

УДК 517.95

## ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМОГО МНОЖНИКА В КОЕФІЦІЄНТІ ПРИ ПЕРШІЙ ПОХІДНІЙ В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Галина СНІТКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
79060, Львів, вул. Наукова, 3б*

Визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим множником у коефіцієнті при першій похідній в області з вільною межею.

*Ключові слова:* обернена задача, функція Гріна, вільна межа, параболічне рівняння.

1. Мета нашої праці – дослідити обернену задачу визначення залежного від часу множника в коефіцієнті при першій похідній невідомої функції в параболічному рівнянні другого порядку загального вигляду в області з невідомою рухомою частиною межі. Згадана задача поєднує два типи задач: коефіцієнтна обернена задача та задача з вільною межею, прикладом якої є задача Стефана [1]. Обернені задачі визначення молодших коефіцієнтів у параболічному рівнянні досліджували у [2, 3]. Задача з вільною межею з інтегральною умовою перевизначення досліджена в [4], а з умовою Стефана – в [5].

В області  $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ , де  $x = h(t)$  – невідома межа, розглядаємо параболічне рівняння з невідомим множником  $b = b(t)$  в коефіцієнті при першій похідній

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(t)b_0(x, t)u_x + c(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

початкову умову

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq h(0), \quad (2)$$

крайові умови

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(h(t), t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

та умови перевизначення

$$h'(t) = -k(t)u_x(h(t), t) + \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$\int_0^{h(t)} u(x, t) dx = \mu_4(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Вводячи нову змінну  $y = \frac{x}{h(t)}$ , зводимо задачу (1)-(5) до оберненої стосовно невідомих  $h(t), b(t), v(y, t)$ , де  $v(y, t) = u(yh(t), t)$ , в області  $Q_T = \{(y, t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$

$$v_t = \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t)b_0(yh(t), t) + y h'(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t), t) v + f(yh(t), t), \quad (6)$$

де  $(y, t) \in Q_T$ ,

$$v(y, 0) = \varphi(yh(0)), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (7)$$

$$v(0, t) = \mu_1(t), \quad v(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$h'(t) = -\frac{k(t)}{h(t)} v_y(1, t) + \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$h(t) \int_0^1 v(y, t) dy = \mu_4(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

Під розв'язком задачі (6)-(10) будемо розуміти трійку функцій  $(h(t), b(t), v(y, t))$  з класу  $C^1[0, T] \times C[0, T] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ ,  $h(t) > 0, t \in [0, T]$ , що задовольняє рівняння (6) та умови (7)-(10).

### 1. Існування розв'язку задачі (6)-(10).

**Теорема 1.** *Припустимо, що виконуються умови:*

A1)  $a, b_0, c, f \in C([0, \infty) \times [0, T])$ ,  $a, b_0, c, f \in C^{1,0}([0, H_1] \times [0, T])$ ,  $\varphi \in C[0, \infty)$ ,  $\varphi \in C^2[0, h_0]$ ,  $\mu_i \in C^1[0, T]$ ,  $i = 1, 2, 4$ ,  $\mu_3 \in C[0, T]$ ;

A2)  $a(x, t) > 0$ ,  $c(x, t) < 0$ ,  $f(x, t) \geq 0$ ,  $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$ ,  $b_0(x, t) \neq 0$ ,  $(x, t) \in [0, H_1] \times [0, T]$ ,  $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $\varphi'(x) > 0$ ,  $x \in [0, h_0]$ ,  $\mu_i(t) > 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $t \in [0, T]$ ,

де  $h_0 = h(0) > 0$  є розв'язком рівняння  $\int_0^{h_0} \varphi(x) dx = \mu_4(0)$ ,

$H_1 = \max_{[0, T]} \mu_4(t) (\min_{[0, h_0]} \varphi(x), \min_{[0, T]} \mu_1(t), \min_{[0, T]} \mu_2(t))^{-1}$ ;

A3)  $\varphi(0) = \mu_1(0)$ ,  $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$ ,

$$\begin{aligned}\mu_1'(0) &= \frac{a(0,0)}{h_0^2} \varphi''(0) + \frac{b(0)b_0(0,0)}{h_0} \varphi'(0) + c(0,0)\varphi(0) + f(0,0), \\ \mu_2'(0) &= \frac{a(h_0,0)}{h_0^2} \varphi''(h_0) + \frac{b(0)b_0(h_0,0) + h'(0)}{h_0} \varphi'(h_0) + c(h_0,0)\varphi(h_0) + f(h_0,0), \quad \partial e \\ b(0) &= \left( \int_0^1 b_0(yh_0,0)\varphi'(yh_0)dy \right)^{-1} \left[ \mu_4'(0) - \mu_3(0)\mu_2(0) + \frac{1}{h_0} \left( (k(0)\mu_2(0) - a(h_0,0)) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \varphi'(h_0) + a(0,0)\varphi'(0) \right) + \int_0^1 \left( a_x(yh_0,0)\varphi'(yh_0) - h_0(c(yh_0,0)\varphi(yh_0) + f(yh_0,0)) \right) dy \right],\end{aligned}$$

$$h'(0) = -\frac{k(0)}{h_0} \varphi'(h_0) + \mu_3(0).$$

Тоді можна зазначити таке число  $T_0 : 0 < T_0 \leq T$ , яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі (6)-(10) існує при  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq T_0$ .

Доведення. Враховуючи умови (2), (5) та припущення теореми 1, одержимо існування єдиного значення  $h(0) = h_0$ , яке задовольняє рівняння

$$\int_0^{h(0)} \varphi(x)dx = \mu_4(0).$$

Доведення теореми 1 ґрунтується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Зведемо задачу (6)-(10) до системи рівнянь. Тимчасово припустимо, що функції  $h(t)$ ,  $b(t)$  відомі. Використовуючи функцію Гріна  $G_1(y, t, \eta, \tau)$  першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} v_{yy} + c(yh(t), t) v,$$

зводимо пряму задачу (6)-(8) до рівняння

$$v(y, t) = v_0(y, t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau), \tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} v_\eta(\eta, \tau) d\eta d\tau, \quad (11)$$

де  $v_0(y, t)$  визначається формулою [6]

$$\begin{aligned}v_0(y, t) &= \int_0^1 G_1(y, t, \eta, 0) \varphi(\eta h_0) d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y, t, 0, \tau) \frac{a(0, \tau)}{h^2(\tau)} \mu_1(\tau) d\tau - \\ &- \int_0^t G_{1\eta}(y, t, 1, \tau) \frac{a(h(\tau), \tau)}{h^2(\tau)} \mu_2(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) f(\eta h(\tau), \tau) d\eta d\tau.\end{aligned}$$

Введемо позначення  $p(t) = h'(t)$ ,  $w(y, t) = v_y(y, t)$ . Тоді (11) подамо у вигляді

$$v(y, t) = v_0(y, t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau), \tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta, \tau) d\eta d\tau. \quad (12)$$

Випишемо задачу для знаходження  $w(y, t)$ . Продиференціювавши (6), (7) по  $y$  та використавши (8), одержимо

$$w_t = \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} w_{yy} + \frac{a_x(yh(t), t) + b(t)b_0(yh(t), t) + y h'(t)}{h(t)} w_y + \left( \frac{h'(t)}{h(t)} + \right. \\ \left. + b(t)b_{0x}(yh(t), t) + c(yh(t), t) \right) w + h(t)c_x(yh(t), t)v + h(t)f_x(yh(t), t), \quad (y, t) \in Q_T,$$

$$w(y, 0) = h_0 \varphi'(yh_0), \quad y \in [0, 1], \quad (13)$$

$$w_y(0, t) = \frac{h^2(t)}{a(0, t)} \left[ \mu_1'(t) - c(0, t)\mu_1(t) - f(0, t) - \frac{b(t)b_0(0, t)}{h(t)} w(0, t) \right], \quad t \in [0, T],$$

$$w_y(1, t) = \frac{h^2(t)}{a(h(t), t)} \left[ \mu_2'(t) - c(h(t), t)\mu_2(t) - f(h(t), t) - \frac{b(t)b_0(h(t), t) + h'(t)}{h(t)} w(1, t) \right],$$

$t \in [0, T]$ .

Задача (13) у випадку довільних неперервних на  $[0, T]$  функцій  $h(t), h'(t), b(t)$  еквівалентна рівнянню

$$w(y, t) = h_0 \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^t G_2(y, t, 0, \tau) \left[ \mu_1'(\tau) - c(0, \tau)\mu_1(\tau) - f(0, \tau) - \right. \\ \left. - \frac{b(\tau)b_0(0, \tau)}{h(\tau)} w(0, \tau) \right] d\tau + \int_0^t G_2(y, t, 1, \tau) \left[ \mu_2'(\tau) - c(h(\tau), \tau)\mu_2(\tau) - f(h(\tau), \tau) - \right. \\ \left. - \frac{b(\tau)b_0(h(\tau), \tau) + h'(\tau)}{h(\tau)} w(1, \tau) \right] d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_2(y, t, \eta, \tau) \left[ \frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau), \tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} \times \right. \\ \left. \times w_\eta(\eta, \tau) + \left( b(\tau)b_{0x}(\eta h(\tau), \tau) + \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + c(\eta h(\tau), \tau) \right) w(\eta, \tau) + h(\tau) c_x(\eta h(\tau), \tau) \times \right. \\ \left. \times v(\eta, \tau) + h(\tau) f_x(\eta h(\tau), \tau) \right] d\eta d\tau, \quad (14)$$

де  $G_2(y, t, \eta, \tau)$  – функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$w_t = \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} w_{yy} + \frac{a_x(yh(t), t)}{h(t)} w_y. \quad (15)$$

Інтегруючи частинами у виразі  $\int_0^t \int_0^1 G_2(y, t, \eta, \tau) \frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau), \tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} w_\eta(\eta, \tau) d\eta d\tau$ ,

подамо (14) у вигляді

$$\begin{aligned}
 w(y, t) = & h_0 \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^t G_2(y, t, 0, \tau) \left[ \mu_1'(\tau) - c(0, \tau) \mu_1(\tau) - f(0, \tau) \right] d\tau + \\
 & + \int_0^t G_2(y, t, 1, \tau) \left[ \mu_2'(\tau) - c(h(\tau), \tau) \mu_2(\tau) - f(h(\tau), \tau) \right] d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_2(y, t, \eta, \tau) \times \\
 & \times (c(\eta h(\tau), \tau) w(\eta, \tau) + h(\tau)(c_x(\eta h(\tau), \tau) v(\eta, \tau) + f_x(\eta h(\tau), \tau))) d\eta d\tau - \\
 & - \int_0^t \int_0^1 G_{2\eta}(y, t, \eta, \tau) \frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau), \tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta, \tau) d\eta d\tau. \tag{16}
 \end{aligned}$$

З умови (9) матимемо

$$p(t) = -\frac{k(t)}{h(t)} w(1, t) + \mu_3(t). \tag{17}$$

З умови (10) отримаємо

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y, t) dy}. \tag{18}$$

Продиференціювавши (10) по  $t$  і використавши (6), одержимо

$$\begin{aligned}
 b(t) = & \left( \int_0^1 b_0(yh(t), t) w(y, t) dy \right)^{-1} \left[ \mu_4'(t) - \mu_3(t) \mu_2(t) + \frac{k(t) \mu_2(t) - a(h(t), t)}{h(t)} w(1, t) + \right. \\
 & \left. + \frac{a(0, t)}{h(t)} w(0, t) + \int_0^1 \left( a_x(yh(t), t) w(y, t) - h(t)(c(yh(t), t) v(y, t) + f(yh(t), t)) \right) dy \right]. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Розглянемо рівняння (15) з початковою та крайовими умовами

$$w(y, 0) = 1, \quad w_y(0, t) = w_y(1, t) = 0.$$

За допомогою функції Гріна другої крайової задачі для рівняння (15) розв'язок задачі можемо подати у вигляді

$$w(y, t) = \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0) d\eta.$$

З іншого боку, розв'язком такої задачі є  $w(y, t) = 1$ . Отже, можемо зробити висновок, що  $\int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0) d\eta = 1$ , та про додатність першого доданка з (16). Оскільки в (16) решта доданків при  $t = 0$  дорівнює нулю, то існує деяке число  $t_0$ ,  $0 < t_0 \leq T$ , таке що

$$w(y, t) \geq \frac{1}{2} \min_{[0,1]} \varphi'(yh_0) \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0) d\eta = \frac{M_0}{2} > 0, \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq t_0.$$

Отже,  $\int_0^1 b_0(yh(t), t) w(y, t) dy \neq 0$ , коли  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ .

Отже, задачу (6)-(10) зведено до системи інтегральних рівнянь (12), (16)-(19) з невідомими  $h(t), p(t), b(t), v(y, t), w(y, t)$ . Якщо  $(h(t), b(t), v(y, t))$  є розв'язком задачі (6)-(10) у сенсі наведеного означення, то функції  $(h(t), p(t), b(t), v(y, t), w(y, t))$  є неперервним розв'язком системи (12), (16)-(19). Правильним є і обернене твердження: якщо  $(h, p, b, v, w) \in (C[0, T])^3 \times (C(\overline{Q}_T))^2$  є розв'язком системи (12), (16)-(19), то функції  $(h(t), b(t), v(y, t))$  є розв'язком задачі (6)-(10).

Нехай  $(h, p, b, v, w) \in (C[0, T])^3 \times (C(\overline{Q}_T))^2$  є розв'язком системи (12), (16)-(19). Припущення теореми 1 допоможуть нам продиференціювати рівність (12) по  $y$  та з єдиності розв'язку інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду отримати  $w(y, t) = v_y(y, t)$ . Тоді робимо висновок, що  $v(y, t)$  має потрібну гладкість і задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t)b_0(yh(t), t) + yp(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t), t)v + f(yh(t), t) \quad (20)$$

і умови (7), (8), (10) для довільних неперервних на  $[0, T]$  функцій  $b(t)$  і  $h(t)$ . Оскільки  $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$  і  $\mu_4 \in C^1[0, T]$ , то  $h \in C^1[0, T]$ . Враховуючи те, що функція  $v(y, t)$  є розв'язком рівняння (20), продиференціюємо рівність (18) по  $t$

$$b(t) = \left( \int_0^1 b_0(yh(t), t) v_y(y, t) dy \right)^{-1} \left[ \mu_4'(t) - p(t)\mu_2(t) - \frac{a(h(t), t)}{h(t)} v_y(1, t) + \frac{a(0, t)}{h(t)} v_y(0, t) + \frac{\mu_4(t)}{h(t)} \left( p(t) - h'(t) \right) + \int_0^1 \left( a_x(yh(t), t) v_y(y, t) - h(t)(c(yh(t), t) v(y, t) + f(yh(t), t)) \right) dy \right].$$

Віднімаючи від цієї рівності (19), отримаємо

$$(p(t) - h'(t)) \frac{\mu_4(t)}{h(t)} = 0.$$

Звідси матимемо

$$p(t) = h'(t).$$

Отже, еквівалентність задачі (6)-(10) та системи рівнянь (12), (16)-(19) у зазначеному сенсі доведено.

Визначимо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (12), (16)-(19). Згідно з принципом максимуму [7] для розв'язку задачі (6)-(8) матимемо

$$v(y, t) \geq \min \left\{ \min_{[0, h_0]} \varphi(x), \min_{[0, T]} \mu_1(t), \min_{[0, T]} \mu_2(t) \right\} \equiv M_1 > 0, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T.$$

Згідно з (18) отримаємо

$$h(t) \leq \frac{\max_{[0, T]} \mu_4(t)}{M_1} \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0, T].$$

Знайдемо оцінку функції  $v(y, t)$  зверху. Для цього знову використаємо принцип максимуму

$$v(y, t) \leq \max \left\{ \max_{[0, h_0]} \varphi(x), \max_{[0, T]} \mu_1(t), \max_{[0, T]} \mu_2(t), \max_{[0, H_1] \times [0, T]} f(x, t) \right\} \equiv M_2 < \infty.$$

Звідси з врахуванням (18) маємо

$$h(t) \geq \frac{\min_{[0, T]} \mu_4(t)}{M_2} \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0, T].$$

Отже,

$$0 < M_1 \leq v(y, t) \leq M_2 < \infty, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T, \quad 0 < H_0 \leq h(t) \leq H_1 < \infty, \quad t \in [0, T].$$

Позначимо  $W(t) = \max_{y \in [0, 1]} |w(y, t)|$ . Тоді з (17), (19) матимемо

$$|p(t)| \leq C_1 + C_2 W(t), \quad (21)$$

$$|b(t)| \leq C_3 + C_4 W(t). \quad (22)$$

Згідно з (21), (22) та оцінками функції Гріна [7] з (16) одержимо таку нерівність:

$$W(t) \leq C_5 + C_6 \int_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau.$$

Позначивши  $W_1(t) = W(t) + 1$ , попередню нерівність перепишемо в такому вигляді:

$$W_1(t) \leq C_7 + C_8 \int_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau.$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [6]. Отже, отримаємо оцінку

$$W(t) \leq M_3 < \infty, \quad t \in [0, t_1],$$

де  $t_1$ ,  $0 < t_1 \leq T$ , визначається сталими  $C_7, C_8$ . Використовуючи це в (21), (22), одержимо

$$|p(t)| \leq C_9 < \infty, \quad |b(t)| \leq C_{10} < \infty, \quad t \in [0, t_1].$$

Отже, апriorні оцінки розв'язків системи (12), (16)–(19) знайдено.

Подамо систему (12), (16)–(19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де  $\omega = (h(t), b(t), p(t), v(y, t), w(y, t))$ , а оператор  $P$  визначається правими частинами рівнянь (12), (16)–(19). Позначимо  $N = \{(h, b, p, v, w) \in (C[0, T_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 : H_0 \leq h(t) \leq H_1, |b(t)| \leq C_{10}, |p(t)| \leq C_9, M_1 \leq v(y, t) \leq M_2, |w(y, t)| \leq M_3\}$ , де  $T_0 = \min\{t_0, t_1\}$ . Очевидно, що множина  $N$  задовольняє умови теореми Шаудера.

Доведення компактності операторів, що утворюють  $P$ , покажемо на прикладі оператора  $P_5$ , де  $P_5$  визначається правою частиною (16). Зауважимо, що в [6] визначено компактність подібних операторів з функцією Гріна другої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Задамо  $\varepsilon > 0$  і розглянемо різницю

$$\Delta_1 = \left| \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta \right|$$

з довільними точками  $(y_i, t_i) \in \overline{Q}_{T_0}$ ,  $(y_1, t_1) \neq (y_2, t_2)$ .

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \left| \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta \right| + \\ &+ \left| \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta \right| = \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}. \end{aligned}$$

З властивостей теплових потенціалів [1] випливає, що для заданого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\bar{t}$ ,  $0 < \bar{t} \leq T_0$ , що

$$\left| \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \varphi'(y h_0) \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \text{коли } 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (23)$$

Тому при  $t_2 \leq \bar{t}$  маємо

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1} &\leq \left| \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \varphi'(y_2 h_0) \right| + \\ &+ \left| \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \varphi'(y_1 h_0) \right| + |\varphi'(y_2 h_0) - \varphi'(y_1 h_0)|. \end{aligned}$$



З рівномірної неперервності функції  $\varphi$  на  $[0, h_0]$  впливає існування такого  $\delta_1 > 0$ , що

$$|\varphi(y_2 h_0) - \varphi(y_1 h_0)| < \frac{\varepsilon}{5},$$

коли  $|y_2 - y_1| < \delta_1$ . Звідси і з (23) маємо  $\Delta_{1,1} < \frac{3\varepsilon}{5}$ , якщо  $t_2 \leq \bar{t}$ . Якщо ж і  $t_1 \leq \bar{t}$ , то  $\Delta_{1,2} < \frac{2\varepsilon}{5}$ , і отримуємо  $\Delta_1 < \varepsilon$  за умови  $|y_2 - y_1| < \delta$  і  $t_1$  та  $t_2$  досить малі  $t_1 \leq \bar{t}, t_2 \leq \bar{t}$ .

Нехай тепер  $t_2 > \bar{t}, t_1 > \bar{t}$  і, для визначеності,  $t_2 > t_1$ . Тоді згідно з оцінками функції Гріна [7]

$$\Delta_{1,1} = \left| \int_0^1 \varphi'(\eta h_0) d\eta \int_{y_1}^{y_2} G_{2y}(y, t_2, \eta, 0) dy \right| \leq \frac{C_{11} |y_2 - y_1|}{\sqrt{\bar{t}}} \max_{[0,1]} |\varphi'(y h_0)|.$$

Це означає, що існує таке число  $\delta_2 > 0$ , що  $\Delta_{1,1} < \frac{\varepsilon}{2}$  при  $|y_2 - y_1| < \delta_2$ . Аналогічно визначаємо існування  $\delta_3 > 0$  такого, що  $\Delta_{1,2} < \frac{\varepsilon}{2}$ , коли  $|t_2 - t_1| < \delta_3$ .

Отже, необхідні нерівності визначено у випадку  $t_i \leq \bar{t}, i = 1, 2$ , і випадку  $t_i \geq \bar{t}, i = 1, 2$ . Якщо ж, наприклад,  $t_1 \leq \bar{t}$ , а  $t_2 > \bar{t}$ , то подамо  $\Delta_{1,2}$  у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} = & \left| \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, \bar{t}, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta \right| + \\ & + \left| \int_0^1 G_2(y_1, \bar{t}, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0) \varphi'(\eta h_0) d\eta \right|. \end{aligned}$$

Другий доданок оцінимо, враховуючи (23), а перший – як у випадку  $t_1 > \bar{t}, t_2 > \bar{t}$ . Отже, ми довели, що  $\Delta_1 < \varepsilon$ .

Розглянемо різницю

$$\Delta_2 = \left| \int_0^{t_2} G_2(y_2, t_2, 0, \tau) \tilde{\mu}_1(\tau) d\tau - \int_0^{t_1} G_2(y_1, t_1, 0, \tau) \tilde{\mu}_1(\tau) d\tau \right|,$$

де  $\tilde{\mu}_1(t) = \mu_1'(t) - c(0, t)\mu_1(t) - f(0, t)$ .

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \Delta_2 \leq & \left| \int_0^{t_2} G_2(y_2, t_2, 0, \tau) \tilde{\mu}_1(\tau) d\tau - \int_0^{t_2} G_2(y_1, t_2, 0, \tau) \tilde{\mu}_1(\tau) d\tau \right| + \\ & + \left| \int_0^{t_2} G_2(y_1, t_2, 0, \tau) \tilde{\mu}_1(\tau) d\tau - \int_0^{t_1} G_2(y_1, t_1, 0, \tau) \tilde{\mu}_1(\tau) d\tau \right| = \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2}. \end{aligned}$$

Оцінимо перший доданок, зробивши заміну змінних  $t_2 - \tau = \sigma$

$$\Delta_{2,1} \leq C_{12} \int_0^{t_2} |G_2(y_2, t_2, 0, t_2 - \sigma) - G_2(y_1, t_2, 0, t_2 - \sigma)| d\sigma.$$

Згідно з оцінками функції Гріна [7], для заданого  $\varepsilon > 0$  можна зазначити  $\bar{t} > 0$ , що

$$\int_0^{\bar{t}} |G_2(y, t_2, 0, \tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{6C_{12}}, \quad y \in [0, 1]. \quad (24)$$

Якщо  $t_2 \leq \bar{t}$ , то з (24) маємо  $\Delta_{2,1} < \frac{\varepsilon}{3}$ . Якщо ж  $t_2 > \bar{t}$ , то, розбиваючи інтеграл на суму двох інтегралів і застосовуючи (24), отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1} &\leq \frac{\varepsilon}{3} + C_{12} \int_{\bar{t}}^{t_2} |G_2(y_2, t_2, 0, t_2 - \sigma) - G_2(y_1, t_2, 0, t_2 - \sigma)| d\sigma \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + C_{12} \int_{\bar{t}}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} |G_{2y}(y, t_2, 0, t_2 - \sigma)| dy d\sigma. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи оцінки функції Гріна [7], маємо

$$\Delta_{2,1} \leq \frac{\varepsilon}{3} + C_{13}|y_2 - y_1|.$$

Вибираючи  $\delta_4 < \frac{\varepsilon}{6C_{13}}$ , визначаємо оцінку  $\Delta_{2,1} < \frac{\varepsilon}{2}$ , коли  $|y_2 - y_1| < \delta_4$ .

Вважаючи для визначеності  $t_2 > t_1$ , оцінимо другий доданок

$$\begin{aligned} \Delta_{2,2} &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} G_2(y_1, t_2, 0, \tau) \tilde{\mu}_1(\tau) d\tau \right| + \left| \int_0^{t_1} (G_2(y_1, t_2, 0, \tau) - G_2(y_1, t_1, 0, \tau)) \tilde{\mu}_1(\tau) d\tau \right| = \\ &= \Delta_{2,2,1} + \Delta_{2,2,2}. \end{aligned}$$

Оцінимо  $\Delta_{2,2,1}$ , провівши заміну змінних  $t_2 - \tau = \sigma$

$$\Delta_{2,2,1} \leq C_{12} \int_0^{t_2-t_1} |G_2(y_1, t_2, 0, t_2 - \sigma)| d\sigma.$$

Враховуючи (24), робимо висновок про існування такого  $\delta_5 > 0$ , що  $\Delta_{2,2,1} < \frac{\varepsilon}{6}$  при  $|t_2 - t_1| < \delta_5$ .

Для оцінки  $\Delta_{2,2,2}$  зробимо заміну змінних  $t_1 - \tau = \sigma$

$$\Delta_{2,2,2} \leq C_{12} \int_0^{t_1} |G_2(y_1, t_2, 0, t_1 - \sigma) - G_2(y_1, t_1, 0, t_1 - \sigma)| d\sigma.$$

Враховуючи (24), доходимо висновку про існування такого  $\bar{t} > 0$ , що  $\Delta_{2,2,2} < \frac{\varepsilon}{6}$  при  $t_1 \leq \bar{t}$ . У випадку  $t_1 > \bar{t}$  маємо

$$\Delta_{2,2,2} \leq \frac{\varepsilon}{3} + C_{12} \int_{\bar{t}}^{t_1} \left| \int_{t_1}^{t_2} G_{2t}(y_1, t, 0, t_1 - \sigma) dt \right| d\sigma.$$

Звідси впливає існування такого  $\delta_6 > 0$ , що при  $|t_2 - t_1| < \delta_6$  матимемо  $\Delta_{2,2,2} < \frac{\varepsilon}{6}$ . Отже,  $\Delta_2 < \varepsilon$ .

Наведені міркування використовують для оцінок

$$\Delta_3 = \left| \int_0^{t_2} G_2(y_2, t_2, 1, \tau) \tilde{\mu}_2(\tau) d\tau - \int_0^{t_1} G_2(y_1, t_1, 1, \tau) \tilde{\mu}_2(\tau) d\tau \right|,$$

$$\Delta_4 = \left| \int_0^{t_2} \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, \tau) f(\eta, \tau) d\eta d\tau - \int_0^{t_1} \int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, \tau) f(\eta, \tau) d\eta d\tau \right|.$$

Отже, компактність оператора  $P$  доведено.

Тоді за теоремою Шаудера існує розв'язок  $(h(t), b(t), p(t), v(y, t), w(y, t))$  системи рівнянь (12), (16)-(19) з класу  $(C[0, T_0])^3 \times (C(\bar{Q}_{T_0}))^2$ , а отже, і розв'язок задачі (6)-(10)  $(h(t), b(t), v(y, t))$  з класу  $C^1[0, T_0] \times C[0, T_0] \times C^{2,1}(\bar{Q}_{T_0})$ .

Теорему 1 доведено.

## 2. Єдиність розв'язку задачі (6)-(10).

**Теорема 2.** У випадку виконання умов

B1)  $a \in C^{2,0}([0, H_1] \times [0, T])$ ,  $b_0, c, f \in C^{1,0}([0, H_1] \times [0, T])$ ,  $\varphi \in C[0, \infty)$ ;

B2)  $a(x, t) > 0$ ,  $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$ ,  $b_0(x, t) \neq 0$ ,  $(x, t) \in [0, H_1] \times [0, T]$ ,  $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $\varphi'(x) > 0$ ,  $x \in [0, h_0]$ ,  $\mu_4(t) > 0$ ,  $t \in [0, T]$

можна зазначити таке число  $t_0 : 0 < t_0 \leq T$ , що розв'язок задачі (6)-(10) єдиний при  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ .

*Доведення.* Нехай  $(h_i(t), b_i(t), v_i(y, t))$ ,  $i = 1, 2$ , – два розв'язки задачі (6)-(10).

Позначимо

$$\frac{b_i(t)}{h_i(t)} = q_i(t), \quad \frac{h'_i(t)}{h_i(t)} = s_i(t), \quad i = 1, 2,$$

$$q(t) = q_1(t) - q_2(t), \quad s(t) = s_1(t) - s_2(t) \quad v(y, t) = v_1(y, t) - v_2(y, t).$$

Функції  $q(t), s(t), v(y, t)$  задовольняють умови

$$\begin{aligned} v_t = & \frac{a(yh_1(t), t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + (q_1(t)b_0(yh_1(t), t) + ys_1(t))v_y + c(yh_1(t), t)v + \\ & + \left( \frac{a(yh_1(t), t)}{h_1^2(t)} - \frac{a(yh_2(t), t)}{h_2^2(t)} \right) v_{2yy} + (q_1(t)b_0(yh_1(t), t) - q_2(t)b_0(yh_2(t), t) + ys(t))v_{2y} \\ & + (c(yh_1(t), t) - c(yh_2(t), t))v_2 + f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \quad (25) \end{aligned}$$

$$v(y, 0) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (26)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (27)$$

$$h'(t) = -k(t) \left( \frac{v_{1y}(1, t)}{h_1(t)} - \frac{v_{2y}(1, t)}{h_2(t)} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (28)$$

$$\int_0^1 v(y, t) dy = \mu_4(t) \left( \frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (29)$$

За допомогою функції Гріна  $G_1^*(y, t, \eta, \tau)$  для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_1(t), t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + (q_1(t)b_0(yh_1(t), t) + ys_1(t))v_y + c(yh_1(t), t)v$$

з врахуванням умов (26), (27) функцію  $v(y, t)$  подамо в такому вигляді

$$\begin{aligned} v(y, t) = & \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y, t, \eta, \tau) \left[ \left( \frac{a(\eta h_1(\tau), \tau)}{h_1^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_2(\tau), \tau)}{h_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) + \right. \\ & + (q_1(\tau)b_0(\eta h_1(\tau), \tau) - q_2(\tau)b_0(\eta h_2(\tau), \tau) + \eta s(\tau))v_{2\eta}(\eta, \tau) + \\ & \left. + (c(\eta h_1(\tau), \tau) - c(\eta h_2(\tau), \tau))v_2(\eta, \tau) + f(\eta h_1(\tau), \tau) - f(\eta h_2(\tau), \tau) \right] d\eta d\tau. \quad (30) \end{aligned}$$

Оскільки  $(h_i(t), b_i(t), v_i(y, t))$ ,  $i = 1, 2$ , – розв'язки задачі (6)-(10), то для  $h_i(t), b_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , справджуються рівності, аналогічні (17), (19)

$$\frac{h'_i(t)}{h_i(t)} = -\frac{k(t)}{h_i^2(t)} v_{iy}(1, t) + \frac{\mu_3(t)}{h_i(t)}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{b_i(t)}{h_i(t)} = & \left( h_i(t) \int_0^1 b_0(yh_i(t), t) v_{iy}(y, t) dy \right)^{-1} \left[ \mu'_4(t) - \mu_3(t)\mu_2(t) + \frac{a(0, t)}{h_i(t)} v_{iy}(0, t) + \right. \\ & + \frac{k(t)\mu_2(t) - a(h_i(t), t)}{h_i(t)} v_{iy}(1, t) + \int_0^1 \left( a_x(yh_i(t), t) v_{iy}(y, t) - h_i(t)(c(yh_i(t), t) \times \right. \\ & \left. \left. \times v_i(y, t) + f(yh_i(t), t)) \right) dy \right], \quad i = 1, 2. \quad (32) \end{aligned}$$

З умов теореми можемо зробимо висновок про існування деякого числа  $t_0, 0 < t_0 \leq T$ , такого що

$$v_{iy} \geq \frac{M_0}{2} > 0, \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq t_0, \quad i = 1, 2.$$

Тоді  $\int_0^1 b_0(yh_i(t), t)v_{iy}(y, t)dy \neq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq t_0$ ,  $i = 1, 2$ .

З (31), (32) матимемо

$$s(t) = -k(t) \left( v_{1y}(1, t) \left( \frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right) + \frac{1}{h_2^2(t)} \left( v_{1y}(1, t) - v_{2y}(1, t) \right) \right) + \mu_3(t) \left( \frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} q(t) = & \left[ \int_0^1 (b_0(yh_1(t), t)v_y(y, t) + (b_0(yh_1(t), t) - b_0(yh_2(t), t))v_{2y}(y, t))dy \left( h_1(t) \times \right. \right. \\ & \times \int_0^1 b_0(yh_1(t), t)v_{1y}(y, t)dy \int_0^1 b_0(yh_2(t), t)v_{2y}(y, t)dy \left. \right)^{-1} + \left( \frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) \times \\ & \times \left( \int_0^1 b_0(yh_2(t), t)v_{2y}(y, t)dy \right)^{-1} \left[ \mu_4'(t) - \mu_3(t)\mu_2(t) + \frac{k(t)\mu_2(t) - a(h_2(t), t)}{h_2(t)}v_{2y}(1, t) + \right. \\ & \left. + \frac{a(0, t)}{h_2(t)}v_{2y}(0, t) + \int_0^1 \left( a_x(yh_2(t), t)v_{2y}(y, t) - h_2(t)(c(yh_2(t), t)v_2(y, t) + f(yh_2(t), t)) \right) dy \right] + \\ & + \left( h_1(t) \int_0^1 b_0(yh_1(t), t)v_{1y}(y, t)dy \right)^{-1} \left[ \frac{k(t)\mu_2(t) - a(h_1(t), t)}{h_1(t)}v_y(1, t) + \frac{a(0, t)}{h_1(t)}v_y(0, t) - \right. \\ & - \frac{a(h_1(t), t) - a(h_2(t), t)}{h_1(t)}v_{2y}(1, t) + \left( \frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) \left( (k(t)\mu_2(t) - a(h_2(t), t))v_{2y}(1, t) + \right. \\ & \left. + a(0, t)v_{2y}(0, t) \right) + \int_0^1 \left( a_x(yh_1(t), t)v_y(y, t) + (a_x(yh_1(t), t) - a_x(yh_2(t), t))v_{2y}(y, t) - \right. \\ & \left. - h_1(t)c(yh_1(t), t)v(y, t) - (h_1(t)(c(yh_1(t), t) - c(yh_2(t), t)) + h(t)c(yh_2(t), t))v_2(y, t) - \right. \\ & \left. \left. - h_1(t)(f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t)) + h(t)f(yh_2(t), t)) \right) dy \right]. \quad (34) \end{aligned}$$

Використаємо таке перетворення:

$$f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t) = y(h_1(t) - h_2(t)) \int_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))), t) d\sigma. \quad (35)$$

Перетворення (35) можемо використати для різниць  $a(yh_1(t), t) - a(yh_2(t), t)$ ,  $a_x(yh_1(t), t) - a_x(yh_2(t), t)$ ,  $c(yh_1(t), t) - c(yh_2(t), t)$ ,  $b_0(yh_1(t), t) - b_0(yh_2(t), t)$ . Виразимо  $h_i(t)$  через  $s_i(t)$

$$h_i(t) = h_i(0) \exp \left( \int_0^t s_i(\tau) d\tau \right), \quad i = 1, 2,$$

де  $h_1(0) = h_2(0) = h_0$ .

Тоді

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = \frac{1}{h_0} \left( \exp \left( - \int_0^t s_1(\tau) d\tau \right) - \exp \left( - \int_0^t s_2(\tau) d\tau \right) \right).$$

Використавши

$$e^x - e^y = (x - y) \int_0^1 e^{y+\tau(x-y)} d\tau,$$

отримаємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0} \int_0^t s(\tau) d\tau \int_0^1 \exp \left( - \int_0^t (\sigma s(\tau) + s_2(\tau)) d\tau \right) d\sigma. \quad (36)$$

Аналогічно

$$\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} = -\frac{2}{h_0^2} \int_0^t s(\tau) d\tau \int_0^1 \exp \left( -2 \int_0^t (\sigma s(\tau) + s_2(\tau)) d\tau \right) d\sigma. \quad (37)$$

Використавши (35)–(37) і підставивши (30) в (33), (34), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих  $s(t)$ ,  $q(t)$ . З єдиності розв'язків таких систем випливає, що  $s(t) = 0$ ,  $q(t) = 0$ ,  $t \in [0, t_0]$ . Звідси отримаємо  $s_1(t) = s_2(t)$ ,  $q_1(t) = q_2(t)$ ,  $t \in [0, t_0]$ , а отже,  $h_1(t) = h_2(t)$ ,  $b_1(t) = b_2(t)$ ,  $t \in [0, t_0]$ . Використовуючи це в задачі (25)–(27), знаходимо, що  $v_1(y, t) = v_2(y, t)$ ,  $(y, t) \in \bar{Q}_{t_0}$ , що завершує доведення теореми 2.

- 
1. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.
  2. Cannon J.R., Perez-Esteve S. Determination of the coefficient of  $u_x$  in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – Vol. 10, No. 3. – P. 521-531.
  3. Пабирівська Н. В. Теплові моменти в оберненій задачі для параболического рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вып. 56. – С. 142-149.
  4. Іванчов М. І. Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 7. – С. 901-910.
  5. Lorenzi L. An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – Vol. 9, No. 6. – P. 1-27.
  6. Іванчов М. Inverse problems for equations of parabolic type. – VNTL Publishers, 2003.
  7. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

**DETERMINATION OF UNKNOWN MULTIPLIER IN THE  
COEFFICIENT AT THE FIRST DERIVATIVE IN A  
PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN**

**Halyna SNITKO**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
79060, Lviv, Naukova Str., 3b*

We established conditions of existence and uniqueness of the solution to the inverse problem for a parabolic equation with unknown multiplier in the coefficient at the first derivative in a domain with free boundary.

*Key words:* inverse problem, Green's function, free boundary, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 25.12.2006

Прийнята до друку 24.10.2007