ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.149-152 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.149-152*

УДК 512.544

ГРУПИ, БАГАТІ НА $A\check{C}$-ПІДГРУПИ АБО $\check{C}A$-ПІДГРУПИ

Лілія ЙОНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: lila_ yonyk@ua.fm

Доведено, що локально ступінчаста група з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп (відповідно черніковських груп за допомогою абелевих груп) є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи (відповідно черніковської групи за допомогою абелевої групи). Також з'ясовано, що локально ступінчаста періодична недосконала група, всі власні нормальні підгрупи якої є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп, сама є такою.

Ключові слова: абелева група, черніковська група, умова мінімальності, розширення групи.

1. Основні результати. Нехай χ – теоретико-групова властивість, яку успадковують підгрупи. Будемо говорити, що G задовольняє умову мінімальності для не χ-підгруп (коротко Min-$\overline{\chi}$), якщо кожен строго спадний ланцюг

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n > \ldots \tag{1}$$

не χ-підгруп G_i через скінченну кількість кроків обривається, тобто знайдеться таке натуральне число m, що G_n – χ-група для всіх $n \geq m$. Кожна мінімальна не χ-група (тобто не χ-група, кожна власна підгрупа якої є χ-групою) задовольняє умову Min-$\overline{\chi}$.

Нагадаємо, що $\check{C}A$-групою (відповідно $A\check{C}$-групою) називається група, яка є розширенням черніковської (відповідно абелевої) групи за допомогою абелевої (відповідно черніковської) групи. Як визначили Х. Отал і Х. Пена [1, теорема 1], мінімальних не $\check{C}A$-груп у класі локально ступінчастих груп не існує. Аналогічно за теоремою 2 з [1] і теоремою C із [2] мінімальних не $A\check{C}$-груп у класі локально ступінчастих груп не існує. Подібний результат для $N\check{C}$-груп випливає з теореми A [2] і теореми 1.3 [3], тобто локально ступінчаста група, всі власні підгрупи якої є $N\check{C}$-групами, сама є такою. Групи, багаті на $N\check{C}$-підгрупи, зокрема розглядали в статті [4].

У цій статті вивчаємо групи з умовою мінімальності для не $\check{C}A$-підгруп Min-$\overline{\check{C}A}$ й умовою мінімальності для не $A\check{C}$-підгруп Min-$\overline{A\check{C}}$. Ми отримали деяке розширення цих результатів і довели таке твердження.

Твердження 1. *Нехай G – локально ступінчаста група.*

1. *Група G задовольняє умову мінімальності для не $\check{C}A$-підгруп Min-$\overline{\check{C}A}$ тоді і тільки тоді, коли G – $\check{C}A$-група.*

2. *Група G задовольняє умову мінімальності для не $A\check{C}$-підгруп Min-$\overline{A\check{C}}$ тоді і тільки тоді, коли G – $A\check{C}$-група.*

Нагадаємо, що група, яка є розширенням нільпотентної групи за допомогою черніковської групи, коротко називається $N\check{C}$-групою.

Теорему 2 із [1] узагальнює твердження.

Твердження 2. 1. *Нехай G – недосконала періодична локально ступінчаста група. Якщо всі власні нормальні підгрупи із G є $A\check{C}$-групами, то G – $A\check{C}$-група.*

2. *Нехай G – недосконала локально ступінчаста група. Якщо всі її власні нормальні підгрупи є $N\check{C}$-групами, то G – $N\check{C}$-група.*

Із цього твердження легко випливає наслідок.

Наслідок 1. *Нехай G – локально ступінчата група.*

1. *Якщо G не є $\check{C}A$-групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є $\check{C}A$-групами.*

2. *Якщо G не є $A\check{C}$-групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є $A\check{C}$-групами.*

Нагадаємо, що група G називається локально ступінчастою, якщо кожна неодинична скінченно породжена підгрупа з G містить власну підгрупу скінченного індексу. Як відомо, клас локально ступінчастих груп достатньо широкий; він містить, зокрема, локально розв'язні групи. Якщо комутант G' відмінний від групи G, то G називається досконалою.

Всі інші означення та факти загальноприйняті і їх можна знайти в [5] і [6].

2. Доведення основних результатів. Доведенню тверджень передує лема.

Лема 1. *Нехай G – група, H – її підгрупа, а χ – теоретико-групова властивість, яка успадковується підгрупами. Якщо G задовольняє умову Min-$\overline{\chi}$, то правильні такі твердження:*

1) *H задовольняє умову Min-$\overline{\chi}$;*

2) *якщо $H \lhd G$, то фактор-група G/H задовольняє Min-$\overline{\chi}$;*

3) *якщо $H \lhd G$ і H не є χ-групою, то фактор-група G/H задовольняє умову мінімальності для підгруп Min.*

Доведення. Нехай G – група з умовою Min-$\overline{\chi}$.

1. Оскільки кожен строго спадний ланцюг не χ-підгруп із H є одночасно строго спадним ланцюгом не χ-підгруп із G, то він обривається.

2. Якщо

$$G_1/H > G_2/H > \ldots > G_n/H > \ldots$$

– який-небудь строго спадний ланцюг не χ-підгруп із G/H, то (1) – строго спадний ланцюг не χ-підгруп групи G, тому він обривається. Як наслідок, ланцюг (1) також обривається.

3. Нехай H – нормальна підгрупа групи G і H не є χ-групою. Якщо фактор-група $\overline{G} = G/H$ не задовольняє Min і має нескінченний строго спадний ланцюг $\{\overline{G}_i | i \in \mathbb{N}\}$ підгруп $\overline{G}_i$, то G має також нескінченний строго спадний ланцюг $\{G_i | i \in \mathbb{N}\}$ не χ-підгруп G_i, де G_i – повний прообраз підгрупи $\overline{G}_i$ в групі G, а це призводить до суперечності. Лема доведена.

Доведення твердження 1. ($\Leftarrow$) очевидно.

($\Rightarrow$) Нехай G задовольняє умову Min-$\overline{\check{C}A}$ (відповідно Min-$\overline{A\check{C}}$). Припустимо, що G не є $\check{C}A$-групою (відповідно $A\check{C}$-групою). Тоді G має скінченний строго спадний ланцюг (1) підгруп G_i, які не є $\check{C}A$-групами (відповідно $A\check{C}$-групами), де $n \geq 0$, а $i = 0, 1, \ldots, n$, причому всі власні підгрупи з G_n є $\check{C}A$-групами (відповідно $A\check{C}$-групами). Але це неможливо з огляду на теорему 1 із [1] (відповідно на теорему 2 із [1], теорему A із [2] і теорему 1.3 із [3]). Отримана суперечність засвідчує, що G – $\check{C}A$-група (відповідно $A\check{C}$-група). Твердження доведено.

Нагадаємо, що група G, в якій кожні дві власні підгрупи A і B знову породжують власну підгрупу $\langle A, B\rangle$ в G, називається нерозкладною.

Доведення твердження 2.

1. Якщо фактор-група G/G' розкладна, то $G = AB$ – добуток своїх двох власних нормальних підгруп A і B. Позаяк за твердженням 2.2 із [1] A (відповідно B) містить характеристичну абелеву підгрупу A_1 (відповідно B_1) з черніковською фактор-групою A/A_1 (відповідно B/B_1), то $A_1B_1 \lhd G$ і G/A_1B_1 – черніковська група. Але A_1B_1 – нільпотентна $A\check{C}$-група, яка знову за твердженням 2.2 із [1] має таку характеристичну (а, отже, нормальну в групі G) підгрупу A_2, що G/A_2 – черніковська група. Тому G – $A\check{C}$-група.

Тепер нехай G/G' – нерозкладна група. За лемою 2 із [7] G/G' – циклічна або квазіциклічна p-група для деякого простого числа p. Знову застосовуючи твердження 2.2 із [2] до підгрупи G', отримуємо, що G – $A\check{C}$-група.

2. Нехай у групі G всі власні нормальні підгрупи є $N\check{C}$-групами. Якщо фактор-група G/G' нерозкладна, то з огляду на лему 2 із [7] вона черніковська. Припустимо, що фактор-група G/G' розкладна. Тоді вона є добутком двох своїх власних нормальних підгруп, кожна з яких є $N\check{C}$-групою. Як наслідок, група G має черніковський гомоморфний образ. Отже, в обох випадках група G містить таку нормальну підгрупу S, що фактор-група G/S черніковська. За лемою 4.7 із [8] нормальне замикання $S^G =< S^g | g \in G >$ – нільпотентна підгрупа в G. Оскільки фактор-група G/S^G черніковська, то G – $N\check{C}$-група.

Твердження доведено.

1. *Otal J., Peña J.M.* Groups in which every proper subgroup is Černikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Černikov // Archiv Math. – 1988. – Vol. 51. – P. 193-197.
2. *Napolitani F., Pegoraro E.* On groups with nilpotent-by-Černikov proper subgroups // Archiv Math. – 1997. – Vol. 69. – P. 89-94.
3. *Asar A.O.* Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Černikov // J. London Math. Soc. – 2000. – Vol. (2) 61. – P. 412-422.
4. *Artemovych O.D.* Solvable groups with many conditions // Matematychni Studii. – 2000. – Vol. 13. – P. 23-32.
5. *Черников С.Н.* Группы с заданными свойствами систем подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. *Robinson D.J.S.* A Course in the Theory of Groups. – Berlin: Springer, 1980.
7. *Артемович О.Д.* Неразложимые метабелевы группы // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – С. 1252-1254.
8. *Hartley B.* Periodic locally soluble groups containing an element of prime order with Černikov centralizer // Quart. J. Math. Oxford. – 1982. – Ser.(2) 33. – P. 309-323.

GROUPS WITH MANY $A\check{C}$-SUBGROUPS OR $\check{C}A$-SUBGROUPS

Liliya YONYK

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: lila_yonyk@ua.fm

We prove that a locally graded group with the minimal condition on non-"abelian-by-Černikov" (respectively non-"Černikov-by-abelian") subgroups are abelian-by-Černikov (respectively Černikov-by-abelian). We obtain that a locally graded torsion non-perfect group with proper abelian-by-Černikov normal subgroups is also abelian-by-Černikov.

Key words: abelian-by-Černikov group, Černikov-by-abelian group.

Стаття надійшла до редколегії 31.03.2006

Прийнята до друку 24.10.2007