

УДК 517.537.72

**ПРО НАЛЕЖНІСТЬ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У
ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ СКІНЧЕННОГО
R-ПОРЯДКУ ДО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ**

Оксана МУЛЯВА¹, Мирослав ШЕРЕМЕТА²

¹Київський національний університет харчових технологій,
01004, Київ, вул. Володимирська, 68

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Для ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$ нехай $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і $\mu(\sigma) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ ($\sigma < 0$). Визначено умови на λ_n для еквівалентності співвідношень $\int_{-1}^0 \frac{\ln M(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty$ і $\int_{-1}^0 \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty$ ($\varrho > 0$).

Ключові слова: ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, клас збіжності.

1. Нехай $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід’ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), а $S^0(\Lambda)$ – клас рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Для $\sigma < 0$ нехай $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ – максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma, F) = \max\{n \geq 0 : |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$ – його центральний індекс, а $\varkappa_n = \frac{\ln |a_n| - \ln |a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$.

Величина $\varrho_R = \lim_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \ln M(\sigma, F)$ називається [1] R -порядком $F \in S^0(\Lambda)$. За умови $0 < \varrho_R < +\infty$ клас збіжності означається [2] умовою

$$\int_{-1}^0 \frac{\ln M(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty. \quad (2)$$

В [2] доведено таке: якщо $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$), то для того, щоб ряд (1) належав до класу збіжності, необхідно, а у випадку, коли послідовність (λ_n) неспадна, достатньо, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\lambda_n}\right)^2 \exp\left\{-\frac{\varrho_R \lambda_n}{\ln^+ |a_n|}\right\} < +\infty$. Умову $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$) у доведенні цього твердження використовували тільки для того, щоб показати, що співвідношення (2) рівносильне співвідношенню

$$\int_{-1}^0 \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty. \tag{3}$$

Виникає запитання про істотність умови $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$) для еквівалентності співвідношень (2) і (3). Цій проблемі присвячена наша стаття. Ми покажемо, що наведена умова досить вузька, зазначимо умову, близьку до необхідної. Іншими словами, доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Для того, щоб для кожної функції $F \in S^0(\Lambda)$ співвідношення (2) і (3) були рівносильними, необхідно, щоб $\ln n = O(\lambda_n/\ln^2 \lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$), і достатньо $\ln n \leq \lambda_n/\ln^q \lambda_n$ ($n \geq n_0$) з $q > 3$.*

Ця теорема є об'єднанням нижче доведених тверджень 1 і 2.

2. Необхідна умова еквівалентності співвідношень (2) і (3). Для визначення такої умови використовуватимемо такі леми.

Лема 1. (3) . *Нехай $\alpha : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ і $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – невід’ємні неперервні зростаючі до $+\infty$ функції і $\alpha(x + O(1)) \sim \alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Якщо $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha(n)/\gamma(\lambda_n)) > 1$, то існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \leq \alpha^{-1}(\gamma(\lambda_k^*)) + 1$ для всіх $k \geq 1$ і $k_j \geq \alpha^{-1}(\gamma(\lambda_{k_j}^*))$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.*

Лема 2. (4, с. 10) . *Якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$, то абсциса σ_a абсолютної збіжності ряду (1) обчислюється за формулою $\sigma_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}$.*

Лема 3. *Співвідношення (3) рівносильне співвідношенню*

$$\int_{-1}^0 \frac{\lambda_{\nu(\sigma, F)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty. \tag{4}$$

Доведення. Справді, оскільки [4, с. 17] $\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(-1, F) + \int_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(x, F)} dx$, то

$$\begin{aligned} l \int_{-1}^0 \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma &= \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} \int_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(x, F)} dx + K_1 = \\ &= \int_{-1}^0 \lambda_{\nu(x, F)} dx \int_x^0 \frac{d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} + K_1 = \frac{1}{\varrho_R} \int_{-1}^0 \frac{\lambda_{\nu(x, F)}}{\exp\{\varrho_R/|x|\}} dx + K_1, K_1 \equiv \text{const} > 0, \end{aligned}$$

тобто співвідношення (3) і (4) рівносильні.

Тепер можемо довести таке твердження.

Твердження 1. Умова $\ln n = O(\lambda_n / \ln^2 \lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$) є необхідною для того, щоб для кожної функції $F \in S^0(\Lambda)$ співвідношення (2) і (3) були рівносильними.

Доведення. Припустимо, що умова $\ln n = O(\lambda_n / \ln^2 \lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$) не виконується. Тоді існує додатна неперервна повільно зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція l така, що $l(x) = o(\ln^2 x)$ ($x \rightarrow +\infty$) і $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n l(\lambda_n) / \ln^2 \lambda_n} > 1$. За лемою 1 з $\alpha(x) = \ln x$ і $\gamma(x) = xl(x) / \ln^2 x$, $x \geq 1$, існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \leq \exp\{\lambda_k^* l(\lambda_k^*) / \ln^2 \lambda_k^*\} + 1$ для всіх $k \geq 1$ і $k_j \geq \exp\{\lambda_{k_j}^* l(\lambda_{k_j}^*) / \ln^2 \lambda_{k_j}^*\}$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Якщо $\lambda_n \neq \lambda_k^*$, то прийнемо $a_n = 0$, а з метою скорочення запису в отриманому ряді Діріхле замінемо λ_k^* на λ_n . Прийдемо до ряду Діріхле (1), де послідовність (λ_n) така, що $\ln n \leq \lambda_n l(\lambda_n) / \ln^2 \lambda_n + 1$ для всіх $n \geq 1$ і $\ln n_j \geq \lambda_{n_j} l(\lambda_{n_j}) / \ln^2 \lambda_{n_j}$ для деякої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел. Послідовність (n_j) можемо вважати такою, що $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{l(\lambda_{n_{j+1}})} < +\infty$ і $n_{j+1} > 2n_j$ для всіх $j \geq 1$.

Нехай (q_k) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, а $m_j = [n_{j+1}/2]$. Прийнемо $n_0 = 0$, $a_{n_0} = 1$, $a_n = 0$ для всіх $n_j < n < m_j$,

$$a_{n_{j+1}} = \prod_{k=0}^j \exp\{|q_k|(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

і

$$a_n = a_{n_j} \exp\{|q_j|(\lambda_n - \lambda_{n_j})\}, \quad m_j \leq n < n_{j+1}, \quad (6)$$

тобто отримуємо ряд Діріхле

$$F^*(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_{n_j} \exp\{s\lambda_{n_j}\} + \sum_{n=m_j}^{n_{j+1}-1} a_n \exp\{s\lambda_n\} \right). \quad (7)$$

З (5) і (6) легко випливає, що

$$\frac{\ln a_{n_j} - \ln a_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_{j+1}} - \lambda_{n_j}} = \frac{\ln a_{n_j} - \ln a_{m_j}}{\lambda_{m_j} - \lambda_{n_j}} = \frac{\ln a_n - \ln a_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = q_j, \quad m_j \leq n < n_{j+1}.$$

Якщо $q_j \leq \sigma < q_{j+1}$, то $\nu(\sigma, F^*) = n_{j+1}$ і $\mu(\sigma, F^*) = a_{n_{j+1}} \exp\{\sigma \lambda_{n_{j+1}}\}$. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \int_{q_1}^0 \frac{\lambda_{\nu(\sigma, F^*)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{\lambda_{\nu(\sigma, F^*)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} \int_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{d\sigma}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} \int_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{\sigma^2 d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} \frac{1}{\varrho_R} \int_{q_j}^{q_{j+1}} \sigma^2 d \left(-\frac{1}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\varrho_R} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} \left(\frac{|q_j|^2}{\exp\{\varrho_R/|q_j|\}} - \frac{|q_{j+1}|^2}{\exp\{\varrho_R/|q_{j+1}|\}} - 2 \int_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{|\sigma| d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{\varrho_R} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n_{j+1}} |q_j|^2}{\exp\{\varrho_R/|q_j|\}}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

З іншого боку, для всіх досить великих j

$$\begin{aligned}
 M(q_j, F^*) &\geq \sum_{n=m_j}^{n_{j+1}} a_n \exp\{q_j \lambda_n\} = (n_{j+1} - m_j) \mu(q_j, F^*) \geq \\
 &\geq K_2 n_{j+1}, \quad K_2 \equiv \text{const} > 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Виберемо $q_j = -\varrho_R \left(\ln \frac{\lambda_{n_{j+1}} l(\lambda_{n_{j+1}})}{\ln^2 \lambda_{n_{j+1}}} \right)^{-1}$. Оскільки l – повільно зростаюча функція, то $\ln l(x) = o(\ln x)$ ($x \rightarrow +\infty$), тому $|q_j| \leq K_3 / \ln \lambda_{n_{j+1}}$ ($j \geq j_0$), $K_3 \equiv \text{const} > 0$. З (9) отримуємо

$$\ln M(q_j, F^*) \geq \ln n_{j+1} + \ln K_2 \geq \frac{\lambda_{n_{j+1}} l(\lambda_{n_{j+1}})}{\ln^2 \lambda_{n_{j+1}}} + \ln K_2 = \exp \left\{ \frac{\varrho_R}{|q_j|} \right\} + \ln K_2,$$

тобто співвідношення (2) не виконується, бо з нього випливає, що $\ln M(\sigma, F) = o(\exp\{\varrho_R/|\sigma|\})$ ($\sigma \uparrow 0$).

Водночас з (8) маємо

$$\int_{q_1}^0 \frac{\lambda_{\nu(\sigma, F^*)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_3^2 \lambda_{n_{j+1}}}{\frac{\lambda_{n_{j+1}} l(\lambda_{n_{j+1}})}{\ln^2 \lambda_{n_{j+1}}} \ln^2 \lambda_{n_{j+1}}} = K_3^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{l(\lambda_{n_{j+1}})} < +\infty,$$

тобто співвідношення (4), а за лемою 3 і співвідношення (3) правильні.

Залишилось довести, що ряд (7) має нульову абсцису абсолютної збіжності. Оскільки $|q_k| \downarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), то з (5) випливає, що

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_{j+1}}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^j |q_k| (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})}{\sum_{k=0}^j (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})} = 0,$$

а з (6) для $m_j \leq n < n_{j+1}$ маємо

$$\frac{\ln a_n}{\lambda_n} \leq \frac{\ln a_{n_j}}{\lambda_n} + |q_j| \leq \frac{\ln a_{n_j}}{\lambda_{n_j}} + |q_j| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Отже, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{\lambda_n} = 0$ і, оскільки $\ln n \leq \lambda_n l(\lambda_n) / \ln^2 \lambda_n + 1 = o(\lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$), то за лемою 2 $\sigma_a = 0$. Твердження 1 повністю доведено.

3. Достатня умова еквівалентності співвідношень (2) і (3). Будемо використовувати методику і результати зі статті [5]. Позначимо через $\Omega(0)$ клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' неперервна, додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Нехай φ – функція, обернена до Φ' , а $\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [5] функція Ψ неперервна і зростає до 0 на $(-\infty, 0)$, а функція φ неперервна і зростає до 0 на $(0, +\infty)$. Нарешті, нехай $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності Λ .

Лема 4. *Нехай $\Phi \in \Omega(0)$, $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ і $\ln n(t) = o(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Припустимо, що додатна на $(-\infty, 0)$ функція β така, що $\beta(\sigma) < |\sigma|$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, і позначимо $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$. Тоді для всіх досить близьких до 0 значень $\sigma < 0$*

$$\sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\} \leq \beta(\sigma) \int_{\gamma(\sigma)}^{\infty} n(t) \exp\{t\beta(\sigma)\} dt.$$

Доведення цієї леми таке саме, як і леми 4 з [5]. Використовуючи лему 4, неважко (див. доведення теореми 2 з [5]) довести таку лему.

Лема 5. *Нехай α – неперервна, додатна і зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що $\alpha(t) = o(t)$, $t \rightarrow +\infty$. Припустимо, що $\ln n(t) \leq t/\alpha(t)$ при $t \geq t_0$, а функція $\Phi \in \Omega(0)$ така, що*

$$\frac{2\Phi'(\sigma)}{\alpha(\Phi'(\sigma))} < \Phi(\sigma) + |\sigma|\Phi'(\sigma), \quad \sigma_0 \leq \sigma < 0. \quad (10)$$

Якщо $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, $\beta(\sigma) = \frac{2}{\alpha(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))}$ і $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$, то

$$\sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\} \rightarrow 0, \quad \sigma \uparrow 0. \quad (11)$$

Тепер можемо довести таке твердження.

Твердження 2. *Умова $\ln n \leq \lambda_n / \ln^q \lambda_n$ ($n \geq n_0$) з $q > 3$ є достатньою для того, щоб для кожної функції $F \in S^0(\Lambda)$ співвідношення (2) і (3) були рівносильними.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що з огляду на нерівність $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ з (2) випливає (3). Якщо ж виконується (3), то $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma) = \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$. Зауважимо ще, що з умови $\ln n \leq \lambda_n / \ln^q \lambda_n$ ($n \geq n_0$) випливає нерівність $\ln n(t) \leq t/\alpha(t)$ при $t \geq t_0$ з $\alpha(t) = \ln^q t$, $q > 3$.

Оскільки $\Phi'(\sigma) = \frac{\varrho_R \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}{|\sigma|^2}$, то неважко перевірити, що $\frac{2\Phi'(\sigma)}{\ln^q \Phi'(\sigma)} < \Phi(\sigma) + |\sigma|\Phi'(\sigma)$, $\sigma_0 \leq \sigma < 0$, тобто умова (10) виконується і за лемою 5 правильне співвідношення (11), де $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$ і $\beta(\sigma) = \frac{2}{\ln^q \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}$.

Оскільки $\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} = \sigma - \frac{\sigma^2}{\varrho_R}$, то $\Psi^{-1}(\sigma) = \sigma + \frac{\sigma^2}{\varrho_R} + O(\sigma^3)$ ($\sigma \uparrow 0$) і $1/\Psi^{-1}(\sigma) = -1/|\sigma| - 1/\varrho_R + O(\sigma)$ ($\sigma \uparrow 0$). Тому $\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)) = \frac{e\varrho_R(1+o(1)) \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}{|\sigma|^2}$ при $\sigma \uparrow 0$, звідки випливає, що

$$\beta(\sigma) = \frac{2(1+o(1))|\sigma|^q}{\varrho_R^q} \text{ та } \frac{1}{\sigma + \beta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma} - \frac{2(1+o(1))|\sigma|^{q-2}}{\varrho_R^q} \text{ при } \sigma \uparrow 0.$$

Звідси випливає, що

$$\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))) = \frac{e\varrho_R(1+o(1)) \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}{|\sigma|^2}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} M(\sigma, F) &\leq \left(\sum_{\lambda_n \leq \gamma(\sigma)} + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} \right) |a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\} \leq \\ &\leq \mu(\sigma, F)(n(\gamma(\sigma)) + 1) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\}, \end{aligned}$$

то з огляду на (11) нам залишається довести, що $\int_{-1}^0 \frac{\ln n(\gamma(\sigma))}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty$. Але

$$\ln n(\gamma(\sigma)) \leq \gamma(\sigma) / \ln^q \gamma(\sigma) = e\varrho_R^{1-q} (1+o(1)) |\sigma|^{q-2} \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

і, оскільки $q > 3$, то

$$\int_{-1}^0 \frac{\ln n(\gamma(\sigma))}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma \leq K_4 \int_{-1}^0 |\sigma|^{q-4} d\sigma < +\infty.$$

Твердження 2 доведено.

Зауваження 1. У доведенні твердження 2 використано нерівність $\ln \mu(\sigma, F) \leq \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}$ ($\sigma \in [\sigma_0, 0)$). Насправді ж із (3) випливає, що

$$\ln \mu(\sigma, F) = o(\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}) \quad (\sigma \uparrow 0).$$

Тому може бути правдоподібним таке твердження.

Гіпотеза 1. Умова $\ln n = O(\lambda_n / \ln^2 \lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$) є необхідною і достатньою для того, щоб для кожної функції $F \in S^0(\Lambda)$ співвідношення (2) і (3) були рівносильними.

1. Гайсин А.М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости // Мат. сб. – 1982. – Т. 117, №3. – С. 412-424.

2. Мулява О.М. Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №11. – С. 1485-1494.
3. Sumyk O.M., Sheremeta M.M. On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of m-member asymptotics // Matem. Studii. – Vol. 19, №1. – 2003. – P. 83-88.
4. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.
5. Шеремета М.Н., Федьняк С.И. О производной ряда Дирихле // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206-223.

ON THE BELONGING OF DIRICHLET SERIES ABSOLUTELY CONVERGENT IN HALF-PLANE TO A CONVERGENCE CLASS

Mulyava Oksana¹, Sheremeta Myroslav²

¹*Kyiv National University of Food Technology,
01004, Kyiv, Volodymyrska Str., 68*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska Str., 1*

For a Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with the abscissa of absolute convergence $\sigma_a = 0$ let $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and $\mu(\sigma) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ ($\sigma < 0$). Conditions on λ_n for the equivalence of relations $\int_{-1}^0 \frac{\ln M(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty$ and $\int_{-1}^0 \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty$ ($\varrho > 0$) are established.

Key words: Dirichlet series, maximum modulus, maximal term, convergence class.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2006

Прийнята до друку 24.10.2007