ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.130-136 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.130-136*

УДК 519.212

СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ІМОВІРНОСТЕЙ СТАНІВ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНОЇ ЗАМКНЕНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Для одноканальної замкненої системи масового обслуговування з показниковим розподілом часу безвідмовної роботи та довільно розподіленим часом обслуговування визначено ймовірності станів граничного стаціонарного процесу.

Ключові слова: одноканальна замкнена система масового обслуговування, граничний стаціонарний процес, розподіл імовірностей.

1. У випадку, коли час обслуговування – довільно розподілена випадкова величина, а потік замовлень найпростіший, існування граничного стаціонарного процесу для одноканальної відкритої системи масового обслуговування (СМО) з необмеженою чергою доведено методом вкладених ланцюгів Маркова [1, с. 98]. Дослідження ергодичних властивостей одноканальної замкненої СМО ускладнюється тим, що для неї потік замовлень на вході системи ніколи не може бути найпростішим, оскільки інтенсивність потоку замовлень на вході системи змінюється разом з надходженням кожного нового замовлення і навіть дорівнює нулеві після того, як всі наявні в системі технічні пристрої (ТП) прибули на обслуговування.

Однак випадковий процес, який відбувається у замкненій СМО з найпростішими потоками, є найпростішим процесом загибелі-розмноження, тому володіє ергодичною властивістю. Для такої СМО відомі формули для стаціонарних імовірностей станів [2, с. 282].

Стаціонарні ймовірності станів визначено для одноканальної замкненої СМО з показниковим розподілом часу безвідмовної роботи технічних пристроїв і довільно розподіленим часом обслуговування.

2. Загальні формули для стаціонарних імовірностей. Розглянемо одноканальну замкнену СМО, в якій кожен з m ($m \geq 2$) технічних пристроїв може в деякі випадкові моменти часу потребувати обслуговування. Нехай потік відмов кожного ТП – найпростіший з інтенсивністю λ. Це означає, що час T_λ безвідмовної роботи ТП розподілений згідно з показниковим законом. Математичне сподівання випадкової величини T_λ позначимо через m_λ: $M(T_\lambda) = m_\lambda = 1/\lambda$. ТП, що потребує обслуговування і застає канал обслуговування вільним, відразу приймають на обслуговування. У випадку зайнятості каналу ТП чекає на обслуговування в черзі.

Тривалості обслуговування замовлень – незалежні однаково розподілені випадкові величини T_μ з довільною функцією розподілу $F_\mu(t)$. Тоді інтенсивність потоку обслуговувань $\mu = 1/m_\mu$, де $m_\mu = M(T_\mu) = \int\limits_0^\infty t\, dF_\mu(t)$.

Введемо нумерацію станів СМО відповідно до кількості ТП, що потребують обслуговування: s_i $(i = \overline{0, m})$. Нехай $p_i(t)$ – імовірність перебування системи в стані s_i в момент часу t.

Припустимо, що в початковий момент часу система перебуває у стані s_0, і позначимо через t_k $(k = 1,2,\ldots)$ – момент завершення обслуговування k-го замовлення, а через N_k кількість ТП, які потребують обслуговування в момент, коли k-те обслужене замовлення, завершивши обслуговування, покидає канал обслуговування. Тоді подія $\{N_k = j\}$ означає, що в момент $t_k + 0$ система переходить до стану s_j.

За формулою повної ймовірності

$$P\{\, N_{k+1} = j \,\} = \sum_{s=0}^{m-1} P\{\, N_{k+1} = j \mid N_k = s \,\} P\{\, N_k = s \,\},\\ j = \overline{0,\, m-1}; \qquad k = 1,\, 2, \ldots. \tag{1}$$

Перехідні ймовірності $p_{js}^{(k)} = p_{js} = P\{\, N_{k+1} = j \mid N_k = s \,\}$ не залежать від номера обслуженого замовлення k, а визначають з врахуванням кількості замовлень, які надходять на обслуговування за час обслуговування одного замовлення T_μ

$$p_{js} = \begin{cases} \Pi_{j,\, m-1}, & s = 0;\, 1; \\ \Pi_{j-s+1,\, m-s}, & s = \overline{2,\, j+1}, \;\; j = \overline{0,\, m-2}, \quad s = \overline{2,\, m-1}, \;\; j = m-1. \\ 0, & s > j+1. \end{cases} \tag{2}$$

Тут Π_{kl} – імовірність того, що за час обслуговування T_μ з ладу вийдуть k технічних пристроїв, за умови, що потенційними джерелами замовлень у момент початку обслуговування були l ТП.

Враховуючи, що наявність у системі i джерел замовлень означає, що залишок часу до моменту надходження чергового замовлення розподілений згідно з показниковим законом з параметром $i\lambda$ (позначимо цю випадкову величину через $T_{i\lambda}$ $(i = \overline{1,\, m-1})$, для ймовірностей Π_{kl} отримаємо співвідношення

$$\begin{gathered} \Pi_{0l} = P\{\, T_\mu < T_{l\lambda} \,\}, \qquad l = \overline{1,\, m-2}; \\ \Pi_{ll} = P\{\, T_{l\lambda} + T_{(l-1)\lambda} + \cdots + T_\lambda < T_\mu \,\}, \qquad l = \overline{1,\, m-1}; \\ \Pi_{kl} = P\{\, T_{l\lambda} + T_{(l-1)\lambda} + \cdots + T_{(l-k+1)\lambda} < T_\mu < \\ < T_{l\lambda} + T_{(l-1)\lambda} + \cdots + T_{(l-k)\lambda} \,\}, \qquad l = \overline{2,\, m-1}, \quad k < l. \end{gathered} \tag{3}$$

Переконаємося в тому, що послідовність $\{N_k\}$ утворює ланцюг Маркова.

Якщо Δ_k – кількість замовлень, які надійшли в систему за час T_μ обслуговування k-го замовлення, то

$$N_k = \begin{cases} N_{k-1} + \Delta_k - 1, & N_{k-1} > 0; \\ \Delta_k, & N_{k-1} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Оскільки залишок часу від моменту завершення обслуговування k-го замовлення до моменту надходження чергового замовлення розподілений за показниковим законом (з параметром, кратним λ) і, отже, не залежить від поведінки системи до моменту t_k, то випадкова величина Δ_k не залежить від минулого, тому рівність (4) доводить марковську властивість послідовності $\{N_k\}$. Рівності (2) доводять однорідність ланцюга Маркова $\{N_k\}$.

Опираючись на ергодичну теорему для однорідного незвідного ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів ([2, с. 61] або [3, с. 67]), можемо стверджувати, що існують границі

$$\pi_j = \lim_{k\to\infty} P\{\, N_k = j \,\} \qquad (j = \overline{0,\, m-1}).$$

Переходячи до границі в рівностях (1), з врахуванням співвідношень (2) одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення ймовірностей π_j

$$\pi_j = \sum_{s=0}^{j+1} p_{js}\pi_s \quad (j = \overline{0,\, m-2}); \qquad \sum_{s=0}^{m-1} \pi_s = 1. \tag{5}$$

Для з'ясування зв'язку між імовірностями π_j $(j = \overline{0,\, m-1})$ і стаціонарним розподілом імовірностей станів системи $p_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$ $(j = \overline{0,\, m})$ проаналізуємо роботу системи на дуже великому проміжку часу T.

Проміжки часу, протягом яких система перебуває в стані s_0, розподілені за показниковим законом з параметром $m\lambda$ $\big(M(T_{m\lambda}) = m_{m\lambda} = 1/(m\lambda)\big)$. Якщо $N(T)$ – кількість замовлень, обслужених у системі за час T, то

$$T \approx (m_{m\lambda}\pi_0 + m_\mu)N(T). \tag{6}$$

Рівність (6) виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу T розглядають. Враховуючи, що $T_0(T) \approx m_{m\lambda}\pi_0 N(T)$ – сумарний (за час T) час перебування системи у стані s_0, стаціонарну ймовірність перебування системи у цьому стані визначимо за допомогою граничного переходу

$$p_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{T_0(T)}{T} = \frac{m_{m\lambda}\pi_0}{m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0}.$$

У момент, коли обслужене замовлення покидає канал обслуговування, стан s_j настає з імовірністю π_j і триває протягом випадкового проміжку часу $T_{(m-j)\lambda}$. Тому $T_j(T) \approx m_{(m-j)\lambda}\pi_j N(T)$ – сумарний (за час T) час перебування системи у стані s_j, і

$$p_j = \lim_{T\to\infty} \frac{T_j(T)}{T} = \frac{m_{(m-j)\lambda}\pi_j}{m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0} \qquad (j = \overline{0,\, m-1}). \tag{7}$$

Імовірність p_m визначимо за допомогою умови нормування $\sum\limits_{j=0}^{m} p_j = 1$

$$p_m = \frac{m_\mu - \sum\limits_{j=1}^{m-1} m_{(m-j)\lambda}\pi_j}{m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0}. \tag{8}$$

Використовуючи знайдені ймовірності p_j $(j = \overline{0,\, m})$, можемо обчислити показники ефективності одноканальної замкненої СМО, зокрема середню кількість замовлень, які перебувають у черзі

$$\begin{aligned} \overline{r} = \sum_{j=2}^{m}(j-1)p_j = \\ = \frac{1}{m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0}\left(\sum_{j=2}^{m-1}(j-1)m_{(m-j)\lambda}\pi_j + (m-1)\big(m_\mu - \sum_{j=1}^{m-1} m_{(m-j)\lambda}\pi_j\big)\right), \end{aligned} \tag{9}$$

і середній час перебування ТП у черзі

$$\begin{aligned} \overline{t}_r = \lim_{T\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=2}^{m}(j-1)T_j(T)}{N(T)} = \lim_{T\to\infty}\frac{T}{N(T)}\sum_{j=2}^{m}\frac{(j-1)T_j(T)}{T} = \\ = \overline{r}\lim_{T\to\infty}\frac{T}{N(T)} = \overline{r}\,(m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0) = \\ = \sum_{j=2}^{m-1}(j-1)m_{(m-j)\lambda}\pi_j + (m-1)\big(m_\mu - \sum_{j=1}^{m-1} m_{(m-j)\lambda}\pi_j\big). \end{aligned} \tag{10}$$

Для СМО з двома технічними пристроями ($m = 2$) система (5) складається лише з двох рівнянь

$$\pi_0 = \Pi_{01}(\pi_0 + \pi_1), \qquad \pi_0 + \pi_1 = 1,$$

де згідно з (3) $\Pi_{01} = P\{\, T_\mu < T_\lambda \,\}$. Отже, у цьому випадку

$$\pi_0 = \Pi_{01} = P\{\, T_\mu < T_\lambda \,\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dF_\mu(t), \qquad \pi_1 = 1 - \pi_0. \tag{11}$$

Для випадків $m = 3$ і $m = 4$ розв'язки системи (5) зручно записати, ввівши нові позначення для ймовірностей Π_{kl}

$$\pi_0 = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_{21}}, \quad \pi_1 = \frac{\beta_1(1-\beta_2)}{\beta_1 + \beta_{21}}, \quad \pi_2 = \frac{\beta_{21}}{\beta_1 + \beta_{21}}; \qquad (m = 3) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \pi_0 = (1-\beta_1)\beta_2\beta_3\Delta, \qquad \pi_1 = (1-\beta_1)\beta_2(1-\beta_3)\Delta, \\ \pi_2 = \beta_{32}(1-\beta_1)\Delta, \qquad \pi_3 = (\beta_2\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32})\Delta, \\ \frac{1}{\Delta} = \beta_2(1-\beta_1+\beta_{31}) + \beta_{32}(1-\beta_1+\beta_{21}), \qquad (m = 4), \end{aligned} \tag{13}$$

де

$$\beta_i = P\{\, T_\mu < T_{i\lambda} \,\} \quad (\, i = \overline{1,\, 3}\,)\,; \quad \beta_{21} = P\{\, T_{2\lambda} + T_\lambda < T_\mu \,\};$$
$$\beta_{31} = P\{\, T_{3\lambda} + T_{2\lambda} + T_\lambda < T_\mu \,\}; \quad \beta_{32} = P\{\, T_{3\lambda} + T_{2\lambda} < T_\mu \,\}.$$

3. Результати обчислень для типових законів розподілу часу обслуговування. Використовуючи знайдені ймовірності π_j $(j = \overline{0,\, m-1})$, можна визначити стаціонарний розподіл імовірностей станів системи p_j $(j = \overline{0,\, m})$, середні значення $\overline{r}$, $\overline{t}_r$ та інші показники ефективності одноканальної замкненої СМО для будь-якого заданого розподілу часу обслуговування T_μ. Зокрема, у випадку показникового розподілу часу обслуговування, коли $m_\mu = 1/\mu$, з (7), (8) отримаємо формули [2, с. 282 – 283] для одноканальної замкненої СМО з найпростішими потоками.

Наведемо результати, отримані за формулами (7)-(13) для деяких типових розподілів випадкової величини T_μ.

Приклад 1. Час обслуговування детермінований $T_\mu = T = const$, $m_\mu = T$.

Випадок 1. $m = 2$.

$$p_0 = \alpha_0 e^{-\lambda T}, \quad p_1 = 2\alpha_0(1 - e^{-\lambda T}), \quad p_2 = 2\alpha_0(\lambda T + e^{-\lambda T} - 1),$$
$$\frac{1}{\alpha_0} = 2\lambda T + e^{-\lambda T}; \qquad \overline{t}_r = (\lambda T + e^{-\lambda T} - 1)/\lambda.$$

Випадок 2. $m = 3$.

$$p_0 = \beta_0 e^{-3\lambda T}, \quad p_1 = 1,5\beta_0 e^{-\lambda T}(1 - e^{-2\lambda T}), \quad p_2 = 3\beta_0(1 - 2e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T});$$
$$p_3 = 1,5\beta_0\big(2\lambda T(1 - e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T}) - 2(1 + e^{-2\lambda T}) + 3e^{-\lambda T} + e^{-3\lambda T}\big);$$
$$\frac{1}{\beta_0} = e^{-3\lambda T} + 3\lambda T(1 - e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T});$$
$$\overline{t}_r = 2T + \frac{e^{-3\lambda T}}{\lambda(1 - e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T})} - \frac{1}{\lambda}\,.$$

Випадок 3. $m = 4$.

$$\frac{1}{p_0} = 1 + 4\lambda T e^{\lambda T}(1 - 2e^{\lambda T} + 3e^{2\lambda T} - e^{3\lambda T} - e^{4\lambda T} + e^{5\lambda T});$$
$$p_1 = \frac{4}{3}(e^{3\lambda T} - 1)p_0; \qquad p_2 = 2e^{2\lambda T}(e^{3\lambda T} - 3e^{\lambda T} + 2)p_0;$$
$$p_3 = 4e^{\lambda T}(e^{5\lambda T} - 2e^{4\lambda T} - e^{3\lambda T} + 5e^{2\lambda T} - 4e^{\lambda T} + 1)p_0;$$
$$p_4 = \frac{p_0}{3}\big(7 + 12\lambda T e^{\lambda T}(1 - 2e^{\lambda T} + 3e^{2\lambda T} - e^{3\lambda T} - e^{4\lambda T} + e^{5\lambda T}) -$$
$$- 12e^{\lambda T}(e^{5\lambda T} - e^{3\lambda T} - 4e^{\lambda T} + 1) - 38e^{3\lambda T} + 18e^{5\lambda T}\big);$$
$$\overline{r} = p_2 + 2p_3 + 3p_4; \qquad \overline{t}_r = \frac{1 - p_0 + \overline{r}}{\lambda(3 + p_0 - \overline{r})} - T.$$

Приклад 2. Час обслуговування рівномірно розподілений на проміжку (a, b), $m_\mu = (a + b)/2$.

Випадок 1. $m = 2$.

$$p_0 = \gamma_0(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}); \qquad p_1 = 2\gamma_0\big(\lambda(b-a) + e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}\big);$$
$$p_2 = \gamma_0\big(\lambda^2(b^2 - a^2) - 2\big(\lambda(b-a) + e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}\big)\big);$$
$$\frac{1}{\gamma_0} = \lambda^2(b^2 - a^2) + e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b};$$
$$\bar t_r = \frac{a+b}{2} - \frac{\lambda(b-a) - e^{-\lambda a} + e^{-\lambda b}}{\lambda^2(b-a)}\,.$$

Випадок 2. $m = 3$.

$$p_0 = 2\delta_0(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b});$$
$$p_1 = 3\delta_0(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})\big(2\lambda(b-a) + e^{-2\lambda b} - e^{-2\lambda a}\big);$$
$$p_2 = 6\delta_0\lambda(b-a)\big(2\lambda(b-a) - 4(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}\big);$$
$$\begin{aligned} p_3 = 3\delta_0\big(\lambda^2(b^2-a^2)\big(2\lambda(b-a) - 2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}\big) - \\ -2\lambda(b-a)\big(2\lambda(b-a) - 3(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}\big) + \\ +(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b})\big); \end{aligned}$$
$$\overline{r} = p_2 + 2p_3; \qquad \bar t_r = \frac{\overline{r}}{6\lambda}\big(2\pi_0 + 3\lambda(a+b)\big);$$
$$\pi_0 = \frac{(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b})}{\lambda(b-a)\big(2\lambda(b-a) - 2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}\big)}\,.$$

Приклад 3. Час обслуговування розподілений за узагальненим законом Ерланга другого порядку з параметрами μ_1, μ_2; $\quad m_\mu = (\mu_1 + \mu_2)/(\mu_1\mu_2)$.

Випадок 1. $m = 2$.

$$\begin{gathered} p_0 = (\mu_1\mu_2)^2\eta_0; \qquad p_1 = 2\lambda\mu_1\mu_2\eta_0(\lambda + \mu_1 + \mu_2); \\ p_2 = 2\lambda\eta_0\big((\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2) - \mu_1\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)\big); \\ \frac{1}{\eta_0} = (\mu_1\mu_2)^2 + 2\lambda(\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2); \\ \bar t_r = \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2} - \frac{\lambda+\mu_1+\mu_2}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}\,. \end{gathered} \tag{14}$$

Випадок 2. $m = 3$. Введемо позначення $\alpha_i = \lambda/\mu_i$ $(i = 1,\ 2)$. Тоді

$$\begin{gathered} \frac{1}{p_0} = 1 + 3(\alpha_1+\alpha_2)\big((1+\alpha_1)(1+\alpha_2) + \\ +(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)(1+2\alpha_1)(1+2\alpha_2)\big); \\ p_1 = 3(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2)p_0; \quad p_2 = 6\big(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2 + \\ +2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\big)p_0; \quad p_3 = 6\big(\alpha_1^2(\alpha_1 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2^2) + \end{gathered} \tag{15}$$

$$+\alpha_2\big(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^2\alpha_2^2+3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\big)\big)p_0;$$

$$\overline{r}=p_2+2p_3; \qquad \overline{t}_r=\frac{\overline{r}\,\pi_0}{3\lambda p_0};$$

$$\frac{1}{\pi_0}=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)(1+2\alpha_1)(1+2\alpha_2).$$

Правильність отриманих у цій праці формул для стаціонарних імовірностей p_j $(j=\overline{0,\,m})$ підтверджена результатами числових експериментів на імітаційних моделях одноканальної замкненої СМО, виконаних за допомогою комп'ютерної системи GPSS World. Формули (14) і (15) перевірені також за допомогою так званого методу фаз [4, с. 389], який дає змогу знаходити стаціонарний розподіл імовірностей у випадку, коли випадкові величини T_λ або T_μ розподілені за узагальненим законом Ерланга.

---

1. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. – М., 1982.
2. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М., 1969.
3. *Жерновий Ю. В.* Марковські моделі масового обслуговування. – Львів, 2004.
4. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории вероятностей. – М., 1983.

STATISTICAL-EQUILIBRIUM STATE PROBABILITIES DISTRIBUTION FOR THE SINGLE-SERVER CLOSED QUEUEING SYSTEMS

Yuriy ZHERNOVYI

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

The statistical-equilibrium state probabilities distribution for the single-server closed queueing system with the exponential distributed nonfailure operating time and arbitrary distributed service time is obtained.

Key words: single-server closed queueing system, statistical-equilibrium state, probabilities distribution.

Стаття надійшла до редколегії 18.04.2006

Прийнята до друку 24.10.2007