ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ — VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2007. Вип. 67. С. 59–65 — Ser. Mech-Math. 2007. Vol. 67. P. 59–65

УДК 539.3

ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРШОГО РОДУ В ДЕЯКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Григорій ГАБРУСЄВ

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя, 46001, Тернопіль, вул. Руська, 56

Отримано зображення наближеного розв'язку рівняння Фредгольма першого роду у вигляді полінома за ортогональними функціями. Проаналізовано можливість застосування варіаційної задачі з нерухомими кінцями та задачі поточкового зведення розв'язку до системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів полінома. Одержано умову для вибору оптимальної кількості членів полінома-розв'язку.

Ключові слова: рівняння Фредгольма першого роду, регуляризація, контактна задача, контактні напруження, розподіл напружень.

Як відомо, задача відшукання розв'язку рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b y\,(t)\,K\,(t,r)\,dt = f\,(r)\,, \quad a \le r \le b, \tag{1}$$

де ядро $K\,(t,r) \in L_2$ та права частина $f\,(r) \in L_2$ – відомі функції, у зв'язку з порушенням другої умови означення [1], некоректно сформульована. Навіть дуже малі збурення правої частини $f\,(r)$, ядра $K\,(t,r)$ чи методу розв'язання можуть призвести до великих похибок у побудованому розв'язку.

До середини минулого століття розгляд некоректно сформульованих задач вважався недоцільним і лише з публікаціями А.Н. Тихонова [1, 2] та М.М. Лаврентьєва [3] розпочався період розробки регуляризуючих алгоритмів. Побудові таких алгоритмів присвячені також праці львівських математиків [4, 5]. Мета нашої праці – розглянути випадки, коли наближений розв'язок задачі (1) цілком задовольняє потреби практики.

1. Метод регуляризації нульового порядку Тихонова. Запишемо (1) у вигляді операторного рівняння першого роду

$$Ay = f, \quad y, f \in L_2.$$

Нехай δ – похибка задання f, f^* – точна права частина, y_β – наближений, а y – точний розв'язки операторного рівняння. Оператор $R(f,\beta)$, залежний від параметра регуляризації β, називається *регуляризуючим* для заданого рівняння в околі $f^*(r)$, якщо:

1) $R(f,\beta)$ визначений для довільних $f \in L_2$ та $\beta > 0$;
2) існує така функція $\beta = \beta(\delta)$, що для $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta(\varepsilon)$ таке, що у випадку $\|f(r) - f^*(r)\| \le \delta(\varepsilon)$ виконуватиметься $\|y_\beta(r) - y(r)\| \le \varepsilon$, де $y_\beta(r) = R(f, \beta(\delta))$.

Залежність $\beta(\delta)$ повинна бути такою, щоб при $\delta \to 0$ також $\beta \to 0$, тобто наближений розв'язок повинен переходити у точний.

У методі регуляризації нульового порядку Тихонова вводиться згладжуючий функціонал

$$M^\beta[y_\beta] = \|Ay_\beta - f\|^2_{L_2} + \beta\|y_\beta\|^2_{L_2},$$

мінімізація якого і дає шуканий оператор $R(f,\beta)$ [2].

Розв'язок задачі (1) будуємо в просторі L_2 із нормою $\|y(t)\|^2 = \int_a^b y^2(t)\,dt$. Звідки одержимо

$$M^\beta[y_\beta] = \int_a^b \left[\int_a^b y_\beta(t)\,K(t,r)\,dt - f(r)\right]^2 dr + \beta\int_a^b y_\beta^2(t)\,dt. \tag{2}$$

Будемо шукати $y_\beta(t)$ у вигляді узагальненого ряду Фур'є за ортогональними функціями $\varphi_n(t) = \sqrt{t}\cdot L(t,\gamma_n)$, тобто $y_\beta(t) = \sqrt{t}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n L(t,\gamma_n)$, де

$$L(t,\gamma_n) = N_0(\gamma_n)\,J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right) - J_0(\gamma_n)\,N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right).$$

Тут J_0 та N_0 – функції Бесселя першого та другого роду, а γ_n – додатні корені рівняння $N_0(z)\,J_0\left(\frac{b}{a}z\right) - J_0(z)\,N_0\left(\frac{b}{a}z\right) = 0$.

Запишемо наближений розв'язок, що відповідає параметру β, як поліном

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_\beta(t) = \sqrt{t}\sum_{n=1}^{N} a_n L(r,\gamma_n). \tag{3}$$

Враховуючи (3), вираз (2) подамо у вигляді

$$M^\beta[y_\beta] = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{N} a_n K_n(r) - f(r)\right]^2 dr + \beta\int_a^b t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n L(t,\gamma_n)\right)^2 dt,$$

де $K_n(r) = \int_a^b \sqrt{t}L(t,\gamma_n)\,K(t,r)dt$.

Шукаючи a_n, де $n = \overline{1,N}$, з умови мінімізації функціонала $M^\beta[y_\beta]$, тобто $\frac{\partial M}{\partial a_n} = 0$ (варіаційна задача з нерухомими кінцями), матимемо

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{N} a_n K_n(r) - f(r)\right] K_q(r)\,dr + \beta\int_a^b t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n L(t,\gamma_n)\right) L(t,\gamma_q)\,dt = 0. \tag{4}$$

У практичних застосуваннях функції $K_n(r)$ та $f(r)$ перетворюються в нуль при $r = a$ та $r = b$ і є кусково-неперервними на проміжку $a \le r \le b$. Тому кожну з них можна подати у вигляді суми узагальненого ряду Фур'є за функціями $\varphi_j(r)$.

Замінимо згадані ряди N-частинними сумами

$$K_n(r) = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} c_j^{(n)} L(r,\gamma_j), \quad f(r) = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} b_j L(r,\gamma_j). \tag{5}$$

Враховуючи ортогональність системи функцій $\sqrt{r}\cdot L(r,\gamma_j)$, знайдемо

$$\begin{aligned} c_q^{(n)} &= \tfrac{1}{M_q}\int_a^b \sqrt{r}K_n(r) L(r,\gamma_q)\,dr,\\ b_q &= \tfrac{1}{M_q}\int_a^b \sqrt{r} f(r) L(r,\gamma_q)\,dr,\\ M_q = \int_a^b rL^2(r,\gamma_q)\,dr &= \tfrac{b^2}{2}\tfrac{1}{\left(\frac{b}{a}\gamma_q\right)^2}\left[R^2\left(\tfrac{b}{a}\gamma_q\right) - \tfrac{4}{\pi^2}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Підставивши (5) та (6) у (4), одержимо

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{N} a_n\sqrt{r}\left(\sum_{j=1}^{N} c_j^{(n)} L(r,\gamma_j)\right) - f(r)\right]\sqrt{r}\left(\sum_{s=1}^{N} c_s^{(q)} L(t,\gamma_s)\right)dr +$$
$$+\beta\int_a^b t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n L(t,\gamma_n)\right) L(t,\gamma_q)\,dt = 0.$$

Проінтегрувавши по r на проміжку $[a,b]$, матимемо

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} a_n\left[\sum_{s=1}^{N} c_s^{(n)} c_s^{(q)} M_s + \beta\begin{pmatrix} M_n, & n = q\\ 0, & n \ne q\end{pmatrix}\right] =\\ &= \sum_{n=1}^{N} c_j^{(q)}\int_a^b \sqrt{r} f(r) L(r,\gamma_j)\,dr, \quad q = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{7}$$

Параметр регуляризації β шукатимемо згідно з принципом узагальненої нев'язки [2] як нуль функції $p(\beta) = \|Ay_\beta - f\|^2 - (\delta + h\|y_\beta\|)^2$, де h – точність задання оператора A. Задана функція після зображення y_β через коефіцієнти a_n набуде такого вигляду:

$$p(\beta) = (1-h)^2\beta^2\sum_{n=1}^{N} a_n M_n - \delta^2.$$

Величину N, кількість членів полінома (3), а отже, і кількість рівнянь у системі (7), вибираємо з тієї умови, щоб відносна похибка виконання рівності (1) $\gamma(N,\beta)$ не перевищувала заданої γ_0

$$\gamma(N,\beta) = \max_{r\in[a,b]}\frac{1}{f^*(r)}\left(\int_a^b y_\beta(t) K(t,r)\,dt - f^*(r)\right)\cdot 100 < \gamma_0.$$

У розгорнутому вигляді, з врахуванням (3)

$$\max_{r\in[a,b]} \frac{1}{f^*(r)} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \int_a^b \sqrt{t} L(t,\gamma_n) K(t,r)\, dt - f^*(r) \right) \cdot 100 < \gamma_0. \tag{8}$$

2. Метод поточкового одержання системи алгебричних рівнянь. Ще одним підходом до побудови наближеного розв'язку задачі (1) є метод поточкового одержання системи алгебричних рівнянь. Вибираючи $\tilde{y}(t)$ у вигляді (3), рівняння (1) зведемо до співвідношення

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \int_a^b \sqrt{t} L(t,\gamma_n) K(t,r)\, dt = f(r), \quad a \le r \le b.$$

Вимагаючи виконання цієї умови в N точках проміжку $a \le r \le b$, одержимо систему N рівнянь із N невідомими a_n

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \int_a^b \sqrt{t} L(t,\gamma_n) K(t,r_i)\, dt = f(r_i), \quad i = \overline{1,N}.$$

Величину N вибиратимемо як і в попередньому випадку, а саме, вимагаючи, щоб відносна похибка виконання (1) не перевищувала заданої (a_n при $n = \overline{1,N}$ повинні задовольняти (8)).

3. Числовий приклад. Як числові приклади розглянемо запропоновані методи для побудови наближених функцій розподілу контактних напружень при взаємодії жорсткого кільцевого штампа з трансверсально ізотропним шаром.

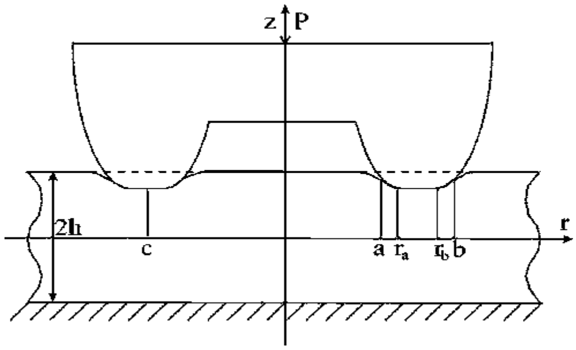

Рис. 1. Схема контактної взаємодії штампа із шаром

У [6] задана задача зводиться до розв'язання рівняння Фредгольма першого роду (1), де $y(t) = \sqrt{t} \cdot x(t)$ – шукана функція, $x(t)$ – функція, через яку описується розподіл контактних напружень під штампом, а також

$$K(t,r) = \sqrt{t} \int_0^\infty F(\alpha) \left\{ \begin{array}{c} J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha) \end{array} \right\} J_0(t\alpha)\, d\alpha, \quad \left\{ \begin{array}{c} a \le r < c \\ c \le r \le b \end{array} \right\},$$

$$F(\alpha) = \frac{\left(1 - e^{-4\mu_1 h\alpha}\right)\left(1 - e^{-4\mu_3 h\alpha}\right)}{\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha)},$$

$$\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha) = 2\mu_3\left(1 - e^{-4\mu_3\alpha}\right)\left(1 + e^{-4\mu_1\alpha}\right) - 2\mu_1\left(1 - e^{-4\mu_1\alpha}\right)\left(1 + e^{-4\mu_3\alpha}\right),$$

$$f(r) = B^{(1)}(r) = \begin{cases} (a - r_a)^2 - (r - r_a)^2, & a \le r \le r_a; \\ (a - r_a)^2, & r_a \le r < c; \\ 0, & c \le r \le b, \end{cases}$$

або

$$f(r) = B^{(2)}(r) = \begin{cases} 0, & a \le r < c; \\ (b - r_b)^2, & c \le r < r_b; \\ (b - r_b)^2 - (r - r_b)^2, & r_b \le r \le b. \end{cases}$$

Реалізуючи метод регуляризації нульового порядку Тихонова, прийдемо до двох систем вигляду (7) для відшукання $a_n^{(1)}$ та $a_n^{(2)}$ $\quad n = \overline{1, N}$, де $c_q^{(n)}$, b_q та M_q обчислюють за співвідношеннями (6), в яких $f(r) = B^{(1)}(r)$ для відшукання $a_n^{(1)}$ та $f(r) = B^{(2)}(r)$ для відшукання $a_n^{(2)}$. Розв'язавши ці системи й одержимо наближення шуканої функції $x(r)$

$$\tilde{x}(r) = \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^{(1)} z_1 + a_n^{(2)} z_2\right) L(r, \gamma_n),$$

через яку виражається функція контактних напружень $\sigma_{zz}(r) = \frac{P}{2\pi a^2}\tilde{x}(r)$. Задамо $\gamma_0 = 4\%$ і перевіримо для $N_1 = 11$ та $N_2 = 21$ виконання умови (8) при $f^*(r) = z_1 B^{(1)}(r) + z_2 B^{(2)}(r)$, $\quad z_i = \frac{1}{R_i}$, $\quad i = 1, 2$, де R_i – радіуси кривизни парабол, обертанням яких утворено штамп.

У результаті перевірки для випадків:

$$\begin{array}{ll} 1) & a = 0.4,\ b = 1.0,\ r_a = r_b = 0.7; \\ 2) & a = 0.4,\ b = 1.0,\ r_a = 0.55,\ r_b = 0.85 \end{array} \tag{9}$$

відповідно, одержимо

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(11) = 7.2\%, & \gamma_2(11) = 10.2\%; \\ \gamma_1(21) = 2.3\%, & \gamma_2(21) = 3.0\%. \end{array}$$

Отже, випадок $N = 21$ задовольняє умову (8). Для побудови наближень функцій розподілу контактних напружень достатньо вибрати $N = 21$. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ у наведених випадках зображено на рис. 2, 3.

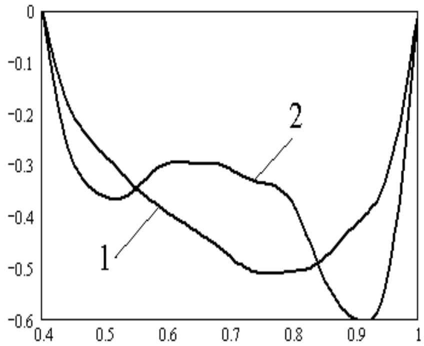

Рис. 2. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків 1 та 2 при $N = 11$

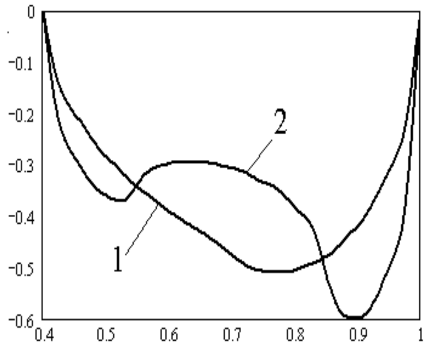

Рис. 3. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків 1 та 2 при $N = 21$

Проаналізуємо з погляду визначення відносної похибки виконання рівності (1) методику поточкового зведення рівняння Фредгольма першого роду до системи алгебричних рівнянь.

Вибравши $N_1 = 11$ та $N_2 = 21$ для розглянутих значень геометричних параметрів (9) відповідно отримаємо

$$\gamma_1(11) = 8.6\%, \qquad \gamma_2(11) = 11.9\%;$$
$$\gamma_1(21) = 2.9\%, \qquad \gamma_2(21) = 3.8\%.$$

Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для цих випадків показано на рис. 4, 5.

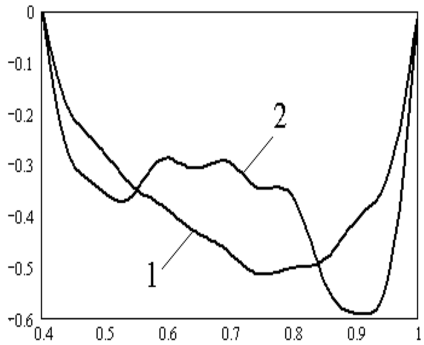

Рис. 4. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків 1 та 2 при $N = 11$

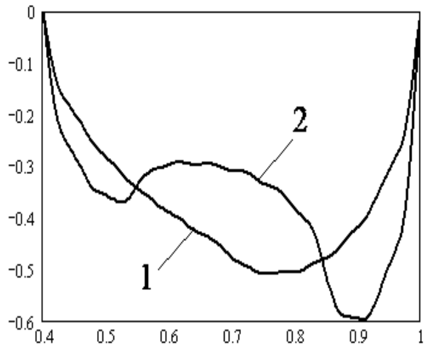

Рис. 5. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків 1 та 2 при $N = 21$

Отже, запропонований підхід до побудови наближеного розв'язку задачі (1) при $N = 21$ цілком задовольняє практичні потреби.

Зазначимо, що методика поточкового зведення (1) до СЛАР не регуляризує задачу побудови наближеного розв'язку рівняння Фредгольма першого роду. Проте вона дає змогу провести оптимальний вибір кількості членів полінома, а отже, і кількості рівнянь СЛАР. Зауважимо лише, що застосування методу Тихонова дає більш згладжене наближення розв'язку (1), ніж у випадку поточкової побудови СЛАР, що і забезпечує меншу відносну похибку наближення розв'язку цим методом.

---

1. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач. – ДАН СССР. – 1963. – Т. 153, №1. – С. 49-52.
2. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М., 1990.
3. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск, 1962.
4. *Сявавко М.С., Пасечник Т.В., Рыбыцкая О.М.* Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Электрон. моделирование. – 1995. – 17, №1. – С. 10-16.
5. *Герасимчук О.Б., Рибицька О.М.* Нормальний розв'язок інтегрального рівняння першого роду із слабкою особливістю // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, №2. – С. 43-52.
6. *Габрусєв Г.В.* Осесиметрична контактна задача термопружності про тиск кільцевого штампа на трансверсально ізотропний шар // Вісник Тернопільського державного технічного університету – 2005. – Т. 10, № 1.

CONSTRUCTION OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE FIRST KIND FRENDHOLM-TYPE EQUATION IN SOME CONTACT TASKS OF THE ELASTIC THEORY

Hryhorii HABRUSIEV

Ivan Puliuy State Technical University of Ternopil,
46001, Ternopil, Rus'ka Str., 56

Representations of the approximate solution of the first kind Frendholm-type equation in the form of a polynom on orthogonal functions are carried out. The opportunity of application of a variational task with the motionless ends and task of pointwise transition to system of the linear algebraic equations for determination a polynom's coefficients are analysed. The condition for a choice of optimum quantity of members of a polynom is received.

Key words: the first kind Frendholm-type equation, regularization, contact task, contact stresses, stress distribution.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.2006

Прийнята до друку 24.10.2007