ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.143-148 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.143-148*

УДК 517.537.72

МОДИФІКАЦІЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ПОРЯДКУ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Михайло ЗЕЛІСКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Модифіковано узагальнені порядки Шеремети і зазначено їхнє застосування до вивчення асимптотичного поводження цілих функцій, заданих степеневими рядами або рядами Діріхле.

Ключові слова: ціла функція, ряд Діріхле, узагальнений порядок.

1. Формулювання результатів. Зростання цілої функції

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

ототожнюють зі зростанням її максимуму модуля $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, а для характеристики зростання $M_f(r)$ переважно використовують порядок $\varrho[f]=\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$. За теоремою Адамара [1] $\varrho[f]=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n}{-\ln|a_n|}$. Для характеристики зростання $M_f(r)$ у випадку, коли $\varrho[f]=0$, П. Камсен [2] ввів логарифмічний порядок $p[f]=\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r}$ і за умови $p[f]>1$ довів, що $p[f]=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}+1$.

Для цілих функцій нескінченного порядку зростання $M_f(r)$ вивчають за допомогою досконаліших шкал зростання. А. Шьонгаґе [3] порівнював деяку ітерацію логарифма від $M_f(r)$ з іншою ітерацією логарифма від r. Г.А. Фрідман [4] ітерації від $\ln M_f(r)$ порівнював з досить правильно зростаючими функціями від r. Найзагальнішу шкалу зростання ввів М.М. Шеремета [5].

Через L позначимо клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій і, як в [5], будемо говорити, що $\alpha\in L^0$, якщо $\alpha((1+o(1))x)=(1+o(1))\alpha(x)$

при $x \to +\infty$, і $\alpha \in L_{нз}$, якщо $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для будь-якого $c \in (0, +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненим порядком цілої функції f називається величина $\varrho_{\alpha\beta}[f] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln M_f(r))}{\beta(\ln r)}$. В [5] доведено таке: якщо $\alpha \in L_{нз}$, $\beta \in L^0$ і $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ при $x \to +\infty$ для будь-якого $c \in (0, +\infty)$, то $\varrho_{\alpha\beta}[f] = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{\beta\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}$. Для цілих функцій нульового порядку узагальнений порядок $\varrho_\alpha[f] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln\ln M_f(r))}{\alpha(\ln\ln r)}$ введено в [6], де доведено таке: якщо $\alpha \in L_{нз}$ і $0 \leqslant \dfrac{d\alpha^{-1}(c\alpha(x))}{dx} \leqslant Ae^{B\alpha^{-1}(c\alpha(x))}$ для будь-якого $c \in (0, +\infty)$, всіх $x \geqslant x_0(c)$ та деяких додатних сталих A і B, то $\varrho_\alpha[f] = \max\{1, k_\alpha[f]\}$, де $k_\alpha[f] = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(\ln n)}{\alpha\left(\ln\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)\right)}$. Неважко показати, що $\varrho_\alpha = \max\{1, \hat\varrho_\alpha[f]\}$, де $\hat\varrho_\alpha[f] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha(\ln\ln r)}\alpha\left(\ln\dfrac{\ln M_f(r)}{\ln r}\right)$.

Тому виникають питання.

Проблема . *Чи правильна рівність $\hat\varrho_\alpha[f] = k_\alpha[f]$ і, з огляду на означення $\hat\varrho_\alpha[f]$, як зміняться наведені результати Ж. Адамара, П. Камсена та М.М. Шеремети, якщо зростання цілої функції виміряти не в термінах $\ln M_f(r)$, а в термінах $\dfrac{\ln M_f(r)}{\ln r}$ (зауважимо, що $\dfrac{\ln M_f(r)}{\ln r} \to +\infty \quad (r \to +\infty)$ для трансцендентної цілої функції), тобто узагальнений порядок цілої функції (1) ввести у вигляді $\hat\varrho_{\alpha\beta}[f] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\dfrac{\ln M_f(r)}{\ln r}\right)$?*

Відповідь на ці питання дає така теорема.

Теорема 1. *Якщо $\alpha \in L_{нз}$ і $\beta \in L^0$, то $\hat\varrho_{\alpha\beta}[f] = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{\beta\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}$.*

Ця теорема є безпосереднім наслідком доведеної нижче теореми 2 для цілих рядів Діріхле. Для цілого (абсолютно збіжного в $\mathbb{C}$) ряду Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{2}$$

зі зростаючою до $+\infty$ послідовністю невід'ємних показників λ_n приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$. Ж. Рітт [7], узагальнюючи теорему Адамара, ввів R-порядок $\varrho_R = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln\ln M(\sigma, F)}{\sigma}$ і за умови $\ln n = O(\lambda_n) \quad (n \to \infty)$ довів, що $\varrho_R = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n \ln\lambda_n}{-\ln|a_n|}$. А. Азпітіа [8] показав, що ця рівність є правильною за умови

$\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$. Узагальнені порядки $\varrho_{\alpha\beta}[F] = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(\sigma)}$ введені в [9], де, зокрема, доведено таке: якщо $\alpha \in L_{nз}$, $\beta \in L^0$, $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ $(x \to +\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ для будь-якого $c \in (0,+\infty)$, то $\varrho_{\alpha\beta}[F] = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}$. Якщо ж узагальнений порядок цілого ряду Діріхле означити у вигляді $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\dfrac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right)$, то правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо* $\alpha \in L_{nз}$, $\beta \in L^0$ *і* $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$, $n \to \infty$, *для кожного* $c \in (0,+\infty)$, *то* $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = k_{\alpha\beta}[F] =: \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}$.

Приймемо $M_1(\sigma,F) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}$. Вивченню зв'язку між зростанням $M(\sigma,F)$ і $M_1(\sigma,F)$ присвячено праці [10-12]. Зокрема, в [12] доведено таке: якщо показники цілого ряду Діріхле скінченного R-порядку ϱ_R задовольняють умову $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\ln \lambda_n} \leqslant \tau < +\infty$, то $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln M_1(\sigma,F) - \ln M(\sigma,F)}{\sigma} \leqslant \dfrac{\tau\varrho_R}{2}$.

Застосування узагальнених порядків дає такий результат.

Теорема 3. *Якщо* $\alpha \in L_{nз}$, $\beta \in L^0$ *і* $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$, $n \to \infty$, *для кожного* $c \in (0,+\infty)$, *то* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\dfrac{\ln M_1(\sigma,F) - \ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right) \leqslant \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$.

Зауважимо, що для цілих рядів Діріхле скінченного R-порядку ϱ_R з теореми 3 отримуємо оцінку $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{1}{\sigma}\ln\ln\dfrac{M_1(\sigma,F)}{M(\sigma,F)} \leqslant \varrho_R$, яка є значно гіршою від наведеної вище оцінки з [12], але вона виконується за умови $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, яка є значно ширшою від умови $\ln n = O(\ln \lambda_n)$, $n \to \infty$.

2. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 2. Припустимо, що $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] < +\infty$, і нехай $\mu(\sigma,F) = \max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (2). Тоді для будь-якого $\varrho > \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і всіх $\sigma > \sigma_0(\varrho)$, з огляду на нерівність Коші, маємо $\ln|a_n| + \sigma\lambda_n \leq \ln \mu(\sigma,F) \leqslant \ln M(\sigma,F) \leqslant \sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))$ і, отже, $\ln|a_n| \leqslant \sigma(\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma)) - \lambda_n)$ для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \geqslant \sigma_0(\varrho)$.

Виберемо $\sigma = \sigma_n = \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\varepsilon\lambda_n)\right)$, де $\varepsilon > 0$ – довільне число. Тоді $\sigma_n \geqslant \sigma_0(\varrho)$ для всіх $n \geqslant n_0(\varrho,\varepsilon)$ і, отже, $\ln|a_n| \leqslant -(1-\varepsilon)\lambda_n\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\varepsilon\lambda_n)\right)$ для всіх $n \geqslant n_0(\varrho,\varepsilon)$, тобто $\dfrac{\alpha(\varepsilon\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{1}{(1-\varepsilon)\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)} \leqslant \varrho$.

Оскільки $\alpha \in L_{пз}$, то $\alpha(\varepsilon\lambda_n) \sim \alpha(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. З умови $\beta \in L^0$ випливає (див., наприклад, [13]), що $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\beta((1+\varepsilon)x)}{\beta(x)} = A(\varepsilon) \searrow 1 \quad (\varepsilon \to 0)$. Тому з останньої нерівності за рахунок довільності ε отримуємо нерівність $k_{\alpha\beta}[F] \leqslant \varrho$. Завдяки довільності $\varrho > \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$, звідси одержуємо нерівність $k_{\alpha\beta}[F] \leqslant \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$, яка є очевидною, якщо $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = +\infty$.

Припустимо тепер від супротивного, що $k_{\alpha\beta}[F] < \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і виберемо $k_{\alpha\beta}[F] < \varrho < < \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$. Тоді для всіх $n \geqslant n_0(\varrho)$ маємо $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)$, тобто для досить великих σ маємо

$$\ln\, \mu(\sigma, F) = \max\left\{\max_{n\leqslant n_0(\varrho)}\{\ln|a_n| + \sigma\lambda_n\},\ \max_{n\geqslant n_0(\varrho)}\{\ln|a_n| + \sigma\lambda_n\}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{K(\varrho)\sigma, \ln\, \mu^*(\sigma, F)\}, \tag{3}$$

де $\ln\, \mu^*(\sigma, F) = \max\limits_{n\geqslant n_0(\varrho)}\left\{\lambda_n\left(\sigma - \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\right)\right\}$.

Якщо n таке, що $\sigma - \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right) \leqslant 0$, то вираз у фігурних дужках від'ємний і оскільки $\ln\mu^*(\sigma, F) \to +\infty$, $\sigma \to +\infty$, то для центрального індексу $\nu^*(\sigma, F) = \max\left\{n : \lambda_n\left(\sigma - \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\right) = \ln\, \mu^*(\sigma, F)\right\}$ маємо нерівність $\sigma - \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_{\nu^*(\sigma,F)})\right) \geqslant 0$, тобто $\lambda_{\nu^*(\sigma,F)} \leqslant \alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))$, $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Використовуючи відому рівність [14, с. 17] $\ln\, \mu^*(\sigma, F) = \ln\, \mu^*(\sigma_0, F) + \displaystyle\int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu^*(t,F)}dt$, отримуємо

$$\ln\, \mu^*(\sigma, F) \leqslant \int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\varrho\beta(t))dt + \ln\, \mu^*(\sigma_0, F) \leqslant \alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))(\sigma - \sigma_0) + \ln\, \mu^*(\sigma_0, F) =$$
$$= (1 + o(1))\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))\sigma, \quad \sigma \to +\infty.$$

Звідси і з (3) випливає таке: якщо $\alpha \in L_{пз}$ і $\beta \in L^0$, то

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln\, \mu(\sigma, F)}{\sigma}\right) \leqslant \varrho. \tag{4}$$

Оскільки $\ln n = o\left(\lambda_n\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\right)$ при $n \to \infty$ і $-\ln|a_n| \geqslant \lambda_n\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)$ $(n \geqslant n_0(\varrho))$, то $h_0 =: \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{-\ln|a_n|} = 0$. Тому [14, с. 23] для кожного $\varepsilon \in (0, 1)$ існує стала $A_0(\varepsilon) > 0$ така, що для всіх $\sigma \geqslant 0$ правильна нерівність $M(\sigma, F) \leqslant \leqslant A_0(\varepsilon)\mu\left(\dfrac{\sigma}{1-\varepsilon}, F\right)$, а з огляду на (4) й умову $\alpha \in L_{пз}$

$$\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] \leqslant \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln\, \mu(\sigma/(1-\varepsilon), F)}{\sigma}\right) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\beta((1-\varepsilon)\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln\, \mu(\sigma, F)}{\sigma}\right).$$

Оскільки $\beta \in L^0$, то, як зазначалось, отримуємо нерівність $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] \leqslant \varrho$, що неможливо. Отже, $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = k_{\alpha\beta}[F]$. Теорему 2 доведено.

Доведення теореми 3. У випадку, коли $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = +\infty$, теорема 3 очевидна. Якщо ж $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] < +\infty$, то для будь-якого $\varrho > \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і всіх $n \geqslant n_0(\varrho)$ за теоремою 2 маємо $|a_n| \leqslant \exp\left\{-\lambda_n \beta^{-1}\left(\alpha(\lambda_n)/\varrho\right)\right\}$. Нехай $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності. Зрозуміло, що тоді $\ln n(t) = o\left(t\beta^{-1}\left(\alpha(t)/\varrho\right)\right)$ при $t \to +\infty$. Приймемо $\gamma(\sigma) = \alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma(1+\varepsilon)))$, $\varepsilon > 0$. Тоді для всіх досить великих σ маємо

$$\sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \leqslant \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} \exp\left\{-\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\left(1 - \frac{\sigma}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} \exp\left\{-\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\left(1 - \frac{\sigma}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\gamma(\sigma))\right)}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} \exp\left\{-\frac{\varepsilon\lambda_n}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\right\} \leqslant \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right\} dn(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right\} d\left(\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} t\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\varrho}\right)\right\} \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\varrho}\right)\right\} d\left(\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\varrho}\right)\right) =$$

$$= 2\int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{2(1+\varepsilon)}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right\} d\left(\frac{\varepsilon t}{2(1+\varepsilon)}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right) = o(1), \sigma \to +\infty.$$

Як видно з доведення леми 1 з [12], $M_1(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)\sqrt{n(\gamma(\sigma))} + \sum\limits_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}$. Тому $\ln M_1(\sigma, F) - \ln M(\sigma, F) \leqslant \frac{1}{2}\ln n(\gamma(\sigma)) + o(1) = o\left(\gamma(\sigma)\beta^{-1}\left(\alpha(\gamma(\sigma))/\varrho\right)\right) \leq \leq \sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma(1+\varepsilon)))$, $\sigma \geqslant \sigma_0$, звідси, з огляду на умову $\beta \in L^0$ і довільність $\varepsilon > 0$, легко випливає потрібна нерівність.

---

1. *Hadamard J.* Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor // J. math. pures et appl. – 1892. – Vol. 8. – P. 154-186.
2. *Kamthan P.K.* Some properties of entre functions // Proc. Rajasthan Acad. Sci. – 1963. – Vol. 10. – P. 14-20.
3. *Schönhage A.* Über das Wachstum der zusammengesetzen Funktionen // Math. Z. – 1960. – Bd. 73. – S. 22-44.

4. *Фридман Г.А.* Зависимость роста модуля аналитической функции от роста модуля коэффициентов её степенного разложения: Автореф. ... дисс. канд. физ.-мат. наук – М., 1951.
5. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – №2. – С. 100-108.
6. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений // Изв. вузов. Математика. – 1968. – №6. – С. 115-120.
7. *Ritt J.F.* On certain points in the theory of Dirichlet series // Amer. Math. J. – 1928. – Vol. 50. – P. 73-83.
8. *Azpeitia A.G.* A remark on the Ritt order of entre function defined by Dirchlet series // Proc. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 12. – P. 722-728.
9. *Пьяныло Я.Д., Шеремета М.Н.* О росте целых функций, представленных рядами Дирихле // Изв. вузов. Математика. – 1975. – №5. – С. 105-108.
10. *Шеремета М.М.* Про зростання цілого ряду Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №8. – С. 1149-1153.
11. *Зеліско М.М., Шеремета М.М.* Про середні значення рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, №11. – С. 1501-1512.
12. *Зеліско М.М., Шеремета М.М.* Про вплив аргументів коефіцієнтів ряду Діріхле на його зростання // Матем. студії. – 2006. – Т. 26, №1. – С. 54-58.
13. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristics of entre functions // Matem. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1. – P. 74-82.
14. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.

MODIFICATION OF GENERALIZED ORDER AND AS APPLICATION

Mykhaylo ZELISKO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

It is modified generalized orders of Sheremeta and indicated their applications to the study of asymptotic behaviours of entire function given by power series or Dirichlet series.

Key words: entire function, Dirichlet series, generalized order.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2006

Прийнята до друку 24.10.2007