ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.153-165 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.153-165*

УДК 517.95

ПРО НОСІЙ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО $2b$-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Олесь КОРКУН, Сергій ЛАВРЕНЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Розглянуто задачу Коші для рівняння
$u_t + \sum\limits_{|\alpha|=2} D_x^\alpha(a_\alpha(z,t,u,D_xu,D_x^2u)) - \sum\limits_{|\beta|=1} D_z^\beta(b_\beta(z,t,u,D_zu)) + c(z,t,u) = f.$
Одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку, компактності носія розв'язку.

Ключові слова: $2b$-параболічне рівняння, задача Коші.

У 1960 році С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, ввівши термін "$\vec{2b}$-параболічні системи". У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними приписують різну вагу стосовно диференціювання за змінною t. Було розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем зазначеного типу (див. праці [2]–[21]).

Мета цієї праці – дослідити задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння з похідною першого порядку за часовою змінною, в якому за групою просторових змінних є диференціальний оператор четвертого порядку, і за всіма просторовими змінними – другого порядку. Зазначимо, що на праці, присвячені вивченню нелінійних рівнянь такого типу, ми не натрапляли.

Нехай $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n$, $k+m=n$; $Q_\tau = \mathbb{R}^n \times (0,\tau)$, $0<\tau<T$. Розглянемо в області Q_T рівняння

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha(a_\alpha(z,t,u,D_xu,D_x^2u)) - \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta(b_\beta(z,t,u,D_zu)) + c(z,t,u) = f \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Тут $D_w^j u$ позначає вектор всіх похідних функції u за змінними $w = (w_1,\dots,w_l)$ порядку j $(j=1,2)$, причому $D_w^1 u \equiv D_w u$,

$$D_w^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial w_1^{\gamma_1}\dots\partial w_l^{\gamma_l}}, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_l.$$

Приймемо

$$| D_x^j u |_p = \left(\sum_{|\alpha|=j} | D_x^\alpha u |^p \right)^{1/p}, p \in [2,\infty), \ j = 1,2;$$

$$| D_z u |_q = \left(\sum_{|\beta|=1} | D_z^\beta u |^q \right)^{1/q}, q \in [2,\infty).$$

Припускатимемо, що виконуються такі умови:

(**A**) функції $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi,\eta,\zeta)$ вимірні в Q_T для всіх $(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^{1+k+N(k)}$, функції $a_\alpha(z,t,\cdot,\cdot,\cdot)$ неперервні в $\mathbb{R}^{1+k+N(k)}$ майже для всіх $(z,t) \in Q_T$, де $N(k)$ – довжина вектора ζ_α, $|\alpha| = 2$; майже для всіх $(z,t) \in Q_T$ і для всіх$(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^{1+k+N(k)}$ правильні такі нерівності:
$$\sum_{|\alpha|=2} (a_\alpha(z,t,\xi,\eta,\zeta) - a_\alpha(z,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\zeta}))(\zeta_\alpha - \widetilde{\zeta}_\alpha) \geqslant A_0 \sum_{|\alpha|=2} |\zeta_\alpha - \widetilde{\zeta}_\alpha|^p,$$
$$|a_\alpha(z,t,\xi,\eta,\zeta)| \leqslant A_1 \sum_{|\sigma|=2} |\zeta_\sigma|^{p-1},$$ де A_0, A_1 – додатні сталі, $p \in [2,\infty)$;

(**B**) функції $b_\beta(\cdot,\cdot,\xi,\eta)$ вимірні в Q_T для всіх $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{1+m}$, функції $b_\beta(z,t,\cdot,\cdot)$ неперервні в $\mathbb{R}^{1+m}$ майже для всіх $(z,t) \in Q_T$ та $|\beta| = 1$; майже для всіх $(z,t) \in Q_T$ і для всіх $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{1+m}$ правильні такі нерівності:
$$\sum_{|\beta|=1} (b_\beta(z,t,\xi,\eta) - b_\beta(z,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}))(\eta_\beta - \widetilde{\eta}_\beta) \geqslant B_0 \sum_{|\beta|=1} |\eta_\beta - \widetilde{\eta}_\beta|^q,$$
$$|b_\beta(z,t,\xi,\eta)| \leqslant B_1 \sum_{|\sigma|=1} |\eta_\sigma|^{q-1},$$ де B_0, B_1 – додатні сталі, $q \in [2,\infty)$;

(**C**) функція $c(\cdot,\cdot,\xi)$ вимірна в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, функція $c(z,t,\cdot)$ неперервна в $\mathbb{R}$ майже для всіх $(z,t) \in Q_T$; майже для всіх $(z,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ правильні такі нерівності:
$(c(z,t,\xi) - c(z,t,\widetilde{\xi}))(\xi - \widetilde{\xi}) \geqslant C_0|\xi - \widetilde{\xi}|^r$, $r \in (1,\infty)$,
$|c(z,t,\xi)| \leqslant C_1|\xi|^{r-1}$, де стала $C_0 > 0$ при $r \geqslant 2$ і $C_0 = 0$ при $r \in (1,2)$, $C_1 = \text{const} > 0$;

(**F**) $$f(z,t) = \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha f_\alpha(z,t) + \sum_{|\beta|\leqslant 1} (-1)^{|\beta|} D_z^\beta g_\beta(z,t);$$
$f_\alpha \in L^{p'}(Q_T)$, $|\alpha| = 2$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$; $g_\beta \in L^{q'}(Q_T)$, $|\beta| = 1$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$;
$g_0 \in L^{r_0}(Q_T)$, $r_0 = \max\{2; r\}$;

(**U**) $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Позначимо через W_p простір, який є замиканням множини функцій $C([0,T];$ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ у банаховому просторі

$$\{u \in L^{r_0}(Q_T),\ D_x^\alpha u \in L^p(Q_T),\ |\alpha| = 2\}, \quad \|u\|_{W_p} = \|u\|_{L^{r_0}(Q_T)} + \|D_x^2 u\|_{L^p(Q_T)};$$

через W_q простір, який є замиканням множини функцій $C([0,T];C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ у банаховому просторі

$$\{u \in L^{r_0}(Q_T),\ D_z^\beta u \in L^q(Q_T),\ |\beta| = 1\}, \quad \|u\|_{W_q} = \|u\|_{L^{r_0}(Q_T)} + \|D_z u\|_{L^q(Q_T)}.$$

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називатимемо функцію $u \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n)) \bigcap W_q \bigcap W_p$, яка задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(z,\tau)v(z,\tau)\,dz + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-uv_t + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u,D_x u,D_x^2 u)D_x^\alpha v +$$
$$+ \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u,D_z u)D_z^\beta v + c(z,t,u)v\Big]\,dz\,dt = \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha(z,t)D_x^\alpha v +$$
$$+ \sum_{|\beta|\leqslant 1} g_\beta(z,t)D_z^\beta v\Big]\,dz\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(z)v(z,0)\,dz \tag{3}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ і для довільної функції $v \in W_q \bigcap W_p$ такої, що $v_t \in L^2(Q_T)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**F**), (**U**). *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2).*

Доведення. Нехай R – довільне додатне фіксоване число

$$\Pi_x^R = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| < R\},\ \Pi_y^R = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| < R\},$$

$\Omega^R = \Pi_x^R \times \Pi_y^R$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$, $S_T^R = \partial\Omega^R \times (0,T)$. Розглянемо задачу

$$A(u) = f^R, \quad (z,t) \in Q_T^R, \tag{4}$$

$$u(z,0) = u_0^R(z), \quad z \in \Omega^R, \tag{5}$$

$$u\,|_{S_T^R} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\,|_{\partial\Pi_x^R \times \Pi_y^R \times (0,T)} = 0, \tag{6}$$

де ν – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Pi_x^R \times \Pi_y^R \times (0,T)$

$$f^R(z,t) = \begin{cases} f(z,t), & (z,t) \in Q_T^R, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^R, \end{cases} \qquad u_0^R(z) = \begin{cases} u_0(z), & z \in \Omega^R, \\ 0, & z \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^R. \end{cases}$$

На підставі умов теореми виконуються всі умови зауваження 1.13 [22, гл. 2, § 1.7]. Тому задача (4)–(6) має єдиний розв'язок u^R в сенсі розподілів такий, що $u^R \in L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R))$,

$$u^R \in L^q((0,T);W_0^{1,q}(\Omega^R)) \cap L^p((0,T);L^p(\Pi_y^R;W_0^{2,p}(\Pi_x^R))) \cap L^{r_0}(Q_T^R) \equiv V_R(0,T).$$

Зокрема,

$$u_t^R = -\sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha(a_\alpha(\cdot,\cdot,u^R,D_xu^R,D_x^2u^R)) + \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta(b_\beta(\cdot,\cdot,u^R,D_zu^R)) - \\ -c(\cdot,\cdot,u^R) + f^R(\cdot,\cdot)$$

і

$$u_t^R \in V_R^*(0,T) \equiv L^{q'}((0,T);W^{-1,q'}(\Omega^R)) + L^{p'}((0,T);L^{p'}(\Pi_y^R;W^{-2,p'}(\Pi_x^R))) + L^{r_0'}(Q_T^R).$$

Тоді на підставі теореми 1.17 [23, с. 177] $u^R \in C([0,T];L^2(\Omega^R))$, оскільки

$$V_R(0,T) \subset L^2(Q_T^R) \subset V_R^*(0,T)$$

щільно і неперервно. Крім того, правильна формула інтегрування частинами

$$\langle u_t^R, u^R\rangle_{(V_R^*(t_1,t_2),V_R(t_1,t_2))} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R} |u^R(z,t_2)|^2\,dz - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R} |u^R(z,t_1)|^2\,dz$$

для довільних t_1,t_2, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, де через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(V_R^*(t_1,t_2),V_R(t_1,t_2))}$ позначено значення функціонала з простору $V_R^*(t_1,t_2)$ на елементах простору $V_R(t_1,t_2)$.

Продовжимо функцію u^R нулем на область $Q_T \setminus Q_T^R$. Нехай R набуває значення з множини натуральних чисел. Тоді матимемо послідовність функцій $\{u^s\}$. Очевидно, кожна функція $u^{s,l} = u^s - u^l$, $s > l$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u^{s,l}(z,\tau)|^2\,dz + 2\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{|\alpha|=2}(a_\alpha(z,t,u^s,D_xu^s,D_x^2u^s) - a_\alpha(z,t,u^l,D_xu^l,D_x^2u^l))D_x^\alpha u^{s,l} + \\ + \sum_{|\beta|=1}(b_\beta(z,t,u^s,D_zu^s) - b_\beta(z,t,u^l,D_zu^l))D_z^\beta u^{s,l} + (c(z,t,u^s) - c(z,t,u^l))u^{s,l}\Bigg]\,dz\,dt = \\ = \int\limits_{Q_\tau\setminus Q_\tau^l}\Bigg[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha^l(z,t)D_x^\alpha u^{s,l} + \sum_{|\beta|\leqslant 1} g_\beta^l(z,t)D_z^\beta u^{s,l}\Bigg]\,dz\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^l} |u_0^l(z)|^2\,dz, \quad \tau \in (0,T]. \tag{7}$$

Нехай ε – довільне як завгодно мале додатне фіксоване число. На підставі умов (**F**), (**U**) існує таке число $N_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $l > N_0$ права частина (7) менша від ε. Тоді, використовуючи умови (**A**), (**B**), (**C**), з (7) одержимо нерівність

$$\|u^{s,l}\|_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))} + \int\limits_{Q_T}\Big[A_0|D_x^2u^{s,l}|_p^p + B_0|D_zu^{s,l}|_q^q + \upsilon C_0|u^{s,l}|^{r_0}\Big]\,dz\,dt < \varepsilon, \tag{8}$$

де $\upsilon = 0$ при $r < 2$ і $\upsilon = 1$ при $r \geqslant 2$. З (8) випливає, що послідовність $\{u^s\}$ фундаментальна у просторі $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n)) \cap W_q \cap W_p$. Позначимо через u границю послідовності $\{u^s\}$ у цьому просторі. Для кожного елемента u^s маємо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^s(z,\tau)v(z,\tau)\,dz + \int\limits_{Q_\tau}\Big[-u^s v_t + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u^s,D_x u^s,D_x^2 u^s)D_x^\alpha v +$$
$$+\sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u^s,D_z u^s)D_z^\beta v + c(z,t,u^s)v\Big]\,dz\,dt = \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha^s(z,t)D_x^\alpha v +$$
$$+\sum_{|\beta|\leqslant 1} g_\beta^s(z,t)D_z^\beta v\Big]\,dz\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0^s(z)v(z,0)\,dz, \tag{9}$$

правильну для всіх $\tau\in(0,T]$ і для всіх функцій $v\in W_q\cap W_p$ таких, що $v_t\in L^2(Q_T)$.

Функції a_α ($|\alpha|=2$), b_β ($|\beta|=1$) та c задовольняють умови леми 2.2 [23, с. 57]. Тому

$$a_\alpha(\cdot,\cdot,u^s,D_x u^s,D_x^2 u^s)\to a_\alpha(\cdot,\cdot,u,D_x u,D_x^2 u),\quad |\alpha|=2$$

слабко в $L^{p'}(Q_T)$,

$$b_\beta(\cdot,\cdot,u^s,D_z u^s)\to b_\beta(\cdot,\cdot,u,D_z u),\quad |\beta|=1$$

слабко в $L^{q'}(Q_T)$, $c(\cdot,\cdot,u^s)\to c(\cdot,\cdot,u^s)$ слабко в $L^{r'}(Q_T)$ при $s\to\infty$. Крім того, $u_0^s\to u_0$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $f_\alpha^s\to f_\alpha$ ($|\alpha|=2$) в $L^{p'}(Q_T)$, $g_\beta^s\to g_\beta$ ($|\beta|=1$) в $L^{q'}(Q_T)$, $g_0^s\to g_0$ в $L^{r_0'}(Q_T)$ при $s\to\infty$. Отже, перейшовши в (9) до границі при $s\to\infty$ одержимо, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2). Крім того, для функції u правильна рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(z,\tau)|^2\,dz + \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u,D_x u,D_x^2 u)D_x^\alpha u +$$
$$+\sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u,D_z u)D_z^\beta u + c(z,t,u)u\Big]\,dz\,dt = \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha(z,t)D_x^\alpha u +$$
$$+\sum_{|\beta|\leqslant 1} g_\beta(z,t)D_z^\beta u\Big]\,dz\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u_0(z)|^2\,dz. \tag{10}$$

Для доведення єдиності припускаємо, що існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2. Тоді аналогічно як (10) одержимо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u^1(z,\tau)-u^2(z,\tau)|^2\,dz + 2\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2}(a_\alpha(z,t,u^1,D_x u^1,D_x^2 u^1)-$$
$$-a_\alpha(z,t,u^2,D_x u^2,D_x^2 u^2))D_x^\alpha(u^1-u^2) + \sum_{|\beta|=1}(b_\beta(z,t,u^1,D_z u^1)-b_\beta(z,t,u^2,D_z u^2))\times$$
$$\times D_z^\beta(u^1-u^2) + (c(z,t,u^1)-c(z,t,u^2))(u^1-u^2)\Big]\,dz\,dt = 0,$$

$\tau \in (0,T]$. Враховуючи умови (**A**), (**D**), (**C**), одержуємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u^1(z,\tau) - u^2(z,\tau)|^2\, dz \leqslant 0, \quad \tau \in [0,T],$$

тобто $u^1(z,t) = u^2(z,t)$ майже всюди в Q_T. Теорему доведено.

Використовуючи методику та ідеї праці [24], дослідимо умови компактності та поведінки носія узагальненого розв'язку задачі Коші.

Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (1), (2). Приймемо

$$\omega_m(T) = \sup_{y_m \in \mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} u(\cdot, T)\}, \quad S_{m,f}(T) = \sup_{y_m\in\mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} f,\ t \in (0,T)\},$$

$$S_m(T) = \sup\{S_{m,f}(T)\,;\, \omega_m(0)\};$$

$s_0 = 2q$, якщо $q \in \mathbb{N}$ і $s_0 = [q] + q + 1$ у протилежному випадку ($[q]$ – ціла частина q);

$$a_0 = \frac{q-2}{2q}\left(\frac{q-2}{2q} + \frac{1}{n+s_0-q}\right)^{-1}, \quad \vartheta_0 = a_0 + \frac{(1-a_0)q}{2}, \quad \nu_0 = \frac{\vartheta_0 q}{\vartheta_0 - 1}.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**F**), (**U**), $S_m(T) < \infty$. *Тоді*

$$\omega_m(T) \leqslant S_m(T) + MT^{\beta_0}\left(\int\limits_{Q_T} |D_z u|_q^q\, dz\, dt\right)^{1/\lambda_0},$$

де

$$\lambda_0 = \frac{1}{\nu_0 - s_0 + q}, \quad \beta_0 = \frac{1-a_0}{(\vartheta_0 - 1)(\nu_0 - s_0 + q)},$$

а стала M *залежить від* n, q.

Доведення. Нехай $\rho(y_m) = (y_m - \xi)^{s_0}$ при $y_m \geqslant \xi$ і $\rho(y_m) = 0$ при $y_m < \xi$, а $\xi \geqslant S_m(T)$. Повторюючи доведення леми 4.2 [24] для необмеженої області, одержимо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(z,\tau)|^2 \rho(y_m)\, dz + \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u,D_x u, D_x^2 u) D_x^\alpha(u\rho) +$$
$$+ \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u,D_z u) D_z^\beta(u\rho) + c(z,t,u)u\rho\Bigg]\, dz\, dt = 0, \quad \tau \in (0,T]. \qquad (11)$$

На підставі умов (**A**), (**B**), (**C**) з (11) випливає нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(z,t)|^2 \rho(y_m)\, dz + \int\limits_{Q_T}\Big[A_0 |D_x^2 u|_p^p + B_0 |D_z u|_q^q + C_0 |u|^r\Big]\rho\, dz\, dt \leqslant$$
$$\leqslant s_0 B_1 \int\limits_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} \sum_{|\beta|=1} |D_z^\beta u|^{q-1} |u| (y_m - \xi)^{s_0 - 1}\, dz\, dt. \qquad (12)$$

Позначимо

$$F_{s_0}(\xi) = \sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{y_m>\xi\}} |u(z,t)|^2 (y_m-\xi)^{s_0}\, dz,$$

$$E_{s_0}(\xi) = \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |D_z u|_q^q (y_m-\xi)^{s_0}\, dz\, dt.$$

Оскільки

$$\int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} \sum_{|\beta|=1} |D_z^\beta u|^{q-1}|u|(y_m-\xi)^{s_0-1}\, dz\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{q'} \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |D_z u|_q^q (y_m-\xi)^{s_0}\, dz\, dt + \frac{n}{q\delta^{q/q'}} \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |u|^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz\, dt,$$

то, вибравши $\delta = \dfrac{B_0 q'}{2s_0 B_1}$, з (12) одержимо нерівність

$$F_{s_0}(\xi) + E_{s_0}(\xi) \leqslant M_1 \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |u|^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz\, dt, \tag{13}$$

де $M_1 = \dfrac{2n}{q\delta^{q/q'}}$. На підставі нерівності Харді [24, лема А.2]

$$\int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |u|^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz\, dt \leqslant$$

$$\left(\frac{q}{s_0-q+1}\right)^q \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |D_z u|_q^q (y_m-\xi)^{s_0}\, dz\, dt = M_2 E_{s_0}(\xi).$$

Отже, з (13) випливає оцінка

$$F_{s_0}(\xi) \leqslant M_1 M_2 E_{s_0}(\xi). \tag{14}$$

Використаємо лему А.1 [24]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{y_m>\xi\}} |u|^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz \leqslant M_3 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{y_m>\xi\}} |D_z u|_q^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz \right)^{a_0} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{y_m>\xi\}} |u|^2 (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz \right)^{(1-a_0)q/2}, \tag{15}$$

де стала M_3 залежить від n, q. Отже, з (13), враховуючи (15) і (14), отримаємо

$$E_{s_0}(\xi) \leqslant M_1 M_2 M_3 T^{1-a_0} \left[E_{s_0-q}(\xi)\right]^{a_0+(1-a_0)q/2}. \tag{16}$$

Тоді на підставі леми А.4 [24] з (16) випливає оцінка

$$\omega_m(T) \leqslant S_m(T) + (\nu_0 - s_0 + q + 1) M_4^{1/[(\vartheta_0-1)(\nu_0-s_0+q)]} \times \\ \times T^{(1-a_0)/[(\vartheta_0-1)(\nu_0-s_0+q)]} \left[E_0(0)\right]^{1/(\nu_0-s_0+q)},$$

де $M_4 = M_1 M_2 M_3$. Отже, теорему доведено.

Зауваження 1. Нехай u_0 має обмежений носій за змінною y_m, f_α ($|\alpha| = 2$), g_β ($|\beta| \leqslant 1$) мають обмежені носії за змінною y_m майже для всіх $t \in (0, T)$. Тоді на підставі теореми 2 $u(\cdot, T)$ має обмежений носій за змінною y_m.

Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (1), (2). Приймемо

$$\omega_k(T) = \sup_{x_k \in \mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} u(\cdot, T)\}, \quad S_{k,f}(T) = \sup_{x_k \in \mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} f,\ t \in (0, T)\},$$

$$S_k(T) = \sup\{S_{k,f}(T)\,;\, \omega_k(0)\} \quad \mathcal{E}_s(\xi) = \int\limits_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} \left(|D_z u|_q^q + |D_x^2 u|_q^q\right) (x_k - \xi)^s \, dz\, dt,$$

$$a = \frac{q-2}{2q} \left(\frac{q-2}{2q} + \frac{1}{n + [q] + 1}\right)^{-1}.$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**F**), (**U**), $S_m(T) < \infty$, $p = q$. *Тоді існує таке* x_k^0, *що*

$$\mathcal{E}_0(\xi) \leqslant \mu \exp\left[-\frac{\xi - x_k^0}{\mu(1 + T^{1-a})^{1/q}}\right]$$

при

$$\xi \geqslant \max\{(1 + T^{1-a})^{1/q}\,;\, x_k^0\},$$

де стала μ *залежить від* n, q, A_0, A_1, B_0, B_1. *Зокрема, якщо* $p = q = 2$, *то* $x_k^0 = S_k(T)$.

Доведення. Виберемо

$$\rho(x_k) = \begin{cases} (x_k - \xi)^s, & x_k \geqslant \xi, \\ 0, & x_k < \xi, \end{cases}$$

де $\xi \geqslant S_k(T)$, $s = [q] + q + 1$. Тоді залишається правильною рівність (11). На підставі умов (**A**), (**B**), (**C**) з (11) випливає нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(z,t)|^2\rho(x_k)\,dz+\int\limits_{Q_T}\Big[A_0|D_x^2u|_q^q+B_0|D_zu|_q^q+C_0|u|^r\Big]\rho\,dz\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}\Bigg[sA_1\sum_{|\alpha|=2}|D_x^\alpha u|^{q-1}|u_{x_k}|(x_k-\xi)^{s-1}+$$

$$+s(s-1)A_1\sum_{|\alpha|=2}|D_x^\alpha u|^{q-1}|u|(x_k-\xi)^{s-2}+sB_1\sum_{|\beta|=1}|D_z^\beta u|^{q-1}|u|(x_k-\xi)^{s-1}\Bigg]\,dz\,dt. \tag{17}$$

Позначимо

$$F_s(\xi)=\sup_{t\in[0,T]}\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{x_k-\xi\}}|u(z,t)|^2(x_k-\xi)^s\,dz,$$

$$E_s(\xi)=\int\limits_{Q_T\cap\{x_k-\xi\}}|D_zu|_q^q(x_k-\xi)^s\,dz\,dt.$$

Використовуючи нерівність Гельдера і нерівність Харді [24, лема A.2], праву частину (17) можна оцінити виразом

$$\int\limits_{Q_T}\left[\frac{s^2\delta_1A_1}{q'}|D_x^2u|_q^q+\frac{s\delta_2B_1}{q'}|D_zu|_q^q\right]\rho\,dz\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}\left[\left(\frac{s(s-1)k^2A_1}{q\delta_1^{q/q'}}\left(\frac{q}{s-2q+1}\right)^q+\frac{sk^2A_1}{q\delta_1^{q/q'}}\right)|D_zu|_q^q+\frac{sB_1}{q\delta_2^{q/q'}}|u|^q\right]\times$$

$$\times(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\,dt,$$

$\delta_1>0$, $\delta_2>0$. Виберемо δ_1 і δ_2 з умов $A_0-\frac{s^2\delta_1A_1}{q'}=\frac{A_0}{2}$, $B_0-\frac{s\delta_2B_1}{q'}=\frac{B_0}{2}$. Тоді з (17) одержимо нерівність

$$F_s(\xi)+\mathcal{E}_s(\xi)\leqslant\mu_1\left[E_{s-q}(\xi)+\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|u|^q(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\,dt\right], \tag{18}$$

де стала μ_1 залежить від A_0, A_1, B_0, B_1, q, k.

На підставі леми A.1 [24]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{x_k>\xi\}}|u|^q(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\leqslant\mu_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{x_k>\xi\}}|D_zu|_q^q(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\right)^a\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{x_k>\xi\}}|u|^2(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\right)^{(1-a)/2}, \tag{19}$$

причому стала μ_2 залежить від n, q. Інтегруючи (19) за змінною t на проміжку $[0,T]$ і застосовуючи нерівність Гельдера, одержимо

$$\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}} |u|^q(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\,dt \leqslant T^{1-a}\left[E_{s-q}(\xi)\right]^a\left[F_{s-q}(\xi)\right]^{(1-a)q/2}. \tag{20}$$

Крім того, на підставі нерівності Гельдера і нерівності Харді [24, лема А.2] праву частину (17) можна оцінити виразом

$$\mu_3\int\limits_{Q_T}(|D_x^2u|_q^q+|D_zu|_q^q)\rho\,dz\,dt.$$

Тому з (17) матимемо оцінку

$$F_s(\xi)\leqslant \mu_4\mathcal{E}_f(\xi). \tag{21}$$

Сталі μ_3, μ_4 залежать від A_0, A_1, B_0, B_1, q, n. Оскільки $E_s(\xi)\leqslant\mathcal{E}_s(\xi)$, то згідно з (18), (20), (21) отримаємо

$$\mathcal{E}_s(\xi)\leqslant\mu_5\left[\mathcal{E}_{s-q}(\xi)+T^{1-a}\left(\mathcal{E}_{s-q}(\xi)\right)^{a+(1-a)q/2}\right], \tag{22}$$

де стала μ_5 залежить від A_0, A_1, B_0, B_1, q, n. Зазначимо, що $a+\dfrac{(1-a)q}{2}\geqslant 1$ і $\mathcal{E}_s$ спадає при зростанні ξ. Тому існує таке x_k^0, що

$$\left(\mathcal{E}_{s-q}(\xi)\right)^{a+(1-a)q/2}\leqslant\mathcal{E}_s(\xi)$$

для всіх $\xi\geqslant x_k^0$. Отже, з (22) випливає нерівність

$$\mathcal{E}_s(\xi)\leqslant\mu_5(1+T^{1-a})\mathcal{E}_{s-q}(\xi),\quad \xi\geqslant x_k^0. \tag{23}$$

На підставі нерівності Гельдера маємо

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(\xi)\leqslant&\left(\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|D_x^2u|_q^q(x_k-\xi)^s\,dz\,dt\right)^{1/s}\left(\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|D_x^2u|_q^q\,dz\,dt\right)^{1-1/s}+\\&+\left(\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|D_zu|_q^q(x_k-\xi)^s\,dz\,dt\right)^{1/s}\left(\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|D_zu|_q^q\,dz\,dt\right)^{1-1/s}\leqslant\\&\leqslant 2\left[\mathcal{E}_s(\xi)\right]^{1/s}\left[\mathcal{E}_0(\xi)\right]^{1-1/s}.\end{aligned} \tag{24}$$

Аналогічно одержимо нерівність

$$\mathcal{E}_{s-q}(\xi)\leqslant 2\left[\mathcal{E}_s(\xi)\right]^{1-q/s}\left[\mathcal{E}_0(\xi)\right]^{q/s}. \tag{25}$$

Отже, враховуючи (25), з (23) матимемо оцінку

$$\mathcal{E}_s(\xi)\leqslant 2\mu_5(1+T^{1-a})\left[\mathcal{E}_s(\xi)\right]^{1-q/s}\left[\mathcal{E}_0(\xi)\right]^{q/s},$$

тобто

$$\mathcal{E}_s(\xi) \leqslant [2\mu_5(1+T^{1-a})]^{s/q}\mathcal{E}_0(\xi). \tag{26}$$

Тоді на підставі (26) з (24) одержимо

$$\mathcal{E}_1(\xi) \leqslant \mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}\mathcal{E}_0(\xi), \tag{27}$$

де $\mu_6 = 2(2\mu_5)^{1/q}$.

Оскільки $\mathcal{E}_1'(\xi) = -\mathcal{E}_0(\xi)$, то (27) набуває вигляду

$$\mathcal{E}_1'(\xi) \leqslant -\frac{1}{\mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}}\mathcal{E}_1(\xi),$$

звідки

$$\mathcal{E}_1(\xi) \leqslant \mathcal{E}_1(x_k^0)\exp\left[\frac{\xi - x_k^0}{\mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}}\right], \quad \xi \geqslant x_k^0. \tag{28}$$

Зазначимо, що $\mathcal{E}_1(\xi) \geqslant \xi\mathcal{E}_0(\xi)$. Тому, враховуючи (27), з (28) одержимо

$$\xi\mathcal{E}_0(\xi) \leqslant \mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}\mathcal{E}_0(x_k^0)\exp\left[\frac{\xi - x_k^0}{\mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}}\right], \quad \xi \geqslant x_k^0.$$

Вибираючи $\xi \geqslant \max\{(1+T^{1-a})^{1/q}\,;\, x_k^0\}$, отримуємо твердження теореми. Зокрема, якщо $p = q = 2$, то $x_k^0 = S_k(T)$.

---

1. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133. – N 1. – С. 40-43.
2. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $2\vec{b}$-параболічних і $2\vec{b}$-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера // Доп. АН УРСР. – 1964. – N 8. – С. 1010-1013.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М., 1964.
4. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.
5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $2\vec{b}$-параболические системы // Труды семинара по функциональному анализу. – Киев, 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-273.
6. *Мартыненко М. Д., Бойко Д. Ф.* $2\vec{b}$-параболические граничные задачи // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – N 12. – С. 2212-2222.
7. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $2\vec{b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – N 4. – С. 500-506.
8. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – N 12. – С. 7-12.
9. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічні системи // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – N 337. – С. 73-76.
10. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ, 1999.

11. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – N 6. – С. 18-22.

12. *Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 140-151.

13. *Пасічник Г. С.* Про розв'язність задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42. – N 3. – С. 61-65.

14. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 46. Математика. – Чернівці, 1999. – С. 13-18.

15. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці, 2000. – С. 5-10.

16. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про задачу Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52. – N 11. – С. 1484-1496.

17. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці, 2000. – С. 82-91.

18. *Івасишен С. Д., Кондур О. С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $2\vec{b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. – 2000. – Т. 14. – N 1. – С. 73-84.

19. *Балабушенко Т. М.* Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування // Вісник національного ун-ту "Львівська політехніка". – N 411. Прикладна математика. – 2000. – С. 6-11.

20. *Балабушенко Т. М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем // Мат. студії. – 2002. – Т. 17. – N 2. – С. 163-174.

21. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д.* Про властивості розв'язків $2\vec{b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45. – N 4. – С. 19-26.

22. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 2002.

23. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

24. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Huston J. Mathem. – 1988. – Vol. 14. – N 3. – P. 319-352.

ON A SUPPORT OF A SOLUTION CAUCHY PROBLEM FOR THE NONLINEAR $2B$-PARABOLIC EQUATION

Oles' KORKUN, Serhiy LAVRENIUK

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universitetska Str., 1

There is considered Cauchy problem for the equation
$u_t + \sum\limits_{|\alpha|=2} D_x^{\alpha}(a_{\alpha}(z,t,u,D_x u, D_x^2 u)) - \sum\limits_{|\beta|=1} D_z^{\beta}(b_{\beta}(z,t,u,D_z u)) + c(z,t,u) = f.$
Conditions of the existence and uniqueness of a generalized solution and compactness of a support are obtained.

Key words: $2b$-parabolic equation, Cauchy problem.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2006

Прийнята до друку 24.10.2007