ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.137-142 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.137-142*

УДК 519.2

ВЛАСТИВОСТІ ЗЛІЧЕННОВИМІРНИХ МАТРИЧНИХ МІР

Тарас ЗАБОЛОЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Доведено властивості зліченновимірних матричних мір, які використовують під час дослідження асимптотичного поводження розв'язку рівняння відновлення.

Ключові слова: матрична міра, перетворення Фур'є.

Нехай $G^{\varepsilon}_{ij}(dx)$, $i,j \in \mathbb{N}$, – сім'я комплекснозначних мір на $\mathbb{R}_+$ така, що $G^{\varepsilon}_{ij}(dx) = 0$ при $j > i$, $V^{\varepsilon}_{ij}(dx)$ – варіація міри $G^{\varepsilon}_{ij}(dx)$, $V_{\varepsilon}(dx) = (V^{\varepsilon}_{ij}(dx))^{\infty}_{i,j=1}$, $G_{\varepsilon}(dx) = (G^{\varepsilon}_{ij}(dx))^{\infty}_{i,j=1}$.

Приймемо $m_i = \int\limits_0^{\infty} xG_{ii}(dx)$ і нехай міри $G^{\varepsilon}_{ij}(dx)$ задовольняють такі умови: границя $G^{\varepsilon}_{ij}(dx)$ в розумінні слабкої збіжності дорівнює $G_{ij}(dx)$ при $\varepsilon \to 0$, тобто

$$G^{\varepsilon}_{ij}(dx) \underset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} G_{ij}(dx)\,; \tag{1}$$

$$G_{ij}(dx) = 0 \ (i \neq j),\ G_{ii}(dx) \geq 0,\ G_{ii}([0,\infty)) = 1; \tag{2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}(I - V_{\varepsilon}([0,\infty))) = D = \{d_{ij}\}^{\infty}_{i,j=1},\ d_{ij} < \infty,\ i,j \in \mathbb{N}; \tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}(I - G_{\varepsilon}([0,\infty))) = C = \{c_{ij}\}^{\infty}_{i,j=1},\ c_{ij} < \infty,\ i,j \in \mathbb{N}; \tag{4}$$

$$\sup_{\varepsilon>0} \int\limits_T^{\infty} xV^{\varepsilon}_{ij}(dx) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0; \tag{5}$$

$$\inf_{i\in\mathbb{N}} m_i > 0,\ \sup_{i\in\mathbb{N}} m_i < \infty; \tag{6}$$

$$\inf_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} > 0. \tag{7}$$

Зауважимо, що завдяки умові (5), для всіх $i \in \mathbb{N}$ виконується $0 < m_i < \infty$. Аналогічно, нехай $n_i = \int\limits_0^\infty x V_{ii}(dx)$, де $V_{ij}(dx)$ варіація міри $G_{ij}(dx)$, $G(dx) = (G_{ij}(dx))_{i,j=1}^\infty$, $V(dx) = (V_{ij}(dx))_{i,j=1}^\infty$, $M = diag\{m_1, m_2, ...\}$, $N = diag\{n_1, n_2...\}$.

Зауваження 1. Оскільки міри $G_{ii}(dx)$ дійснозначні (див. (2)), то очевидно, що $G_{ii}(dx) = V_{ii}(dx)$, тобто $M = N$.

Приймемо

$$N_\varepsilon = \int\limits_0^\infty x V_\varepsilon(dx), \; L_\varepsilon = N_\varepsilon^{-1}(I - V_\varepsilon([0;\infty))), \; Q_\varepsilon(x) = e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x V_\varepsilon(dy) e^{-(x-y)L_\varepsilon}.$$

Властивості матричнозначних функцій $Q_\varepsilon(x)$ використовують під час дослідження асимптотичного поводження розв'язку скінченновимірного рівняння відновлення (див. [1], [2]).

Розглянемо банаховий простір $\mathbf{K}$, елементами якого є матричнозначні функції $Q(x) = (Q_{ij}(x))_{i,j=1}^\infty$ з нормою $|||Q||| = \int\limits_{-\infty}^\infty \|Q(x)\| dx < \infty$, де $\|A\| = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^\infty |a_{ij}|$ – норма матриці A. Для $Q \in \mathbf{K}$ позначимо $\widehat{Q}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x} Q(x) dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Нехай $G_{ij}^\varepsilon(dx)$ задовольняють умови (1)-(7). Тоді $Q_\varepsilon(x) \in \boldsymbol{K}$ і виконується $Q_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} Q(x) = V([x;\infty))$ за нормою простору $\boldsymbol{K}$.*

Доведення. Завдяки умовам (6) та (7) $\sigma = \inf\limits_i \sum\limits_{j=1}^\infty \frac{d_{ij}}{m_i} > 0$, а тому $\|e^{-tM^{-1}D}\| \leq e^{-t\sigma}$. Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|e^{-x\frac{1}{\varepsilon}L_\varepsilon}\| = \|e^{-xM^{-1}D}\|$, то, враховуючи попередню нерівність, отримуємо, що $\|e^{-xL_\varepsilon}\| \leq e^{-\varepsilon x\sigma}$. Далі

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^x V_\varepsilon(dy) e^{-(x-y)L_\varepsilon} \right) dx = \int\limits_0^{+\infty} V_\varepsilon(dy) \int\limits_y^{+\infty} e^{-(x-y)L_\varepsilon} dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} V_\varepsilon(dy) e^{yL_\varepsilon} \left(e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon^{-1} \Big|_{+\infty}^{y} \right) = \int\limits_0^{+\infty} L_\varepsilon^{-1} V_\varepsilon(dy) = V_\varepsilon([0,+\infty)) L_\varepsilon^{-1}.$$

Звідси і з того, що $\|e^{-xL_\varepsilon}\| \leq e^{-\varepsilon x\sigma}$ випливає, що $Q_\varepsilon(x) \in \mathbf{K}$.

Позначимо $\overline{V}_\varepsilon(y) = V_\varepsilon([y;\infty))$. Тоді $d\overline{V}_\varepsilon(y) = -V_\varepsilon(dy)$ і

$$Q_\varepsilon(x) = e^{-xL_\varepsilon} + \int\limits_0^x d\overline{V}_\varepsilon(y)\cdot e^{-(x-y)L_\varepsilon} = e^{-xL_\varepsilon} + \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}\Big|_0^x -$$

$$-\int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}dyL_\varepsilon = -\overline{V}_\varepsilon(0)e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}dyL_\varepsilon +$$

$$+e^{-xL_\varepsilon} + \overline{V}_\varepsilon(x) = \overline{V}_\varepsilon(x) + (I-\overline{V}_\varepsilon(0))e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}L_\varepsilon dy =$$

$$= \overline{V}_\varepsilon(x) + N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}L_\varepsilon dy.$$

Покажемо, що

$$\overline{V}_\varepsilon(x)\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} Q(x) = V([x;\infty)), \tag{8}$$

$$\int\limits_0^\infty \|N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}L_\varepsilon dy\|dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{9}$$

При $i\neq j$ маємо

$$\int\limits_0^\infty \overline{V}^\varepsilon_{ij}(x)dx = \int\limits_0^\infty V^\varepsilon_{ij}([x;\infty))dx = \int\limits_0^\infty xV^\varepsilon_{ij}(dx) + xV^\varepsilon_{ij}([x;\infty))\Big|_0^\infty =$$

$$= \int\limits_0^c xV^\varepsilon_{ij}(dx) + \int\limits_c^\infty xV^\varepsilon_{ij}(dx) \leq c\cdot V^\varepsilon_{ij}([0;c]) + \int\limits_c^\infty xV^\varepsilon_{ij}(dx).$$

З умов (3) та (5) відповідно отримуємо $c\cdot V^\varepsilon_{ij}([0;c])\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$ та $\int\limits_c^\infty xV^\varepsilon_{ij}(dx)\underset{c\to\infty}{\longrightarrow}0$.

При $i=j$ маємо

$$\int\limits_0^\infty |\overline{V}^\varepsilon_{ii}(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx = \int\limits_0^c |\overline{V}^\varepsilon_{ii}(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx + \int\limits_c^\infty |\overline{V}^\varepsilon_{ii}(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^c |\overline{V}^\varepsilon_{ii}(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx + \int\limits_c^\infty V^\varepsilon_{ii}([x;\infty))dx + \int\limits_c^\infty V_{ii}([x;\infty))dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^c |V^\varepsilon_{ii}([0,x]) - V_{ii}([0,x])|dx + c|1 - V^\varepsilon_{ii}([0,\infty))| + \int\limits_c^\infty xV^\varepsilon_{ii}(dx) + \int\limits_c^\infty xV_{ii}(dx).$$

Легко бачити, що завдяки умові (5), інтеграли $\int\limits_c^\infty xV^\varepsilon_{ii}(dx)$ і $\int\limits_c^\infty xV_{ii}(dx)$ рівномірно відносно ε збігаються до 0, а $c|1-V^\varepsilon_{ii}([0,\infty))|\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$ і $|V^\varepsilon_{ii}([0,x])-V_{ii}([0,x])|\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$ завдяки

(4) та (1) відповідно. Звідси випливає умова (8). Приймемо

$$\overline{V}^c_\varepsilon(y) = \begin{cases} \overline{V}_\varepsilon(y), & y \le c, \\ 0, & y > c, \end{cases} \qquad \overline{R}^c_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0, & y \le c, \\ \overline{V}_\varepsilon(y), & y > c. \end{cases}$$

Легко бачити, що $\overline{V}_\varepsilon(y) = \overline{V}^c_\varepsilon(y) + \overline{R}^c_\varepsilon(y)$, а отже,

$$\int\limits_0^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le$$

$$\le \int\limits_0^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx + \int\limits_0^\infty |\int\limits_0^x \overline{R}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le$$

$$\le \int\limits_0^c |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx + \int\limits_c^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} -$$

$$- \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx + \int\limits_c^\infty |\overline{V}_\varepsilon(y)| dy \int\limits_0^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx.$$

Але $\int\limits_0^\infty \|e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon\| dx = \int\limits_0^\infty \|e^{-\frac{x}{\varepsilon}L_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon\| dx \le \|\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon\| \int\limits_0^\infty e^{-\sigma x} dx = \frac{1}{\sigma} \cdot \|\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon\| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{\|M^{-1}D\|}{\sigma}$, а інтеграл $\int\limits_c^\infty |\overline{V}_\varepsilon(y)| dy$ можна зробити як завгодно малим за допомогою вибору числа c. Тому $\int\limits_c^\infty |\overline{V}_\varepsilon(y)| dy \int\limits_0^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Далі

$$\int\limits_c^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le |N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) e^{yL_\varepsilon} dy| \int\limits_c^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx \le$$

$$\le |N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) dy| \int\limits_c^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx$$

і, аналогічно,

$$\int\limits_0^c |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le |N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) e^{yL_\varepsilon} dy| \int\limits_0^c |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx \le$$

$$\le |N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) dy| \int\limits_0^c |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx.$$

Оскільки $\int\limits_0^\infty \overline{V}(y) dy = N$ і $|N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) dy| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} |N - \int\limits_0^c \overline{V}(y) dy|$, то за рахунок вибору c отримуємо (9). Теорему 1 доведено.

При доведенні наступної теореми будемо використовувати лему, яку подаємо без доведення, оскільки її доведення аналогічне до скінченновимірного випадку (див. [3])

Лема 1. *Нехай послідовність* $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{K}$ *збігається за нормою* $|||\cdot|||$ *до* $Q \in \boldsymbol{K}$ *і при* $\lambda \in [a;b]$ *існує* $\widehat{Q}(\lambda)^{-1}$. *Тоді знайдеться послідовність* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{K}$ *така, що для всіх достатньо великих* n

$$\widehat{Q}_n(\lambda)^{-1} = \widehat{F}_n(\lambda) \text{ при } \lambda \in [a;b], \ |||F_n - F||| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \widehat{Q}(\lambda)^{-1} = \widehat{F}(\lambda) \text{ при } \lambda \in [a;b].$$

Приймемо $\Psi_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} V_\varepsilon(dx)$, $\Psi(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} G(dx) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} V(dx)$.

Теорема 2. *Нехай* $G_{ij}^{\varepsilon}(dx)$ *задовольняють умови (1)-(7). Якщо для кожного* $\lambda \in \mathbb{R}$ *матриця* $(\Psi(\lambda) - I)$ *оборотна, то для всіх* $-\infty < a < b < \infty$ *і достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *знайдуться функції* $F \in \boldsymbol{K}$, $F_\varepsilon \in \boldsymbol{K}$ *такі, що для* $\lambda \in [a,b]$ *виконується*

$$\begin{aligned} &\widehat{F}_\varepsilon^{-1}(\lambda) = (I - \Psi_\varepsilon(\lambda))(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1}, \\ &\widehat{F}^{-1}(\lambda) = \frac{i}{\lambda}(I - \Psi(\lambda)), \\ &F_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} F(x) \end{aligned}$$

за нормою простору $\boldsymbol{K}$.

Зауваження 2. Умова оборотності матриці $(\Psi(\lambda) - I)$ є аналогом умови нерешітчастості мір $G_{ii}(dx)$ у випадку скінченновимірних матриць.

Доведення. Враховуючи твердження леми 1 та теореми 1 для доведення цієї теореми треба показати, що перетворення Фур'є матриці $Q(x) = V([x;\infty))$ оборотне та знайти явний вигляд матриць $\widehat{Q}(\lambda)$ і $\widehat{Q}_\varepsilon(\lambda)$.

Маємо $\widehat{Q}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} V([x,\infty))dx = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} G([x,\infty))dx = \int\limits_0^\infty G(dy) \int\limits_0^y e^{i\lambda x} dx = \int\limits_0^\infty G(dy) \frac{e^{i\lambda x}-1}{i\lambda} = \frac{1}{i\lambda}(\Psi(\lambda) - I)$. Звідси отримуємо, що матриця $\widehat{Q}(\lambda)$ має обернену. Далі

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_\varepsilon(\lambda) &= \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-xL_\varepsilon} dx - \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} (\int\limits_0^x V_\varepsilon(dy) e^{-(x-y)L_\varepsilon}) dx = \\ &= (L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1} - \Psi_\varepsilon(\lambda)(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1} = (I - \Psi_\varepsilon(\lambda))(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1}. \end{aligned}$$

Теорему 2 доведено.

---

1. *Сильвестров Д.С.* Теорема востановления в схеме серий // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1978. – Т. 18. – С. 144-161.

2. *Шуренков В.М.* Переходные явления в теоремах многомерного востановления // Теория вероятностей и ее примен. – 1979. – Т. 24. – С. 436-438.

3. *Куцudя П.П.* Многомерные теоремы типа восстановления и их применения к регенерирующим случайным процессам: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1990.

PROPERTIES OF COUNTABLE MATRIX MEASURES

Taras ZABOLOTSKYY

Ivan Franko National university of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

Here is proved properties of countable matrix measures which can be used in investigating asymptotic behavior of the solution of the renewal equation.

Key words: matrix measure, Fourier transformation.

Стаття надійшла до редколегії 30.01.2007

Прийнята до друку 24.10.2007