ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.119-129 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.119-129*

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА S-ЗУПИНЕНИХ ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗЛІЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ ТИПІВ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Ірина КИРИЧИНСЬКА, Остап ОХРІН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: wild@mail.lviv.ua

Початковий процес зі зліченною кількістю типів $\mu(t)$ породжує зупинений гіллястий процес $\xi(t)$. Якщо початковий процес потрапляє в деяку непорожню множину S, то процес зупиняється. Припускається, що початковий процес докритичний, нерозкладний і неперіодичний. Доведено, що ймовірність виродження збігається до періодичної з періодом 1 функції.

Ключові слова: гіллясті процеси, ймовірність виродження, асимптотична поведінка.

1. Нехай задано фазовий вимірний простір $(X, \mathcal{A})$, де $\mathcal{A}$ — σ-алгебра задана на X. На цьому просторі розглядається необривний однорідний марківський процес з перехідною ймовірністю $P(t, x, A)$, де t – час, $x \in X$, $A \in \mathcal{A}$. Розглядаючи кожну траєкторію цього процесу як еволюцію блукання частинки, $P(t, x, A)$ інтерпретується як ймовірність того, що частинка, яка почала блукання з точки $x \in X$ за час t потрапляє в множину $A \in \mathcal{A}$. Припускається, що час дискретний, тривалість життя частинки дорівнює 1, і в кінці свого життя частинка миттєво породжує деяку випадкову кількість нових частинок, початкові положення яких розподілені випадково на просторі X. Кількість і положення цих частинок залежать тільки від положення частинки-предка в момент перетворення. Далі кожна нова частинка незалежно від інших частинок еволюціонує аналогічно.

Нехай $\mu_{xt}(A)$ випадкова міра, яка для кожного $A \in \mathcal{A}$ дорівнює кількості частинок у момент часу t, типи яких потрапляють в множину A за умови, що в початковий момент була тільки одна частинка в точці $x \in X$. $\mu_t(A)$ — випадкова міра, яка дорівнює кількості частинок у момент часу t, типи яких належать множині A.

Надалі вважаємо, що простір X складається зі зліченної кількості елементів $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, тобто припускається, що множина типів частинок $\{T_1, \ldots, T_n, \ldots\}$ зліченна.

На підставі міри $\mu_{xt}(A)$ вводиться багатовимірна міра $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(A)$

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(A) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_i} \mu_{x_{ij}t}(x_m), & \text{якщо } x_m \in A \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{array} \right\}_{m=0}^{\infty},$$

де $\mathbf{x} = \{x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, \ldots\}$, $x_{ij} \in X$ – j-й елемент i-го типу.

Позначимо $\mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, і відповідно $\mathcal{N}_0^{\infty}$ нескінченно вимірний простір, елементами якого є $x_i \in \mathcal{N}_0$.

Маючи $P(t, x, A)$, введемо $\widehat{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{N}_0^{\infty})$, де $\widehat{P}$ – ймовірність того, що якщо в початковий момент є вектор $\mathbf{x}$, то за час t отримуємо вектор $\mathbf{y}$. Керуючись зробленими позначеннями, можна записати співвідношення

$$\widehat{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = P\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X) = \mathbf{y}\}.$$

Введемо $\mathcal{E}(i) = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}, \ldots)$, де δ_{ij} – символ Кронекера, $\delta_{\mathbf{xy}} = \prod_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i y_i}$, $\mathcal{E}(i)$-частинка i-го типу. Вважаємо, що $a^b = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_n^{b_n} \cdots$, $a! = a_1! a_2! \cdots a_n! \cdots$, $\overline{a} = a_1 + \cdots + a_n + \cdots$, $a_i^{[b_i]} = a_i(a_i - 1) \cdots (a_i - b_i + 1)$.

Означення 1. *Функціонал*

$$F(s(\cdot)) = F(s) = \mathrm{E} \exp\left\{ \int \ln s(x) \mu(dx) \right\}$$

називатимемо твірним функціоналом випадкової міри μ, де $s(x)$ – вимірна обмежена функція.

Твірний функціонал $F(s)$ визначений завжди, коли $0 < |s(x)| \leqslant 1$ та інтеграл $\int \ln s(x)\, \mu(dx)$ існує.

Для побудованого процесу твірний функціонал є таким:

$$h(t, s(\cdot)) = \mathrm{E} \exp\left\{ \int_X \ln s(z) \boldsymbol{\mu}_t(dz) \right\}.$$

Надалі використовуватимемо тільки $s(\cdot) = const = s = (s_1, s_2, \ldots)$. Легко перевірити, що введений твірний функціонал є твірним у тому сенсі, яким він є у випадку скінченної кількості типів (тоді це не функціонал, а функція).

Введемо

$$\begin{aligned} h^i(t, s) &= h^{\mathcal{E}(i)}(t, s), \\ h^{\boldsymbol{\beta}}(t, s) &= \big((h^{\mathcal{E}(1)}(t, s))^{\boldsymbol{\beta}_1}, (h^{\mathcal{E}(2)}(t, s))^{\boldsymbol{\beta}_2}, \ldots\big), \\ h(t, s) &= \big(h^{\mathcal{E}(1)}(t, s), h^{\mathcal{E}(2)}(t, s), \ldots\big). \end{aligned}$$

Легко переконатися [3], що введений твірний функціонал задовольняє основне функціональне рівняння $(\forall\, t, \tau = 0, 1, 2, \ldots)$

$$h(t + \tau, s) = h(t, h(\tau, s)).$$

Зафіксуємо скінченну підмножину $S \subset \mathcal{N}_0^\infty$, $0 \notin S$. *Зупиненим*, або *S-зупиненим* гіллястим процесом називається процес $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$, визначений для $t = 1, 2, \ldots$ та $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_0^\infty$ рівностями

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X), & \text{якщо } \forall v,\ 0 \leqslant v < t,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}v}(X) \notin S \\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}u}(X), & \text{якщо } \forall v,\ 0 \leqslant v < u,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}v}(X) \notin S,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}u}(X) \in S,\ u < t. \end{cases}$$

Отже, для S-зупиненого гіллястого процесу $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$, точки множини S є додатковими станами поглинання порівняно з початковим процесом $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X)$, який мав тільки одну точку поглинання 0. Тому на відміну від процесу $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X)$ в S-зупиненому гіллястому процесі $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$ окремі частинки в t-му поколінні незалежно розмножуються за ймовірнісним законом, який визначається твірною функцією $h(\cdot)$, тільки в тому випадку, коли $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X) \notin S$. Як тільки випадковий вектор $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$ потрапить у множину S, еволюція процесу припиняється.

Оскільки процес $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X)$ є ланцюгом Маркова, то

$$\widehat{P}(t_1 + t_2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{N}_0^\infty} \widehat{P}(t_1, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \widehat{P}(t_2, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}).$$

Крім того, розглянемо ймовірності $\widetilde{P}(t, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})$, які визначаються так:

$$\widetilde{P}(t, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) = \begin{cases} \widehat{P}(1, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}), & t = 1; \\ \sum_{\boldsymbol{\beta} \notin S} \widehat{P}(1, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \widetilde{P}(t-1, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}), & t \geqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Легко бачити, що $\widetilde{P}(l, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})$ – це умовна ймовірність події

$$\left\{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}l}(X) = \mathbf{r}\right\} \bigcap \left(\bigcap_{l'=1}^{l-1} \left\{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}l'}(X) \notin S\right\} \right).$$

Позначимо

$$q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) = P\left\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r}\right\}$$

– ймовірність виродження в стан $\mathbf{r} \in S$ до моменту часу t S-зупиненого гіллястого процесу $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$, що починається зі стану $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_0^\infty$.

2. Основні факти.

Теорема 1. *Для довільних $\mathbf{n} \notin S$, $\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{r} \in S$, $t \geqslant 1$ справджується рівність*

$$q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} \sum_{l=1}^{t} c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t, l) \widehat{P}(l, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}), \tag{2}$$

де коефіцієнти $c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t, l)$ знаходять із співвідношень

$$c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t+1, l+1) = c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t, l), \tag{3}$$

$$c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t+1, 1) = \delta_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}} - \sum_{l=1}^{t-1} \widetilde{P}(l, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}), \tag{4}$$

$$c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(1, 1) = \delta_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}. \tag{5}$$

Доведення. Введемо

$$\tau = \min\{t : \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}t}(X) \in S\}$$

момент першого попадання в S. Тоді при $t \geqslant l$

$$P\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r},\ \tau = l\} = P\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{n}l}(X) = \mathbf{r}\} = \widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}).$$

Застосовуючи до $\widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}),\ l \geqslant 2$, формулу (1), одержуємо

$$\widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(1, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})\widetilde{P}(l-1, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(2, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})\widetilde{P}(l-2, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) - \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} \widehat{P}(1, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})\widetilde{P}(l-1, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}).$$

Аналогічно перетворюється перша сума в правій частині цієї формули

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(2, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})\widetilde{P}(l-2, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(3, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})\widetilde{P}(l-3, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) - \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} \widehat{P}(2, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})\widetilde{P}(l-2, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}).$$

Роблячи такі самі перетворення в сумах $\sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(i, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})\widetilde{P}(l-i, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})$, отримуємо

$$\widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}) \ = \ \widehat{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}) - \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} \sum_{i=1}^{l-1} \widehat{P}(l-i, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})\widetilde{P}(i, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}), \tag{6}$$
$$l = 2, \ldots, t,\ \widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}) = \widehat{P}(1, \mathbf{n}, \mathbf{r}). \tag{7}$$

Оскільки $q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) = \sum_{l=1}^{t} \widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r})$, то з формул (6), (7) випливають відношення (3), (4), (5). Теорема доведена.

Далі розглядатимемо процес аналогічно як в [1]. Нехай

$$A_1(x, D) = \mathrm{E}\{\xi_{x1}(D)\}$$

перший факторіальний момент, де $\xi_{x1}(D)$ – така випадкова міра, яка для кожного $D \in \mathcal{A}$ дорівнює кількості частинок у момент часу 1, типи яких є в множині D, якщо в початковий момент часу була тільки одна частинка типу $x \in X$, за умови S-зупиненого процесу, тобто $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}1}(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{x_i 1}(D)$. Оскільки E лінійне, то $A_1(\mathbf{x}, D) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}1}(D)\} = \sum_{i=1}^{\infty} A_1(x_i, D)$. Варто зазначити, що D може бути вектором і множиною.

Означення 2. *Нехай* $A_1(x, D) = A(x, D)$ *та*

$$A_{n+1}(x, D) = \int_X A_n(y, D)\, dA(x, y) = \int_X A(y, D)\, dA_n(x, y).$$

Вважається, що $A_0(x, D) = 1$, *якщо* $x \in D$, *і* $A_0(x, D) = 0$ *в протилежному випадку.*

В [4] доведено, що ітерації оператора A збігаються з першими моментами ξ, якщо визначити $A(t)$ – матрицю лінійного оператора, де її елементи $A_{ij}(t) = A_t(x_i, x_j)$, то буде виконуватись $A(t) = A^t$, де $A = A(1)$.

Нехай

$$B_t(x, D_1, D_2) = \mathrm{E}\{\xi_{xt}(D_1) \cdot \xi_{xt}(D_2) - \xi_{xt}(D_1 \cap D_2)\}$$

другий факторіальний момент.

За Севастьяновим [3] всі типи частинок розбиваються на класи.

Означення 3. *Нерозкладний гіллястий процес з дискретним часом називається періодичним з періодом d, якщо найбільший дільник для всіх тих t, для яких $\langle A_t(x_i, x_i)\rangle > 0$, дорівнює d. Якщо $d = 1$, то процес називається неперіодичним.*

Означення 4. *Гіллястий процес, в якому всі типи утворюють один клас еквівалентних типів, називається нерозкладним. Всі інші процеси розкладні. Гіллястий процес – цілком розкладний, якщо множину типів можна розбити на дві непорожні замкнені підмножини.*

Означення 5. *Нерозкладний гіллястий процес з дискретним часом називається* докритичним, *якщо корінь Перрона δ матриці A менший, ніж одиниця,* надкритичним, *якщо $\delta > 1$ і* критичним, *якщо $\delta = 1$ і $f(x_i)B^i_{jk}\nu(x_j)\nu(x_k) > 0$, де B^i_{jk} – матриця оператора B, а f і ν відповідно правий і лівий власні вектори, що відповідають кореню перрона δ.*

Умова 1. *Ядро $\mathrm{E}\xi_{\mathbf{x}t}(S)$ нерозкладне, неперіодичне і докритичне.*

Згідно з умовою 1 оператор A, що визначається ядром $\mathrm{E}\{\xi_{xt}(D)\}$ в просторі вимірних функцій і в просторі мір має власну функцію $f(\cdot)$ й інварінтну міру $\nu(\cdot)$, такі, що

$$\begin{aligned}
\int_X f(y)A_t(x, dy) &= f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i)A_t(x, y_i),\\
\int_X A_t(x, Y)\nu(dx) &= \nu(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} A_t(x_i, Y)\nu(x_i).
\end{aligned}$$

Далі вважатимемо, що $0 < x_1 < f(x) < x_2 < \infty$, $\nu(X) < \infty$ та

$$\int_X f(y)\nu(dy) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i)\nu(y_i). \tag{8}$$

Оператор, породжений визначеним ядром у просторі обмежених функцій має спектральний радіус менший одиниці.

Умова 2. $\forall i, j = 1, 2, \ldots$ $\mathrm{E}\{\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{E}(j)1}(x_i)\log \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{E}(j)1}(x_i)\}$ *– скінченні.*

Умова 3. *Існує розклад $A_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_k f(x_k)\delta_k^t \nu(y_k)$.*

Оскільки в нерозкладних, неперіодичних, докритичних процесах з дискретним часом всі власні значення за модулем менші одиниці, то на підставі умови 3 можна сказати, що при $t \to \infty$

$$A_t(x_i, y_j) = f(x_i)\delta^t \nu(y_j) + o(\delta_1^t),$$

де δ – найбільше власне значення. Отже,

$$\lim_{t\to\infty} A_t(x_i, y_j)\delta^{-t} = f(x_i)\nu(y_j). \tag{9}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} R^i(t,s) &= 1 - h^i(t,s), \\ R(t,s) &= (R^1(t,s), \ldots, R^n(t,s), \ldots), \\ R(t,0) &= Q(t) = (Q^1(t), \ldots, Q^n(t), \ldots) = \lim_{s\to 0} R(t,s). \end{aligned}$$

Так як і у випадку з одним числом типів, легко доводяться нерівності [3]

$$0 \leqslant R^i(t,s) \leqslant Q^i(t) \quad \text{при} \quad 0 < |s| \leqslant 1, \tag{10}$$

$$|R^i(t,s)| \leqslant 2Q^i(t) \quad \text{при} \quad 0 < |s| \leqslant 1. \tag{11}$$

З нерівності (11) випливає, що в гіллястих процесах, які вироджуються $R^i(t,s) \to 0$ рівномірно по $0 < |s| \leqslant 1$. Накладемо такі умови на процес.

Умова 4. *$A^t > 0$ при деяких $t > 0$ в сенсі $\forall i, j$ $a_{ij} > 0$ та $h^i(t,s) \neq A_{ij}(t)$.*

Тут і надалі запис $A > 0$, де $A = \{a_{ij}\}$, означає, що $\forall i, j$ $a_{ij} > 0$, а запис $A > B$, де $A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}$ – матриці, означає, що $\forall i, j$ $a_{ij} > b_{ij}$.

Позначимо $h(s) = h(1, s)$.

Умова 5. *За введених умов для цього процесу виконується*

$$1 - h(s) = [A - E(s)](1 - s), \tag{12}$$

де матриця $E(s)$ при $0 < |s| \leqslant |s'| \leqslant 1$ задовольняє умови $0 < E(s') \leqslant E(s) \leqslant A$ і $\lim_{s\to 1} E(s) = 0$.

Теорема 2. *За умов 3-5*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R^i(t,s)}{f(x_k)R^k(t,s)} = \nu(x_i)$$

рівномірно за всіма $s \neq 1$ і $0 < |s| \leqslant 1$.

Цю теорему доводимо аналогічно до теореми 1 на стор. 192 у [3], замінюючи правий і лівий власні вектори власною функцією та інваріантною мірою відповідно. Матриці є з класу матриць нескінченно вимірного лінійного оператора.

Теорема 3. *За умов 1-5 $\forall i, j = 1, 2, \ldots$ та при $l \to \infty$*

$$1 - \widehat{P}(l, \mathcal{E}(j), 0) = K(S_j)\delta^l(1 + o(1)), \ \textit{де}\ K(S_j) > 0; \tag{13}$$

а) існує границя умовних ймовірностей

$$\lim_{t\to\infty} P\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{k} | \mathbf{n} \neq 0\} = p^*_{\mathbf{k}}, \tag{14}$$

а твірна функція $h^*(s) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{N}_0^\infty} p^*_{\mathbf{k}} s^{\mathbf{k}}$ *не залежить від* $\mathbf{n}$ *і задовольняє співвідношення*

$$1 - h^*(h(\cdot)) = \delta(1 - h^*(s)), \tag{15}$$
$$h^*(0,\ldots,0,\ldots) = 0\ , h^*(1,\ldots,1,\ldots) = 1;$$

б) розподіл $p^*_{\mathbf{k}}$ *має додатне математичне сподівання*

$$h^*_j(1) = \lim_{s\to 1} h^*_j(s) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{N}_0^\infty} k_j p^*_{\mathbf{k}},$$

де $h^*_j(s) = \frac{\partial h^*(s)}{\partial s_j}$.

Доводиться аналогічно до теореми 3 на стор. 198 у [3], з використанням теореми 2 для зображення границі твірної функції для умовного розподілу.

Накладемо ще одну умову.

Умова 6. *Нехай* $h_{ij}(s) = \frac{\partial h_i(s)}{\partial s_j}$, *тоді для будь-якого* j, $1 \leqslant j < \infty$ *існує таке* i, $1 \leqslant i < \infty$, *що* $h_{ij}(0)$ *додатні.*

На підставі рівності

$$h_{ij}(0) = \widehat{P}(0, \mathcal{E}(i), \mathcal{E}(j)) = P\{\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{E}(i)1}(X) = \mathcal{E}(j)\}$$

це означає, що відповідні ймовірності $\widehat{P}(0, \mathcal{E}(i), \mathcal{E}(j))$ додатні.

Далі нам буде потрібна ще одна лема.

Лема 1. *За умов 1-6 границі умовних ймовірностей*

$$\lim_{t\to\infty} P\{\mu_{\mathbf{n}t}(X) = \mathcal{E}(i) | n \neq 0\} = p^*_{\mathcal{E}(i)} > 0,$$

при всіх $i = 1, 2, \ldots$

Доведення. Твірна функція $h^*(s) = \sum_k p^*_k s^k$ в теоремі 3 задовольняє рівняння (15). Якщо в цьому рівнянні замінити s на $h(s)$, а потім повторити цю заміну t разів, отримаємо рівність

$$1 - h^*(h(t, s)) = \delta^t(1 - h^*(s)), \tag{16}$$

де $h(t, s)$ — t-та ітерація функції згідно з основним диференціальним рівнянням. Диференціюючи рівність (16) по s_j в точці $s = 0$, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{\infty} h^*_i(h(t, 0)) h_{ij}(t, 0) = \delta^t h^*_j(0) = \delta^t p^*_{e(j)}. \tag{17}$$

При $t \to \infty$ всі координати $h(t, 0)$ прямують до 1, тому на підставі теореми 3 знайдуться такі T і C_1, що при $t > T$ всі $h^*_i(h(t, 0)) \geqslant C_1 > 0$. З умови 6 випливає, що для $\forall\ 1 \leqslant j \leqslant \infty$ можна знайти таке i, що $h_{ij}(t, 0) > 0$, оскільки для будь-яких $i_1, i_2, \ldots, i_{t+1}$

$$h_{i_1 i_{t+1}}(t, 0) \geqslant \prod_{l=1}^{t} h_{i_1} h_{i_{l+1}}(0).$$

Тому з (17) випливає, що для $\forall 1 \leqslant j \leqslant \infty$

$$\delta^t p^*_{e(j)} \geqslant C_1 \sum_{i=1}^{t} h_{ij}(t,0) > 0,$$

що і треба було довести.

Теорема 4. *При виконанні умови 1 граничні ймовірності виродження* $q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}} = \lim\limits_{t\to\infty} q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}}(t)$, $\forall \mathbf{n} \notin S$, $\mathbf{r} \in S$ *можна подати у вигляді ряду*

$$q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in S} c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}} \widehat{P}(l,n,\boldsymbol{\alpha}), \tag{18}$$

де $c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}} = \lim\limits_{t\to\infty} c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t,l) = \delta_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}} - \sum_{u=1}^{\infty} \widetilde{P}(u,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r})$.

Доведення. Ймовірності $q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}}(t)$ зростають з ростом t і обмежуються зверху 1. Тому існують границі $q^{\mathbf{r}}_{\mathbf{n}} = \lim\limits_{t\to\infty} q^{\mathbf{r}}_{\mathbf{n}}(t)$.

У формулі (2) зліва і справа можна перейти до границі при $t \to \infty$, оскільки за будь-яких $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r} \in S$ виконується нерівність $\widetilde{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r}) \leqslant \widehat{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r})$, а з нерівності Чебишова і умови 3 випливає

$$\widehat{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r}) \leqslant P\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\boldsymbol{\alpha}l}(\mathcal{E}(j)) \geqslant 1\right\} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}\left\{\mu_{\boldsymbol{\alpha}l}(\mathcal{E}(j))\right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij}\delta^l(1+o(1)),$$

тому ряди $\sum_l \widetilde{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r})$ і $\sum_l \widehat{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r})$ сходяться. Звідси випливає (18).

Розглянемо асимптотичну поведінку $q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}}$ при $\overline{\mathbf{n}} \to \infty$.

Далі припускатимемо, що виконуються умови (1.),(2.),(3.).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови 1, 2, 3 і* $\lim_{\overline{\mathbf{n}}\to\infty}(n_i/\overline{\mathbf{n}}) = a_i$, *де* $a = (a_1, a_2, \ldots)$. *В цьому випадку при* $\overline{\mathbf{n}} \to \infty$ *для будь-якого* $\mathbf{r} \in S$

$$q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}} - H(\log_\delta \overline{\mathbf{n}}) \to 0, \tag{19}$$

де $H(x)$ *– періодична функція з періодом* 1, *яка визначається рівностями*

$$H(x) = \sum_{j=1}^{r_0} c_j H_j(x),$$
$$H_j(x) = \sum_{L=-\infty}^{\infty} \delta^{j(L+x)} e^{-(\mathbf{a},K)\delta^{L+x}},$$

де константи $c_j = c_j(\mathbf{r},\mathbf{a},p^*)$ *залежать від* $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}$ *і граничного розподілу* $p^* = \{p^*_k\}$ *визначеного в лемі 1,* $(\mathbf{a},K) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i K_i$, K_i *– в (13),* $r_0 = \max\{\overline{\mathbf{r}} = r_1 + r_2 + \ldots : \mathbf{r} \in S\}$.

Доведення. Нехай $\theta(l)=(\theta_1(l),\theta_2(l),\ldots)$ випадковий вектор, компоненти якого $\theta_i(l)$ дорівнюють числу частинок i-го типу, що дали потомство в процесі до покоління l. Тому можна записати, що для будь-яких $\boldsymbol{\alpha}\in S,\ l\geqslant 1$ і $\mathbf{n}\notin S$ маємо

$$\widehat{P}(l,\mathbf{n},\boldsymbol{\alpha})=\sum_{\{\boldsymbol{\beta}:1\leqslant\overline{\boldsymbol{\beta}}\leqslant\overline{\boldsymbol{\alpha}}\}}P\bigl\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n},l}(X)=\boldsymbol{\alpha},\ \theta(0,l)=\boldsymbol{\beta}\bigr\}=$$
$$=\sum_{\{\boldsymbol{\beta}:1\leqslant\overline{\boldsymbol{\beta}}\leqslant\overline{\boldsymbol{\alpha}}\}}P\bigl\{\theta(0,l)=\boldsymbol{\beta}\bigr\}P\{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}l}(X)=\boldsymbol{\alpha}\,|\,\theta(0,l)=\boldsymbol{\beta}\}. \tag{20}$$

В умовах теореми 5

$$P\bigl\{\theta(0,l)=\boldsymbol{\beta}\bigr\}=\prod_{i=1}^{\infty}\binom{n_i}{\beta_i}\bigl(\widehat{P}(l,\mathcal{E}(i),0)\bigr)^{n_i-\beta_i}\bigl(1-\widehat{P}(l,\mathcal{E}(i),0)\bigr)^{\beta_i}=$$
$$=\overline{\mathbf{n}}^{\overline{\boldsymbol{\beta}}}\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}}}{\boldsymbol{\beta}!}K^{\boldsymbol{\beta}}\delta^{l\overline{\boldsymbol{\beta}}}e^{-(\mathbf{a},K)\overline{\mathbf{n}}\delta^l(1+1+o(1))}\bigl(1+o(1)\bigr), \tag{21}$$

і незалежна від $\mathbf{n}$ ймовірність

$$P\bigl\{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}l}(X)=\boldsymbol{\alpha}\,|\,\theta(0,l)=\boldsymbol{\beta}\bigr\}=\sum_{\{\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}\}}\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\beta_k}P\bigl\{\boldsymbol{\mu}^{jk}_{\mathcal{E}(k),l}(X)=\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}\,|\,\mathcal{E}(k)\neq 0\bigr\}\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\sum_{\{\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}\}}\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\beta_k}p^*_{\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}}\ \text{при}\ l\to\infty, \tag{22}$$

де $\boldsymbol{\mu}^{jk}_{\mathcal{E}(k),l}(X)$ – гіллясті процеси, які мають той самий розподіл, що $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{E}(k),l}(X)$, а підсумовування в $\sum_{\{\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}\}}$ проводиться за всіма такими $\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}$, для яких $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\beta_k}\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}=$ $=\alpha$. З (20)-(22) випливає, що загальний член ряду (18) при $\overline{\mathbf{n}}\to\infty,\ l\to\infty$ можна записати у вигляді

$$(1+o(1))\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in S}\sum_{\{\boldsymbol{\beta}:1\leqslant\overline{\boldsymbol{\beta}}\leqslant\overline{\boldsymbol{\alpha}}\}}g(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\sum_{\overline{\boldsymbol{\beta}}}^{r_0}\delta^{(l+\log_\delta\overline{\mathbf{n}})\overline{\boldsymbol{\beta}}}\times$$
$$\times\exp\bigl\{-(\mathbf{a},K)\delta^{l+\log_\delta\overline{\mathbf{n}}}(1+o(1))\bigr\}, \tag{23}$$

де $g(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ незалежні від $\mathbf{n}$ і l величини. Неважко помітити також, що при $\overline{\mathbf{n}}\to\infty$ в формулі (18) кожний член ряду з будь-яким $l\geqslant 1$ прямує до нуля.
Виберемо $L_1<L_2$ так, щоб суми

$$\sum_{L=L_2}^{\infty}\delta^{\overline{\boldsymbol{\beta}}L}e^{-(\mathbf{a},K)\delta^L}\ \text{та}\ \sum_{L=-\infty}^{L_2}\delta^{\overline{\boldsymbol{\beta}}L}e^{-(\mathbf{a},K)\delta^L} \tag{24}$$

були малі. Приймемо $l_i+\log_\delta\overline{\mathbf{n}}=L_i+x_{i\overline{\mathbf{n}}},\ i=1,2$, де $0\leqslant x_{i\overline{\mathbf{n}}}\leqslant 1$. З (23) та (24) випливає, що можна вибрати такі L_1, L_2 і n_0, щоб хвости суми в формулі (18) у межах від 1 до l_1 і від l_2 до нескінченності були менші $\varepsilon/2$, де $\varepsilon > 0$ довільно мале. Члени ряду (18) з $l_1 < l < l_2$ можна замінити граничними виразами (23), оскільки при $\overline{\mathbf{n}} \to \infty$ такі $l \to \infty$. Всього доданків у сумі $\sum_{l=l_1+1}^{l_2-1}$ в формулі (18) скінченне число $l_2 - l_1 - 1 = L_2 - L_1 - 1$, тому n_0 можна вибрати таким, щоб для всіх $\mathbf{n} > n_0$ помилка апроксимації також була менше $\varepsilon/2$. Звідси випливає твердження теореми, оскільки $\varepsilon > 0$ довільне.

З доведення теореми не видно, чи будуть в формулі (19) коефіцієнти c_j такі, що функція $H(x) > 0$. Для цього доведемо таку лему.

Лема 2. *При виконанні умов 1-6 існує така константа* $\Theta > 0$, *що при деякому числі* n_0 *для всіх* $\mathbf{n}$ *з* $\overline{\mathbf{n}} \geqslant n_0$ *і всіх* $\mathbf{r} \in S$

$$q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}} > \Theta.$$

Доведення. Позаяк за будь-якого t $q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}} = \lim_{t\to\infty} q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) \geqslant q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t)$, то нам достатньо довести, що нерівність $q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) \geqslant \Theta > 0$ виконується за будь-яких достатньо великих t для всіх $\mathbf{r} \in S$ і $\mathbf{n}$ з $\overline{\mathbf{n}} \geqslant n_0$. Скористаємося введеним випадковим вектором $\theta(0,t)$ і введемо ще один випадковий вектор $\theta'_i(t-1) = (\theta'_1(t-1), \theta'_2(t-1), \ldots)$, де $\theta'_i(t-1)$ дорівнюють числу початкових частинок i-го типу, потомство яких непорожнє в $(t-1)$-му поколінні, але порожнє в t-му поколінні. При $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots)$, $n_1 \geqslant r_0 + 1$, де $r_0 = \max_{\mathbf{r}\in S} \overline{\mathbf{r}}$, використаємо нерівність

$$q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) = P\big\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r}\big\} \geqslant P\big\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r},\ \theta'(t-1) = (r_0+1-\overline{\mathbf{r}}),\ \theta(0,t) = \overline{\mathbf{r}}\mathcal{E}(1)\big\}. \quad (25)$$

Праву частину (25) можна записати як добуток $\mathcal{P}_1(\mathbf{n},t)\mathcal{P}_2(t)$, де $\mathcal{P}_1(\mathbf{n},t) = P\big\{\theta'(t-1) = (r_0+1-\overline{\mathbf{r}})\mathcal{E}(1),\ \theta(0,t) = \overline{\mathbf{r}}\mathcal{E}(1)\big\}$ залежить від $\mathbf{n}$ і t, а $\mathcal{P}_2(t) = P\big\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r} \,|\, \theta'(t-1) = (r_0+1-\overline{\mathbf{r}})\mathcal{E}(1),\ \theta(0,t) = \overline{\mathbf{r}}\mathcal{E}(1)\big\}$ залежить тільки від t. З означення випадкових векторів $\theta(0,t)$ та $\theta'(t-1)$ випливає, що

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(\mathbf{n},t) &= \frac{n_1!}{(n_1-r_0-1)!(r_0+1-\overline{\mathbf{r}})!\overline{\mathbf{r}}}\big[\widehat{P}(t-1,\mathcal{E}(1),0)\big]^{n_1-r_0-1} \times \\
&\times \big(1-\widehat{P}(t-1,\mathcal{E}(1),0)\big)^{r_0+1-\overline{\mathbf{r}}}\big(1-\widehat{P}(t-1,\mathcal{E}(1),0)\big)^{\overline{\mathbf{r}}} \times \\
&\times \prod_{i=1}^{\infty}[\widehat{P}(1,\mathcal{E}(1),0)^{n_i}]P\big\{\boldsymbol{\mu}'_{r_0+1-\overline{\mathbf{r}}\,t}(X) = 0 \,|\, r_0+1-\overline{\mathbf{r}} \neq 0\big\}; \qquad (26)\\
\mathcal{P}_2(t) &= \prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{r_k} P\big\{\boldsymbol{\mu}^{(jk)}_{\mathcal{E}(1)t}(X) = \mathcal{E}(k) \,|\, \mathcal{E}(k) \neq 0\big\}. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Тут $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu}'$, $\boldsymbol{\mu}^{(jk)}$ – гіллясті процеси, еволюція яких визначається твірною функцією $h(s) = (h_1(s), h_2(s), \ldots)$. Вибираючи далі $t \to \infty$ так, щоб $\overline{\mathbf{n}}\delta^t \to V > 0$ при $\overline{\mathbf{n}} \to \infty$, отримуємо в правій частині рівності (26) додатну константу, помножену на умовну ймовірність, що стоїть у кінці формули. З допомогою граничного відношення $P\big\{\boldsymbol{\mu}'_t(X) = \mathbf{k} \,|\, \mathbf{k} \neq 0\big\} \to p^*_{\mathbf{k}}$, теореми 3 і рівності

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{N}_0^\infty} p^*_{\mathbf{k}}\big(\widehat{P}^{k_1}(1,\mathcal{E}(1),0)\widehat{P}^{k_2}(1,\mathcal{E}(2),0)\cdots\big) = h^*(h(0))$$

отримуємо, що ця умовна ймовірність у границі дорівнює $h^*(h(0))$. Вираз (27) не залежить від $\mathbf{n}$ і при $t \to \infty$ дорівнює добутку $\prod_{i=1}^{\infty}[p^*_{\mathcal{E}(i)}]^{r_i}$. Згідно з лемою 1 цей добуток додатний, що й завершує доведення.

---

1. *Єлейко Я.І.* Асимптотичний аналіз і перехідні явища в матричнозначних випадкових еволюціях, гіллясті процеси та процеси марківського втручання випадку: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1994.
2. *Севастьянов Б.А.* Асимптотическое поведение вероятностей вырождения остановленных ветвящихся процессов // Теория вер. и ее прил. – Т. 43, 1998. – С. 315-322.
3. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. – М., 1971.
4. *Харрис Т.* Теория ветвящихся процессов. – М., 1966.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE S-STOPPED BRANCHING PROCESSES WITH COUNTABLE STATE SPACE

Yaroslav YELEJKO, Iryna KYRYCHYNSKA, Ostap OKHRIN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: wild@mail.lviv.ua

The origin process with counted quantity of types $\mu(t)$ generates branching process $\xi(t)$, if in case of getting the initial processes into some nonempty set S process stops. We suppose that the first processes precritical, undecomposable, nonperiodical. It's proved that probability of degeneration convergss to periodical function with period 1.

Key words: branching processes, probability of degeneration, asymptotic behavior.

Стаття надійшла до редколегії 19.10.2006

Прийнята до друку 24.10.2007