ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.191-199 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.191-199*

УДК 517.53

ПРО ТРИЧЛЕННУ СТЕПЕНЕВУ АСИМПТОТИКУ ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Любомира ЛУГОВА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Досліджено тричленну степеневу асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, тричленна степенева асимптотика.

1. Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), ряд Діріхле $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $z = \sigma + it$, є цілим, а $\mu(\sigma) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 0\}$ – його максимальний член. У випадку, коли R-порядок цілого ряду Діріхле дорівнює нулеві, то для характеристики зростання $\ln\mu(\sigma)$ вводять логарифмічні R-порядок p_1 і R-тип T_1 (за умови $1 < p_1 < \infty$) за формулами $p_1 = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln\ln\mu(\sigma)}{\ln\sigma}$, $T_1 = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln\mu(\sigma)}{\sigma^{p_1}}$. З отриманої в [1] загальної теореми про умови на коефіцієнти та показники цілого ряду Діріхле, за яких $\ln\mu(\sigma) \sim \Phi(\sigma)$ $(\sigma \to +\infty)$ для додатної неперервної опуклої на $(-\infty, +\infty)$ функції Φ, легко отримати, що $\ln\mu(\sigma) \sim T_1\sigma^{p_1}$ $(\sigma \to +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існує $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln|a_n| \le -T_1(p_1-1)(1+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)}$ для всіх $n \ge n_0$;

2) існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} \to 1$ $(k \to \infty)$ і $\ln|a_{n_k}| \ge -T_1(p_1-1)(1-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)}$.

Двочленну асимптотику вигляду $\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + (\tau + o(1))\sigma^p$, $\sigma \to +\infty$, де $0 < p < p_1$ і $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, у випадку, коли $\lambda_n = n$ (тобто для степеневих рядів) вивчено в [2]. Цей результат можна перенести на цілі ряди Діріхле з довільними показниками. Фактично, якщо $T_1 > 0$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_1 > 1$ і $0 < p < p_1$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + (1+o(1))\tau\sigma^p$, $\sigma \to +\infty$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + (\tau+\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p/(p_1-1)};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + (\tau-\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p/(p_1-1)}$$

і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+p-2}{2(p_1-1)}}\Big), \qquad k \to \infty.$

Тричленну степеневу асимптотику

$$\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty, \tag{1}$$

де $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ досліджено в [3], де доведено таку теорему.

Теорема А. *Для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну степеневу асимптотику (1), необхідно, а у випадку, коли $p \geq 2p_2 - p_1$, і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ +(\tau^*+\varepsilon)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ +(\tau^*-\varepsilon)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}}$$

і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+\max\{p,\,2p_2-p_1\}-2}{2(p_1-1)}}\Big)$, при $k \to \infty$, де

$$\tau^* = \tau I_{\{p:p\geq 2p_2-p_1\}}(p) - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} I_{\{p:p\leq 2p_2-p_1\}}(p),$$

а $I_E(p)$ – характеристична функція множини E, тобто $I_E(p) = 1$, коли $p \in E$, і $I_E(p) = 0$, коли $p \notin E$.

Коли $p < 2p_2 - p_1$, умови 1) і 2) у теоремі А не достатні для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну степеневу асимптотику (1). Якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, а третій член асимптотики в (1) має вигляд $(\tau + o(1))\sigma^p = \tau\sigma^p + o(\sigma^s)$ при $\sigma \to +\infty$, де $s < p$, то теорему А можна уточнити. Правильною є така теорема.

Теорема B. *Нехай $2p_2-p_1>0$ і $(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1)\neq 0$. Для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1}+o(\sigma^{3p_2-2p_1}),\quad \sigma\to+\infty,$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\geq n_0$

$$\ln|a_n|\leq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)}-$$
$$-\Big(\tfrac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}-\varepsilon\Big)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}|\geq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)}-$$
$$-\Big(\tfrac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}+\varepsilon\Big)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}};$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{3p_2-p_1-2}{2(p_1-1)}}\Big),\qquad k\to\infty.$

Тут продовжуємо дослідження тричленної степеневої асимптотики логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле у випадку, коли

$$(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1)=0.$$

Правильні такі теореми.

Теорема 1. *Нехай $p_1>2$. Для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{(2p_1-1)/3}+\frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3}+o(\sigma^{-(p_1+4)/3}),\quad \sigma\to+\infty, \tag{2}$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\geq n_0$

$$\ln|a_n|\leq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{(2p_1-1)/(3(p_1-1))}-$$
$$-\Big(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}-\varepsilon\Big)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{-(p_1+4)/(3(p_1-1))};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}|\geq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{(2p_1-1)/(3(p_1-1))}-$$
$$-\Big(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}-\varepsilon\Big)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{-(p_1+4)/(3(p_1-1))}$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\Big(\lambda_{n_k}^{(p_1-5)/(3(p_1-1))}\Big)$, $k\to\infty$.

Теорема 2. *Нехай* $(p_1-3)(p_1-6)\neq 0$. *Для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{2p_1/3}+\frac{2p_1T_2^2}{9T_1(p_1-1)}\sigma^{p_1/3}+o(\sigma^{-p_1/3}),\quad \sigma\to+\infty,$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n\geq n_0$

$$\ln|a_n|\leq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{2p_1/(3(p_1-1))}-\tfrac{4T_2^3}{81T_1^3(p_1-1)^3}-\\ -\left(\frac{2p_1(p_1-3)(p_1-6)T_2^4}{2187T_1^3(p_1-1)^3}-\varepsilon\right)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{-p_1/(3(p_1-1))};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}|\geq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{(2p_1-1)/(3(p_1-1))}-\\ -\left(\frac{2p_1(p_1-3)(p_1-6)T_2^4}{2187T_1^3(p_1-1)^3}+\varepsilon\right)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{-(p_1+4)/(3(p_1-1))}$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\Big(\lambda_{n_k}^{(p_1-3)/(3(p_1-1))}\Big)$, $k\to\infty$.

Теорема 3. *Для того, щоб* $\ln\mu(\sigma)=T_1\sigma^6+T_2\sigma^4+\dfrac{4T_2^2}{15T_1}\sigma^2+o(\sigma^{-4})$, $\sigma\to+\infty$, *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon>0$:

1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n\geq n_0$

$$\ln|a_n|\leq -5T_1\Big(\frac{\lambda_n}{6T_1}\Big)^{6/5}+T_2\Big(\frac{\lambda_n}{6T_1}\Big)^{4/5}-\frac{8T_2^3}{675T_1^2}+\left(\frac{16T_2^5}{5(15T_1)^4}+\varepsilon\right)\Big(\frac{\lambda_n}{6T_1}\Big)^{-4/5};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}|\geq -5T_1\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\frac{\lambda_n}{6T_1}\Big)^{4/5}-\frac{8T_2^3}{675T_1^2}+\left(\frac{16T_2^5}{5(15T_1)^4}-\varepsilon\right)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{6T_1}\Big)^{-4/5}$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\Big(1\Big)$, $k\to\infty$.

Теорема 4. *Для того, щоб* $\ln\mu(\sigma)=T_1\sigma^3+T_2\sigma^2+\dfrac{T_2^2}{3T_1}\sigma+o(\sigma^{-2})$, $\sigma\to+\infty$, *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon>0$:

1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n\geq n_0$

$$\ln|a_n|\leq -2T_1\Big(\frac{\lambda_n}{6T_1}\Big)^{3/2}+T_2\frac{\lambda_n}{6T_1}-\frac{T_2^3}{27T_1^2}+\varepsilon\Big(\frac{\lambda_n}{3T_1}\Big)^{-1};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}|\geq -2T_1\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{6T_1}\Big)^{3/2}+T_2\frac{\lambda_{n_k}}{6T_1}-\frac{T_2^3}{27T_1^2}-\varepsilon\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{3T_1}\Big)^{-1}$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\Big(\lambda_{n_k}^{-1/4}\Big)$, $k\to\infty$.

2. Допоміжні результати. Нехай $\Omega(+\infty)$ – клас додатних на $(-\infty,+\infty)$ функцій Φ таких, що похідні Φ' неперервно диференційовні, додатні і зростають до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$. Через φ позначатимемо функцію, обернену до Φ', і нехай $\Psi(\sigma)=\sigma-\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Лема 1 [4-5]. *Нехай $\Phi\in\Omega(+\infty)$. Для того, щоб $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\geqslant\sigma_0$, необхідно і достатньо, щоб $\ln|a_n|\leqslant-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n\geqslant n_0$.*

Для $\Phi\in\Omega(+\infty)$ і $0<a<b<+\infty$ приймемо

$$G_1(a,b,\Phi)=\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt,\quad G_2(a,b,\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)dt\right).$$

Лема 2 [5]. *Нехай $\Phi\in\Omega(+\infty)$ і $\ln|a_{n_k}|\le-\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел. Тоді для всіх $\sigma\in[\varphi(\lambda_{n_k}),\varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k\geqslant k_0$ правильна нерівність*

$$\ln\mu(\sigma,F)\ge\Phi(\sigma)-(G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)-G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)). \tag{3}$$

Лема 3 [5]. *Нехай $\Phi_1\in\Omega(+\infty)$, $\Phi_2\in\Omega(+\infty)$ і для всіх $\sigma\geqslant\sigma_0$*

$$\Phi_1(\sigma)\le\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi_2(\sigma). \tag{4}$$

Тоді

$$\ln|a_n|\le-\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)),n\geqslant n_0, \tag{5}$$

та існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}|\ge-\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) \tag{6}$$

і

$$G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi_2)\geqslant\Phi_1\left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}\int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}}\varphi_2(t)dt\right), \tag{7}$$

де Ψ_j і φ_j побудовані відповідно для Φ_j.

Припустимо тепер, що

$$\Phi(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+\tau\sigma^p+\delta\sigma^s\quad(\sigma\ge\sigma_0), \tag{8}$$

де $T_1>0$, $p_1>1$, $0<p<p_2<p_1$, $s\le p$, $T_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $\delta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, а

$$W(x)=T_1(p_1-1)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-T_2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}}.$$

Тоді правильні дві леми.

Лема 4 [3]. *Нехай функція $\Phi\in\Omega(+\infty)$ задовольняє умову (8). Тоді при $x\to+\infty$ правильні такі асимптотичні рівності:*

1) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ *і* $\delta \neq \dfrac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то*

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) + \left(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

2) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1-3)(p_1-6) \neq 0$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$ *і* $\delta \neq \dfrac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то*

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) + \frac{(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} +$$
$$+\left(\frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

3) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq -\dfrac{(2T_2)^5}{10(15T_1))^4}$, *то*

$$x\Psi(\varphi(x)) = 5T_1\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{6/5} - T_2\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{4/5} + 5T_1\left(\frac{2T_2}{15T_1}\right)^3 -$$
$$-\left(\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4} + \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{-4/5};$$

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то*

$$x\Psi(\varphi(x)) = 2T_1\left(\frac{x}{3T_1}\right)^{3/2} - T_2\frac{x}{3T_1} + T_1\left(\frac{T_2}{3T_1}\right)^3 - (\delta + o(1))\left(\frac{x}{3T_1}\right)^{-1}.$$

Лема 5 [3]. *Нехай функція* $\Phi \in \Omega(+\infty)$ *задовольняє умову (8). Якщо* $\theta_k \to 0$ $(k \to \infty)$, *то*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) - G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = \tfrac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\tfrac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} +$$
$$+O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) + g(t_k, \theta_k),$$

де при $k \to \infty$ *правильні такі асимптотичні рівності:*

1) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ *і* $\delta \neq \dfrac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right)$;

2) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1-3)(p_1-6) \neq 0$ *і* $\delta \neq \dfrac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right)$;

3) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq -\dfrac{(2T_2)^5}{10(15T_1))^4}$, *то* $g(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{-4/5}\right)$;

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то* $g(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{-1}\right)$;

Нам треба також таку лему.

Лема 6 [3]. *Нехай* $\Phi_1(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \tau\sigma^p - \delta\sigma^s \quad (\sigma \geq \sigma_0)$, $\Phi_2(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \tau\sigma^p + \delta\sigma^s \quad (\sigma \geq \sigma_0)$, *де* $\delta > 0$ *і* $s \leq p$. *Припустимо, що* $t_{k+1} = (1+\theta_k)t_k$ *і* $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geq \Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2))$. *Тоді* $\theta_k \to 0$ $(k \to \infty)$ *і*

$$\theta_k^2 \leq \frac{16(p_1-1)}{T_1p_1}(\delta + o(1))\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1}{p_1-1}} + g^*(t_k, \theta_k),$$

де при $k \to \infty$ *правильні такі асимптотичні рівності:*

1) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ *і* $\delta \neq \pm\dfrac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)$;

2) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1-3)(p_1-6) \neq 0$ *і* $\delta \neq \pm\dfrac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)$;

3) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq \pm\dfrac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{-2}\right)$;

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{-5/2}\right)$.

3. Доведення теорем. З огляду на подібність, розглянемо тільки доведення теореми 1. Нехай $0 < \delta < \frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$. Тоді з (2) для всіх $\sigma \geq \sigma_0(\delta)$ маємо (4) з $\Phi_1(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{(2p_1-1)/3} + \frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3} - \delta\sigma^{-(p_1+4)/3}$ і $\Phi_2(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{(2p_1-1)/3} + \frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3} + \delta\sigma^{-(p_1+4)/3}$. Тому за лемою 3 правильні нерівності (5) – (7). Але за твердженням 1) леми 4

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = T_1(p_1-1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)} - T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{p_2/(p_1-1)} +$$
$$+\left(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}, \quad n\to\infty,$$
$$\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = T_1(p_1-1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)} - T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{p_2/(p_1-1)} +$$
$$+\left(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}, \quad k\to\infty,$$

а за твердженням 1) леми 6 з нерівності (7) випливає, що $\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2 \leq \frac{16(p_1-1)}{T_1p_1}(\delta+$ $+o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-4p_1}{p_1-1}}$, $k\to\infty$. Тому, завдяки довільності δ, з цих співвідношень випливає необхідність умов 1) і 2) у теоремі 1. Щодо достатності, то з умови 1) за лемою 1 і твердженням 1) леми 4 отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \leq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{(2p_1-1)/3} + \frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3} + o(\sigma^{-(p_1+4)/3}),\ \sigma\to+\infty. \quad (9)$$

Далі, за лемою 2 і твердженням 1) леми 5 з умови 2) теореми 1 для всіх $\sigma\in[\varphi_1(\lambda_{n_k}),\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k\geq k_0$ маємо

$$\ln\mu(\sigma) \geq \Phi_1(\sigma) - \frac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + O\left(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) +$$
$$+o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right) = \Phi_1(\sigma) + o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right), \quad k\to\infty, \quad (10)$$

бо $\theta_k = o(\lambda_{n_k}^{\frac{4p_2-4p_1}{2(p_1-1)}})$, $k\to\infty$. Оскільки $\varphi_1(\lambda_{n_k})\leq\sigma\leq\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})$, то $\lambda_{n_k}\leq\Phi_1'(\sigma)\leq\lambda_{n_{k+1}}$ і з (10) маємо $\ln\mu(\sigma) \geq \Phi_1(\sigma) + o\left(\Phi_1'(\sigma)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right) = \Phi_1(\sigma) + o(\sigma^{4p_2-3p_1})$, $\sigma\to+\infty$, звідки, завдяки довільності δ, отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \geq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{(2p_1-1)/3} + \frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3} + o(\sigma^{-(p_1+4)/3}), \quad \sigma\to+\infty. \quad (11)$$

З (9) і (11) випливає (2). Теорему 1 доведено.

Решта теорем доводиться подібно, використовуючи пункти 2)-4) допоміжних результатів відповідно.

1. *Заболоцький М.В., Шеремета М.М.* Узагальнення теореми Ліндельофа // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 9. – С. 1177-1192.
2. *Тарасюк Р.І.* Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами // Волинськ. матем. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 162-164.
3. *Шеремета М.М., Лугова Л.Л.* Тричленна степенева асимптотика логарифма масимального члена цілого ряду Діріхле // Матем. студії. – 2006. – Т. 25, № 2. – С. 149-168.
4. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле // Сибирск. мат. журн. – 1998. – Т. 39, № 1. – С. 206-223.
5. *Шеремета М.М., Сумик О.М.* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгою функцій // Матем. студії. – 1999. – Т. 11, № 1. – С. 41-47.

ON THREE-TERM POWER ASYMPTOTIC FOR THE LOGARITHM OF THE MAXIMAL TERM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES

Liubomyra LUHOVA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

It is investigated three-term power asymptotic for the logarithm of the maximal term of an entire Dirichlet series.

Key words: Dirichlet series, maximal term, three-term power asymptotic.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.2007

Прийнята до друку 24.10.2007