[\sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}^R u_{t x_i x_j}^N +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} f_i^R u_{tx_i}^N + f_0^R u_t^N + \sum_{i=1}^{m} g_i^R u_{ty_i}^N \Bigg] dzdt. \tag{11}$$

На підставі умов (A), (B), (C), (F) з останньої рівності легко отримати оцінку

$$||u_t^N||_{V_0^{1,0}(Q_T^R)\cap L^p(Q_T^R)} \leqslant K_1, \; ||u^N||_{V_0^{2,1}(Q_T^R)} \leqslant K_1, \tag{12}$$

де K_1 – додатна константа, яка не залежить від N.

Диференціюючи за t рівність (9) і враховуючи умови теореми (A), (B), (C), (F), можемо переконатися в правильності оцінок

$$||u_{tt}^N||_{V_0^{1,0}(Q_T^R)} \leqslant K_2, \;\; ||u_t^N||_{V_0^{2,1}(Q_T^R)\cap L^p(Q_T^R)} \leqslant K_2, \;\; ||u^N||_{V_0^{2,1}(Q_T^R)} \leqslant K_2, \;\; K_2 > 0. \tag{13}$$

Оскільки $u_t^N \in L^p(Q_T^R)$, то

$$\int\limits_{Q_T^R} |b(z, u_t^N)|^{p'} dzdt \leqslant |b^0|^{p'} \int\limits_{Q_T^R} |u_t^N|^p dzdt \leqslant K_3, \quad K_3 > 0.$$

На підставі (13) з послідовності $\{u^N\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{N_k}\}$, що

$$u_{tt}^{N_k} \to u_{tt} \text{ слабко в } \; L^\infty((0,T); V_0^{1,0}(\Omega^R)),$$
$$u_t^{N_k} \to u_t \; \text{ слабко в } \; L^\infty((0,T); L^p(\Omega^R) \cap V_0^{2,1}(\Omega^R)),$$
$$b(z, u_t^{N_k}) \to \chi \text{ слабко в } \; L^{p'}(Q_T^R) \text{ при } N_k \to \infty. \tag{14}$$

Доведемо, що $b(z, u_t) = \chi$. З оцінки (14) випливає, що $u_{tt}^N \in L^2((0,T); L^2(\Omega^R))$, $u_t^N \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega^R))$, тому u_t^N належить обмеженій множині в $H^1(Q_T^R)$. Але $H^1(Q_T^R) \subset L^2(Q_T^R)$ компактно. Не зменшуючи загальності, позначимо підпослідовність $u_t^{N_k}$, вибрану з підпослідовності u_t^N таку, що $u_t^{N_k} \to u_t$ сильно в $L^2(Q_T^R)$ і $u_t^{N_k} \to u_t$

майже всюди в Q_T^R. Оскільки функція $b(z,\cdot)$ – неперервна, то $b(\cdot,u_t^{N_k})\to b(\cdot,u_t)$ слабко в $L^{p'}(Q_T^R)$, але на підставі (14) робимо висновок, що

$$b(z,u_t)=\chi. \tag{15}$$

Залишилося показати, що виконуються початкові умови. З оцінок одержаних раніше і леми 1.2 [27, с. 20] випливає, що

$$u^{N_k}(\cdot,0)\to u(\cdot,0)\ \text{ слабко в }\ L^2(\Omega^R),$$

$$\text{але }\ u^{N_k}(\cdot,0)=u_0^{R,N_k}(\cdot)\to u_0^R(\cdot)\ \text{ в }\ V_0^{2,1}(\Omega^R),$$

тому $u(z,0)=u_0^R(z)$.

Оскільки $u_{tt}^{N_k}\to u_{tt}$ слабко в $L^2(Q_T^R)$, з леми 1.2 [27, с. 20] випливає, що

$$u_t^{N_k}(z,0)\to u_t(z,t)|_{t=0}=u_t(z,0),\ z\in\Omega^R,$$

але відомо, що $u_t^{N_k}(\cdot,0)=u_1^{R,N_k}(\cdot)\to u_1^R(\cdot)$ в $V_0^{1,0}(\Omega^R)$, тому $u_t(z,0)=u_1^R(z)$. Отож, виконуються початкові умови (6). Отже, розв'язок існує.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), $p\in(1,2]$, $u_0\in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega})$, $u_1\in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, $f_{ij},\ f_{ijt},\ f_i,\ f_0,\ g_l,\ g_{lt}\in L^2((0,T);L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$, $i,j\in\{1,...,k\}$, $l\in\{1,...,m\}$ і нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_0^R}\left[|u_1(z)|^2+\sum_{i,j=1}^k|u_{0x_ix_j}(z)|^2+\sum_{i=1}^k|u_{0x_i}(z)|^2+|u_0(z)|^2+\sum_{i=1}^m|u_{0y_i}(z)|^2\right]dz+$$

$$+\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_t^R}\left[\sum_{i,j=1}^k|f_{ij}(z,t)|^2+\sum_{i=1}^m|g_i(z,t)|^2\right]dz+\int\limits_{Q_T^R}\left[\sum_{i,j=1}^k|f_{ij}(z,t)|^2+\sum_{i,j=1}^k|f_{ijt}(z,t)|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^k|f_i(z,t)|^2+\sum_{i=1}^m|g_i(z,t)|^2+\sum_{i=1}^m|g_{it}(z,t)|^2+|f_0(z,t)|^2\right]dzdt\leqslant ae^{bR^2}.$$

для довільного $R>1$, де a, b – деякі додатні сталі. Тоді існує $T_0\leqslant T$, що задача (1)-(3) має узагальнений розв'язок у необмеженій області Q_{T_0}.

Доведення. Розглянемо в області Q_T^R, де R набуває значення 2^h, $h\in\mathbb{N}$ (для спрощення запису цю область позначимо через Q_T^h) допоміжну задачу

$$A(u)=F^{h,h},\quad (z,t)\in Q_T^h,$$

$$u|_{\partial\Omega^h\times(0,T)}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega_x^h\times\Omega_y^h\times(0,T)}=0, \tag{16}$$

$$u(z,0)=u_0^{h,h}(z),\quad u_t(z,0)=u_1^{h,h}(z),\quad z\in\Omega^h,$$

де початкові умови мають такий вигляд $u_0^{h,h}(z) = u_0^h(z)\chi^h(z)$, $u_1^{h,h}(z) = u_1^h(z)\chi^h(z)$ з

$$\chi^h(z) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| < h-1, \quad |y| < h-1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant h, \quad |y| \geqslant h, \end{cases}$$

і $0 \leqslant \chi^h(z) \leqslant 1,\ z \in \mathbb{R}^n,\ \chi^h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, а вільний член

$$F^{h,h}(z,t) = \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}^{h,h})_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{k} (f_i^{h,h})_{x_i} + f_0^{h,h} - \sum_{i=1}^{m} (g_i^{h,h})_{y_i},$$

$$f_{ij}^{h,h}(z,t) = \begin{cases} f_{ij}^h(z,t), & (z,t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^h, \end{cases} \quad f_i^{h,h}(z,t) = \begin{cases} f_i^h(z,t), & (z,t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^h, \end{cases}$$

$$f_0^{h,h}(z,t) = \begin{cases} f_0^h(z,t), & (z,t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^h, \end{cases} \quad g_i^{h,h}(z,t) = \begin{cases} g_i^h(z,t), & (z,t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^h. \end{cases}$$

Нехай виконуються такі умови:

$f_{ij}^h,\ f_{ijt}^h,\ f_i^h,\ f_0^h,\ g_l^h,\ g_{lt}^h$ вимірні в Q_T і в кожній області Q_T^h задовольняють умову (F);

$$u_1^h \in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega}) \cap H_{loc}^2(\overline{\Omega}),\ h \in \mathbb{N},\ u_1^h \to u_1 \quad \text{в} \quad L_{loc}^2(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad h \to \infty;$$

$$u_0^h \in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega}) \cap H_{loc}^4(\overline{\Omega}),\ u_0^h \to u_0 \quad \text{в} \quad V_{loc}^{2,1}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad h \to \infty;$$

$$f_{ij}^h \to f_{ij} \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})),\ f_{ijt}^h \to f_{ijt} \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})),$$

$$f_i^h \to f_i \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})), f_0^h \to f_0 \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})),$$

$$g_l^h \to g_l \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})), g_{lt}^h \to g_{lt} \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})) \tag{17}$$

при $h \to \infty$, $i,j \in \{1,...,k\}$, $l \in \{1,...,m\}$.

Розглянемо u^α, u^β – розв'язки задачі (16) при $\alpha > h+1,\ \beta > h+1,\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}$. З попередньої теореми випливає, що ця задача має узагальнений розв'язок в сенсі означення 2. Підставимо $u^\alpha,\ u^\beta$ в рівність (8), отримані рівності віднімемо і приймемо, що

$$v = u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t},$$

де $u^{\alpha\beta} = u^\alpha - u^\beta$,

$$\varphi_{R\chi}(x) = (h_{R\chi}(x))^\gamma = \left(\rho\left(\frac{|x|-R}{\chi}\right)\right)^\gamma, \quad \psi_{R\chi}(y) = (\widehat{h}_{R\chi}(y))^{\gamma_1} = \left(\rho\left(\frac{|y|-R}{\chi}\right)\right)^{\gamma_1},$$

$\gamma > 2,\ \gamma_1 > 2,\ \chi > 0,\ 0 \leqslant \rho(\xi) \leqslant 1,\ \xi \in \mathbb{R},\ \rho(\xi) = 1,\ \xi < 0,\ \rho(\xi) = 0,\ \xi \geqslant 1.$

Тоді одержимо рівність

$$\int_{\Omega_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu\tau}dz + \int_{Q_\tau} \Big[-u_t^{\alpha\beta} u_{tt}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t} + \mu |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \times$$

$$\times \psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t} + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^{\alpha\beta} \Big(u_{txsx_l}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t} + u_{tx_s}^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_l} \times$$

$$\times u^{\alpha\beta}_{tx_l}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_s}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u^{\alpha\beta}_t(\varphi_{R\chi}(x))_{x_sx_l}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i}\times$$

$$\times\Big(u^{\alpha\beta}_{tx_i}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u^{\alpha\beta}_t(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+a_0(z,t)u^{\alpha\beta}u^{\alpha\beta}_t\varphi_{R\chi}(x)\times$$

$$\times\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+\sum_{i,j=1}^{k}b_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{tx_i}\Big(u^{\alpha\beta}_{tx_j}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u^{\alpha\beta}_t(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m}c_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{y_i}\Big(u^{\alpha\beta}_{ty_j}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u^{\alpha\beta}_t\varphi_{R\chi}(x)(\psi_{R\chi}(y))_{y_j}e^{-\mu t}\Big)+$$

$$+(b(z,u^{\alpha}_t)-b(z,u^{\beta}_t))u^{\alpha\beta}_t\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big]dzdt=\int\limits_{\Omega_0}|u_1^{\alpha,\alpha}-u_1^{\beta,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{k}(f^{\alpha,\alpha}_{ij}-f^{\beta,\beta}_{ij})\Big(u^{\alpha\beta}_{tx_ix_j}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u^{\alpha\beta}_{tx_i}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+$$

$$+u^{\alpha\beta}_{tx_j}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_i}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u^{\alpha\beta}_t(\varphi_{R\chi}(x))_{x_ix_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(f^{\alpha,\alpha}_{i}-f^{\beta,\beta}_{i})\Big(u^{\alpha\beta}_{tx_i}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u^{\alpha\beta}_t(\varphi_{R\chi}(x))_{x_i}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+$$

$$+(f^{\alpha,\alpha}_0-f^{\beta,\beta}_0)u^{\alpha\beta}_t\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+\sum_{i=1}^{m}(g^{\alpha,\alpha}_i-g^{\beta,\beta}_i)\Big(u^{\alpha\beta}_{ty_i}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+$$

$$+u^{\alpha\beta}_t\varphi_{R\chi}(x)(\psi_{R\chi}(y))_{y_i}e^{-\mu t}\Big)\Big]dzdt,\quad \tau\in(0,T]. \tag{18}$$

Оцінимо доданки цієї рівності. Очевидно,

$$J_1:=-\int\limits_{Q_\tau}u^{\alpha\beta}_tu^{\alpha\beta}_{tt}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{\alpha\beta}_t|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu\tau}dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_1^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^{\alpha\beta}_t|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt.$$

На підставі умови (A)

$$J_2:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{k}a^{sl}_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_ix_j}u_{tx_sx_l}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\geqslant\frac{A_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_ix_j}|^2\varphi_{R\chi}(x)\times$$

$$\times\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu\tau}dx-\frac{A^0+1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_ix_j}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dx-\frac{A_1+1-\mu A_0}{2}\times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dxdt;$$

$$J_3 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i x_j} u^{\alpha\beta}_t (\varphi_{R\chi}(x))_{x_s x_l}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{A_2 k^2}{\chi^2}|u^{\alpha\beta}_t|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} + \frac{1}{\chi^2}\sum_{i,j=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\right]\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $|(h_{R\chi})_{x_i x_j}(x)| \leqslant \frac{d}{\chi^2}$;

$$J_4 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i x_j} u^{\alpha\beta}_{tx_s} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_l}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[A_2 k\delta\sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{tx_i}|^2\varphi_{R\chi}(x) + \frac{1}{\chi^2\delta}\sum_{i,j=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\right]\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $|(h_{R\chi})_{x_i}(x)| \leqslant \frac{d}{\chi}$, $\delta > 0$.
Інтеграл

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i x_j} u^{\alpha\beta}_{tx_l} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_s}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt$$

оцінюється аналогічно.
Далі

$$J_5 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i} u^{\alpha\beta}_{tx_j} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[A_3\delta\sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{tx_i}|^2 + \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i}|^2\right]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_6 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i} u^{\alpha\beta}_t (\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{A_3 k}{\chi^2}|u^{\alpha\beta}_t|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} + \sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i}|^2\varphi_{R\chi}(x)\right]\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_7 := \int\limits_{Q_\tau} a_0(z,t)u^{\alpha\beta}u^{\alpha\beta}_t\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{A_4}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[|u^{\alpha\beta}|^2 + |u^{\alpha\beta}_t|^2\right]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt.$$

З умови (B) маємо

$$J_8 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{tx_i}^{\alpha\beta} u_{tx_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geqslant$$

$$\geqslant B_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt;$$

$$J_9 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{tx_i}^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\delta \sum_{i=1}^{k} |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) + \frac{B_1 k}{\delta \chi^2} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\right] \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t};$$

$$J_{10} := \int\limits_{Q_\tau} (b(z,u_t^{\alpha}) - b(z,u_t^{\beta})) u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geqslant 0.$$

З умови (C) одержимо

$$J_{11} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i}^{\alpha\beta} u_{ty_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \geqslant \frac{C_0}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) \times$$

$$\times e^{-\mu\tau} dz - \frac{C^0}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) dz + \frac{\mu C_0 - C_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt;$$

$$J_{12} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i}^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) (\psi_{R\chi}(y))_{y_j} e^{-\mu t} dz dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{1}{\chi^2} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 [\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma_1 - 2} + C_2 m |u_t^{\alpha\beta}|^2 \psi_{R\chi}(y)\right] \varphi_{R\chi}(x) e^{-\mu t} dz dt,$$

$$|(h_{R\chi})_{y_i}(y)| \leqslant \frac{h}{\chi}.$$

Крім того,

$$J_{13} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}^{\alpha,\alpha} - f_{ij}^{\beta,\beta}) u_{tx_i x_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dz dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\delta} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \frac{\delta}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}\left(\frac{\mu}{\delta}|f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2+|f_{ijt}^{\alpha,\beta}|^2\right)\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{(\delta\mu+1)}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2\times$$

$$\times\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $f_{ij}^{\alpha,\beta}=f_{ij}^{\alpha,\alpha}-f_{ij}^{\beta,\beta}$;

$$J_{14}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}(f_{ij}^{\alpha,\alpha}-f_{ij}^{\beta,\beta})u_{tx_i}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant\frac{d}{2\delta}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2\times$$

$$\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{d\delta}{2\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{15}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}(f_{ij}^{\alpha,\alpha}-f_{ij}^{\beta,\beta})u_{t}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_ix_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{2\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{dk^2}{\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}|u_{t}^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-4}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{16}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}(f_{i}^{\alpha,\alpha}-f_{i}^{\beta,\beta})u_{tx_i}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\delta}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|f_{i}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{\delta}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{17}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}(f_{i}^{\alpha,\alpha}-f_{i}^{\beta,\beta})u_{t}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_i}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|f_{i}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{d}{2\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}|u_{t}^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{18}:=\int\limits_{Q_\tau}(f_{0}^{\alpha,\alpha}-f_{0}^{\beta,\beta})u_{t}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|f_{0}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_{t}^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{19} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} (g_i^{\alpha,\alpha} - g_i^{\beta,\beta}) u_{ty_i}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\delta} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{m} |g_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \frac{\delta}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{m} |g_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) dz + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{m} |u_{0y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) dz +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} (\mu |g_i^{\alpha,\beta}|^2 + |g_{it}^{\alpha,\beta}|^2) \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_{20} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} (g_i^{\alpha,\alpha} - g_i^{\beta,\beta}) u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) (\psi_{R\chi}(y))_{y_i} e^{-\mu t} dzdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} |g_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt + \frac{d}{2\chi^2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) [\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma-2} e^{-\mu t} dzdt.$$

Подібно як в лемі [28] легко довести оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} |u_{x_i}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \leqslant \delta_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} u_{x_i x_j}^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+ \frac{k}{\delta_1} \int\limits_{Q_\tau} u^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt + \frac{d^2 k}{\chi^2} \int\limits_{Q_\tau} u^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt, \quad \delta_1 > 0.$$

Приймемо $\delta_1 = 1$. Крім того,

$$\int\limits_{Q_\tau} |u(z,t)|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \leqslant T^2 \int\limits_{Q_\tau} u_t^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+ 2T \int\limits_{\Omega_0} u_0^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) dz.$$

Аналогічно отримуємо таку оцінку:

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} |u_{x_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+ kT^2 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt + \frac{d^2 k T^2}{\chi^2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi} e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+ 2kT \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) dz + \frac{2kd^2 T}{\chi^2} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \psi_{R\chi}(y) dz.$$

Використовуючи одержані оцінки, з (18) маємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t^{\alpha\beta}|^2+(A_0-\delta)\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2+(C_0-\delta)\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\right]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu\tau}dz+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[|u_t^{\alpha\beta}|^2\left(\mu-A_4-A_4\tau^2-\frac{k\tau^2}{\delta}-dk\tau^2-dmC_2-1\right)+\right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2\left(\mu A_0-A_1-\frac{1}{\delta}-d-\mu\delta-1\right)+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\left(\mu C_0-C_1-2\right)+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{k}|u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2\left(2B_0-2dkA_2\delta-A_3\delta-d\delta-\delta-\frac{2d\delta}{\chi^2}\right)\right]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega_0}\left[\left(2TA_4+\frac{2kT}{\delta}+2kTd\right)|u_0^{\alpha\beta}|^2+|u_1^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{0x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2(A^0+1)+\sum_{i=1}^{m}|u_{0y_i}^{\alpha\beta}|^2(C^0+1)\right]\times$$

$$\times\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+\int\limits_{\Omega_0}\left(\frac{2d^2kT}{\chi^2\delta}+\frac{2d^3kT}{\chi^2}\right)|u_0^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)dz+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)\left(\frac{2d}{\delta\chi^2}+\frac{d}{\chi^2}\right)+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2[\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma-2}\varphi_{R\chi}(x)\frac{d}{\chi^2}+\right.$$

$$+|u_t^{\alpha\beta}|^2\left(\frac{d^2k\tau^2}{\chi^2\delta}+\frac{d^3k\tau^2}{\chi^2}+\frac{A_1k^2d}{\chi^2}+\frac{B_1kd}{\delta\chi^2}+\frac{dA_3k}{\chi^2}\right)[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)+$$

$$\left.+|u_t^{\alpha\beta}|^2[\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma-2}\varphi_{R\chi}(x)\frac{d}{\chi^2}\right]e^{-\mu t}dzdt+\int\limits_{\Omega_0}\left[\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{\alpha\beta}|^2\right]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+$$

$$+\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\frac{1}{\delta}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{\alpha\beta}|^2\right]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu\tau}dz+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{\mu}{\delta}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ijt}^{\alpha\beta}|^2+\frac{2d}{\delta}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\frac{d}{\chi^2}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}|f_i^{\alpha\beta}|^2+\right.$$

$$\left.+d\sum_{i=1}^{k}|f_i^{\alpha\beta}|^2+|f_0^{\alpha\beta}|^2+d\sum_{i=1}^{m}|g_i^{\alpha\beta}|^2+\mu\sum_{i=1}^{m}|g_i^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g_{it}^{\alpha\beta}|^2\right]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt.$$

Нехай $R=R_0$, $R_0+\chi=R_1$, $\mu=\mu_0+\mu_1$, де $R_0=2^h$, $R_1=2^{h-1}$, $\chi=2^h$, $h\in\mathbb{N}$,

$$\mu_1=\max\left\{A_4(1+T^2)+dkT^2+dmC_2+1+\frac{kT^2}{\delta};\quad\frac{(A_1+1)\delta+1}{\delta(A_0+\delta)};\quad\frac{C_1+2}{C_0}\right\},$$

$2B_0 - (2dkA_2 + A_3 + d + \frac{2d}{\chi^2} + 1)\delta \leqslant B_0$. Тоді з останньої нерівності одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\right] e^{-\mu_0\tau} dz + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left[\mu_0 |u_t^{\alpha\beta}|^2 + \mu_0 \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k} |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 + \mu_0 \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\right] e^{-\mu_0 t} dzdt \leqslant \frac{M_1}{(R_1 - R_0)^2} \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \left[\sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2 + |u_t^{\alpha\beta}|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\right] e^{-\mu_0 t} dzdt + M_2\mu_0, \qquad (19)$$

$M_1 > 0$, M_2 – константа, яка обмежує інтеграли від початкових функцій і вільного члена. З умови (17) випливає, що M_2 можемо зробити як завгодно малою.

Отже, виконується і така нерівність:

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\right] e^{-\mu_0 t} dzdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1}{\mu_0\chi^2} \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\right] e^{-\mu_0 t} dzdt + M_2.$$

Поділимо відрізок $[R_0, R_0 + \chi]$ на q частин, де $q = \lambda 2^{2h}$, $\frac{\lambda^2 M_1 2^{2h}}{\mu_0} \leqslant e^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{N}$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\right] dzdt \leqslant e^{-q+\mu_0\tau} \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\right] dzdt + M_2 \sum_{i=0}^{q-1} e^{-i+\mu_0\tau}. \qquad (20)$$

Оцінимо елементи послідовності $\{u^h\}$. Враховуючи означення узагальненого розв'язку, для u^h одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^h|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^h|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^h|^2 + \sum_{i=1}^{k} |u_{tx_i}^h|^2\right] dzdt \leqslant$$

$$\leqslant M_3 \Bigg(\int\limits_{\Omega_0^{R_0}} \left[|u_1^{h,h}(z)|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{0x_ix_j}^{h,h}(z)|^2 + \sum_{i=1}^{k} |u_{0x_i}^{h,h}(z)|^2 + |u_0^{h,h}(z)|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} |u_{0y_i}^{h,h}(z)|^2\right] dz + \int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \left[\sum_{i,j=1}^{k} |f_{ij}^{h,h}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |g_i^{h,h}|^2\right] dz + \int\limits_{\Omega_0^{R_0}} \left[\sum_{i,j=1}^{k} |f_{ij}^{h,h}|^2 + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{h,h}|^2\Bigg]\,dz+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{h,h}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ijt}^{h,h}|^2+\sum_{i=1}^{k}|f_i^{h,h}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{h,h}|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}|g_{it}^{h,h}|^2+|f_0^{h,h}|^2\Bigg]\,dzdt\Bigg).$$

Отже, на підставі умови теореми з останньої нерівності маємо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h)}}\Bigg[|u_t^h|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^h|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^h|^2\Bigg]dzdt\leqslant M_4e^{b(R(h))^2},\tag{21}$$

де M_4 – додатна константа, яка не залежить від $h,\ h\in\mathbb{N}$. З нерівності $|u^{h+3,h+2}|^2\leqslant\leqslant 2(|u^{h+3}|^2+|u^{h+2}|^2)$ і з (21) випливає

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h+1)}}\Bigg[|u_t^{h+3,h+2}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Bigg]dzdt\leqslant 4M_4e^{b(R(h+4))^2}.$$

З (20) одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h)}}\Bigg[|u_t^{h+3,h+2}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Bigg]dzdt\leqslant M_5e^{-q+\mu_0\tau+b(R(s+4))^2}+$$

$$+\frac{eM_2}{e-1}e^{\mu_0\tau+b(R(s+4))^2},$$

де $\sum\limits_{i=0}^{q-1}e^{-i}\leqslant\sum\limits_{i=0}^{\infty}e^{-i}=\dfrac{e}{e-1}$ і $e^{\mu_0\tau}\leqslant e^{\mu_0\tau+b(R(s+4))^2}$.

Враховуючи збіжність послідовностей $f_{ij}^h,\ f_{ijt}^h,\ f_i^h,\ f_0^h,\ g_l^h,\ g_{lt}^h$, де $i,j\in\{1,...,k\}$, $l\in\{1,...,m\}$, можемо вибрати таке $h_1\geqslant h_0$, що для всіх $h>h_1$ буде виконуватися нерівність $M_2<e^{-q}$. З останньої нерівності одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h)}}\Bigg[|u_t^{h+3,h+2}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Bigg]dzdt\leqslant M_6e^{-q+\mu_0\tau+b(R(s+4))^2},\tag{22}$$

де M_6 – додатна константа, яка не залежить від h.

Візьмемо $\lambda=2^8([b]+1)$. Але $\frac{\lambda^2M_12^{2h}}{\mu_0}\leqslant e^{-1}$, $\lambda\in\mathbb{N}$, тому $\mu_0=b_12^{2h}$, де $b_1=eM_12^{16}([b]+1)$. Оскільки

$$-q+\mu_0\tau+b(R(h+4))^2=-\lambda2^{2h}+b_12^{2h}\tau+b2^{2h+8}=2^{2h}\left(-([b]+1)2^8+b_1\tau+2^8b\right)=$$

$$=-2^{2h}\left((1+[b]-b)2^8-b_1\tau\right)\leqslant-2^{2h}\left((1-\{b\})2^8-\lambda\tau_0\right)$$

для всіх $\tau \in [0, \tau_0]$, де $\tau_0 = \frac{(1-\{b\})2^8-\beta_0}{b_1}$, $(1-\{b\})2^8 > \beta_0 > 0$, тоді з (22) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h)}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2 \right] dzdt \leqslant M_6 e^{-\beta_0 2^{2h}},\ \tau \in [0, \tau_0]. \tag{23}$$

На підставі (23) для довільного $N \in \mathbb{N}$ одержимо

$$||u^{h+1,h+N}||_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_h})} \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} ||u^{h+1,h+i+1}||_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_h})} \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} ||u^{h+1,h+i+1}||_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_{h+i-1}})} \leqslant$$

$$\leqslant M_6 e^{-\beta_0 2^{2h}} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta_0 2^{2(i-1)}} = M_7 e^{-\beta_0 2^{2h}}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване як завгодно мале число, R_0 – довільне фіксоване додатне число. Тоді згідно з останньою оцінкою існує таке $h_2 \in \mathbb{N}$, що для всіх $h > h_2$ і N натуральних

$$||u^{h+1,h+N}||_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_h})} \leqslant \varepsilon,$$

тобто послідовність $\{u^h\}$ фундаментальна в просторі $V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_0})$.

Отже, з (19) випливає фундаментальність $\{u^h\}$ у просторі $L^2((0,\tau_0); V_0^{2,1}(\Omega^{R_0}))$ і фундаментальність $\{u_t^h\}$ у просторі $L^2((0,\tau_0); V_0^{1,0}(\Omega^{R_0}))$. Тому $\{u^h\}$ сильно збігається до функції u, u_t^h сильно збігається до функції u_t у відповідних просторах при $h \to \infty$. Оскільки кожна функція u^h задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}^h v + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^h v_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i}^h v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{tx_i}^h v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i}^h v_{y_j} + a_0(z,t) u^h v + b(z, u_t^h) v - \sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}^h(z,t) v_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{k} f_i^h(z,t) v_{x_i} -$$

$$- f_0^h(z,t) v - \sum_{i=1}^{m} g_i^h(z,t) v_{y_i} \Bigg] dzdt = 0 \tag{24}$$

для довільної $v \in L^2((0,\tau_0); V_0^{2,1}(\Omega^{R_h})) \cap L^p((0,\tau_0); L^p(\Omega^{R_h}))$, $supp\ v \subset Q_{\tau_0}^{R_h}$ і виконується (17), то перейшовши в (24) до границі при $h \to \infty$, одержимо рівність з означення узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) в необмеженій області. Отже, теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C) *і* $u_0 \in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, f_{ij}, f_{ijt}, f_i, f_0, g_l, $g_{lt} \in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, $i,j \in \{1,...,k\}$, $l \in \{1,...,m\}$. *Тоді в класі функцій, які задовольняють оцінку*

$$\int\limits_{Q_T^R} \left[|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}|^2 \right] e^{-\mu t} dzdt \leqslant a e^{bR^2} \tag{25}$$

для довільного $R > 1$, де a, b – додатні сталі, задача (1)-(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Припустимо, що існує два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 задачі (1)-(3), які задовольняють (25). Позначимо $u^{1,2} = u^1 - u^2$. Тоді аналогічно як при доведенні теореми 2 для довільного $\tau \in [0, T]$ випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\right] dzdt \leqslant e^{-q+\mu_0 \tau} \times \tag{26}$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\right] dzdt. \tag{27}$$

Зазначимо, що $q,\ R_0,\ R_1,\ \mu_0,\ \lambda$ такі самі як у теоремі 2. Тому з (27) маємо

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\right] dzdt \leqslant M_8 e^{-2^{2h+8}(1-\{b\}) - 2^{2h} b_1 \tau_0)}. \tag{28}$$

Вибравши $\tau_0 < \frac{2^8(1-\{b\})}{b_1}$, з (28) одержимо

$$\int\limits_{Q_{\tau_0}^{R_0}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\right] dzdt \leqslant M_8 e^{-\beta_0 2^{2h}}, \ \text{ де } \ \beta_0 > 0.$$

Нехай R_0 – довільне фіксоване додатне число, ε – як завгодно мале число. Тоді існує таке $h_3 \in \mathbb{N}$, що для всіх $h > h_3$

$$\int\limits_{Q_{\tau_0}^{R_0}} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\right] dzdt \leqslant \varepsilon.$$

Звідси $u^1(z,t) = u^2(z,t)$ майже всюди в $Q_{\tau_0}^{R_0}$. Враховуючи довільність R_0, маємо єдиність розв'язку в області Q_{τ_0}. Тоді, проводячи аналогічні міркування для скінченного числа множин вигляду $\Omega \cap (\tau_0, 2\tau_0), ..., \Omega \cap (p\tau_0, T)$, де $p\tau_0 < T \leqslant (p+1)\tau_0,\ p \in \mathbb{N}$, доводимо єдиність узагальненого розв'язку в області Q_T.

---

1. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133. – №1. – С. 40-43.
2. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $\overrightarrow{2b}$-параболічних і $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера // Доп. НА УРСР. – 1964. – №8. – С. 1010-1013.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М., 1964.

4. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.
5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Труды семинара по функциональному анализу. – Киев, 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-173.
6. *Мартыненко М. Д., Бойко Д. Ф.* $\overrightarrow{2b}$-параболические граничные задачи // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – №12. – С. 2212-2222.
7. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – №4. – С. 500-506.
8. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – №12. – С. 7-12.
9. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – №337. – С. 73-76.
10. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К., 1999.
11. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – №6. – С. 18-22.
12. *Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 140-151.
13. *Пасічник Г. С.* Про розв'язність задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №3. – С. 61-65.
14. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 46. Математика. – Чернівці – 1999. – С. 13-18.
15. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці – 2000. – С.5-10.
16. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №11. – С. 1484-1496.
17. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженням на початковій площині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці. – 2000. – С. 82-91.
18. *Івасишен С. Д., Кондур О. С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. – 2000. – Т. 14, №1. – С. 73-84.
19. *Балабушенко Т. М.* Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". – N 411. Прикладна математика. – 2000. – С. 6-11.
20. *Балабушенко Т. М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем // Мат. студії. – 2002. – Т. 17, №2. – С. 163-174.
21. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д.* Про властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002.

– Т. 45, №4. – С. 19-26.
22. *R. Abeyaratne and J. K. Knowles.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids, // *Arch. Rational Mech. Anal.* **114** (1991), 119-154.
23. *R. Abeyaratne and J. K. Knowles.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids // SIAM J. *Appl. Math.* **51** (1991), 1205-1221.
24. *M.Slemrod.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid // *Arch. Rational Mech. Anal.* **81** (1983), 37-85.
25. *Трускиновский Л. М.* Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 265, №2. – С. 306-310.
26. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.
27. *Ж.-Л. Лионс.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
28. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Huston J. Mathem. – 1988. – Vol. 14, №3. – P. 319-352.
29. *Гаевськuй Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
30. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Уравнения линейные и квазилинейные параболическово типа. – М., 1967.

MIXED PROBLEM FOR EIDELMAN TYPE EVOLUTION EQUATION IN THE UNBOUNDED REGION

Halyna TORHAN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

The conditions of existence and singularity of the generalized solution in the class of the Tykhonov type mixed many-dimensional problem for the equation

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} (a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t)u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{k} (b_{ij}(z,t)u_{tx_i})_{x_j} -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{m} (c_{ij}(z,t)u_{y_i})_{y_j} + a_0(z,t)u + b(z,u_t) = \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}(z,t))_{x_i x_j} -$$
$$- \sum_{i=1}^{k} (f_i(z,t))_{x_i} + f_0(z,t) - \sum_{i=1}^{m} (g_i(z,t))_{y_i}$$

in the unbounded region have been obtained.

Key words: evolution equation, problem in the unbounded region.

Стаття надійшла до редколегії 01.02.2007

Прийнята до друку 24.10.2007