

УДК 517.53

ГОЛОМОРФНІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО λ -ТИПУ В ПІВСМУЗІ

Андрій БРИДУН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1,
e-mail: a_brydun@franko.lviv.ua, a_brydun@yahoo.com

Доведено критерій скінченності λ -типу голоморфних у півсмузі функцій.

Ключові слова: голоморфна функція, мероморфна функція, характеристика Неванлінни, функція скінченного λ -типу.

1. Формулювання основної теореми та допоміжних тверджень. У 60-х роках минулого століття Л. Рубел і Б. Тейлор [1] розробили метод рядів Фур'є, який допоміг отримати вичерпний опис нулів і полюсів мероморфних функцій f з доволі загальних класів Λ , які визначають довільними додатними, неспадними, необмеженими та неперервними мажорантами λ їхніх неванліннівських характеристик. Такі класи вони назвали класами функцій скінченного λ -типу.

К. Г. Малютін визначив критерій належності функції до класу аналітичних у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$ функцій скінченного λ -типу в термінах \sin -коефіцієнтів Фур'є функції $\log |f|$. Ці коефіцієнти Фур'є виражають через нулі функції f та її граничні значення на межі \mathbb{C}_+ і одержують з класичної формули Карлемана.

Ми визначаємо критерій скінченності λ -типу голоморфних у півсмузі функцій за інших умов на межі.

Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги $R = \{z = x + iy : x > x_0, 0 < y < \pi\}$, $\{\rho_q\}$ – послідовність нулів функції f в R , занумерованих у порядку зростання їхніх дійсних частин, $\rho_q = \beta_q + i\gamma_q$; $\{\omega_p\}$ – послідовність полюсів функції f в R , занумерованих відповідно, $\omega_p = \xi_p + i\eta_p$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R .

Нехай $f(x_0) \neq 0, \infty$, і значення $\log f(x_0)$ вибране. В замиканні R з розрізами $\{t\beta_q + i\gamma_q : t \geq 1\}$ та $\{t\xi_q + i\eta_q : t \geq 1\}$ прийmemo

$$\log f(z) = \log f(x_0) + \int_{x_0}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

а також $\arg f(z) = \text{Im} \log f(z)$.

Характеристику $S(x; x_0, f)$, яку ми ввели в [2], аналогічно до [3, с. 37–40], будемо називати *характеристикою Неванліни для півсмузи*

$$S(x; x_0, f) = A(x; x_0, f) + B(x; x_0, f) + C(x; x_0, f),$$

де

$$C(x; x_0, f) = 2 \sum_{\omega_p \in R_x} \sin \eta_p \left(\frac{1}{e^{\xi_p}} - \frac{e^{\xi_p}}{e^{2x}} \right),$$

$$A(x; x_0, f) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^x (\log^+ |f(t)| + \log^+ |f(t + i\pi)|) \left(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}} \right) dt,$$

$$B(x; x_0, f) = \frac{2}{\pi e^x} \int_0^\pi \log^+ |f(x + iy)| \sin y dy,$$

$$R_x = \{z = t + iy : x_0 < t < x, 0 < y < \pi\}.$$

Означення 1. Додатна, неперервна, зростаюча і необмежена на $[x_0, +\infty)$ функція $\lambda(x)$ називається *функцією зростання*.

Означення 2. Функція f , мероморфна в замиканні півсмузи R , називається *функцією скінченного λ -типу в R* , якщо існують сталі $a, b > 0$ такі, що для всіх $x > x_0$ виконується

- 1) $S(x; x_0, f) \leq a \lambda(x + b)$;
- 2) $\int_{x_0}^x \frac{|\log |f(t)|| + |\log |f(t + i\pi)||}{e^t} dt \leq a \lambda(x + b)$.

Клас таких функцій позначимо через \mathcal{F}_λ .

Нехай $c_k(x, f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log |f(x + iy)| \sin ky dy$, $k \in \mathbb{N}$, *sin-коєфіцієнти Фур'є* функції $\log |f(x + iy)|$ як функції від y .

Теорема 1. Нехай λ – функція зростання і нехай f голоморфна в замиканні півсмузи R функція. Тоді такі твердження еквівалентні:

- а) $f \in \mathcal{F}_\lambda$;
- б) виконується умова 2) та існують сталі $a, b > 0$ такі, що для всіх $x > x_0$ та $k \in \mathbb{N}$ виконується $|c_k(x, f)| \leq a e^x \lambda(x + b)$.

Для доведення теореми 1 ми використаємо такі леми.

Лема 1. Якщо $\{z_j : z_j = x_j + iy_j\}$ – скінченна множина в R_x , тоді

$$\int_{x_0}^x \sum_{z_j \in R_t} \frac{e^{kx_j}}{e^{kt}} \sin ky_j dt = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \sin ky_j - \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \frac{e^{kx_j}}{e^{kx}} \sin ky_j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x, \quad (1)$$

$$\int_{x_0}^x \sum_{z_j \in R_t} \frac{e^{kt}}{e^{kx_j}} \sin ky_j dt = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \frac{e^{kx}}{e^{kx_j}} \sin ky_j - \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \sin ky_j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x. \quad (2)$$

Лема 2. Нехай голоморфна в замиканні півсмуги $R = \{z = x + iy : x > x_0, 0 < y < \pi\}$, функція f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R і $f(x_0) \neq 0, \infty$. Правильні такі співвідношення:

$$\begin{aligned} c_k(x, f) &= \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^x \left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) (\log |f(t)| + (-1)^{k+1} \log |f(t + i\pi)|) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} + \frac{e^{kx}}{e^{kx_0}} \right) \int_0^\pi \log |f(x_0 + iy)| \sin ky dy + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^x} - \frac{e^{kx}}{e^{x_0}} \right) \int_0^\pi \arg f(x_0 + iy) \cos ky dy, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x. \end{aligned} \quad (3)$$

Лема 3. Нехай $\{\rho_q\}$ – нулі голоморфної функції скінченного λ -типу в замиканні R_{x+1} . Тоді

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \sin \gamma_q \leq ae^x \lambda(x + b),$$

для деяких $a, b > 0$ і для всіх $x > x_0$.

2. Доведення допоміжних тверджень.

Доведення лема 1. Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \sum_{z_j \in R_t} \frac{e^{kx_j}}{e^{kt}} \sin ky_j dt &= -\frac{1}{k} \int_{x_0}^x \sum_{z_j \in R_t} e^{kx_j} \sin ky_j d(e^{-kt}) = \\ &= -\frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \frac{e^{kx_j}}{e^{kx}} \sin ky_j + \frac{1}{k} \int_{x_0}^x e^{-kt} d \left(\sum_{z_j \in R_t} e^{kx_j} \sin ky_j \right). \end{aligned}$$

Функція $\psi(t) = \sum_{z_j \in R_t} e^{kx_j} \sin ky_j$ має стрибки $e^{kx_j} \sin ky_j$ в точках $t_j = e^{x_j}$. Отже, останній інтеграл можна записати у вигляді

$$\frac{1}{k} \int_{x_0}^x t^{-k} d\psi(t) = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} e^{-kx_j} e^{kx_j} \sin ky_j = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \sin ky_j.$$

Аналогічно, отримаємо співвідношення (2). Лему 1 доведено.

Доведення лема 2. Нехай функція f голоморфна в замиканні R і не має нулів на ∂R_t . Застосуємо теорему про лишки до функції $f'(z)/f(z) e^{-kz}$ в R_t

$$\int_{\partial R_t} \frac{f'(z)}{f(z)} e^{-kz} dz = 2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (4)$$

Оскільки ∂R_t складається з чотирьох відрізків, тоді (4) запишемо так:

$$2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q} = \int_{x_0}^t e^{-k\tau} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau + ie^{-kt} \int_0^\pi e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)} dy +$$

$$+ (-1)^{k+1} \int_{x_0}^t e^{-k\tau} \frac{f'(\tau+i\pi)}{f(\tau+i\pi)} d\tau - ie^{-kx_0} \int_0^\pi e^{-iky} \frac{f'(x_0+iy)}{f(x_0+iy)} dy, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (5)$$

Інтегруючи частинами в першому інтегралі правого боку (5), маємо

$$\int_{x_0}^t e^{-k\tau} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = e^{-kt} \log f(t) - e^{-kx_0} \log f(x_0) + k \int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau) d\tau, \quad (6)$$

$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Роблячи те саме в третьому інтегралі, одержуємо

$$\int_{x_0}^t e^{-k\tau} \frac{f'(\tau+i\pi)}{f(\tau+i\pi)} d\tau = e^{-kt} \log f(t+i\pi) - e^{-kx_0} \log f(x_0+i\pi) +$$

$$+ k \int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi) d\tau, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (7)$$

Далі

$$i \int_0^\pi e^{-iky} \frac{f'(x_0+iy)}{f(x_0+iy)} dy = \int_0^\pi e^{-iky} d \log f(x_0+iy) = (-1)^k \log f(x_0+i\pi) -$$

$$- \log f(x_0) + ik \int_0^\pi e^{-iky} \log f(x_0+iy) dy, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (8)$$

З урахуванням (6)–(8) співвідношення (5) набуде вигляду

$$2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q} = e^{-kt} \log f(t) + k \int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau) d\tau +$$

$$+ ie^{-kt} \int_0^\pi e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)} dy + (-1)^{k+1} e^{-kt} \log f(t+i\pi) +$$

$$+ (-1)^{k+1} k \int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi) d\tau - ik e^{-kx_0} \int_0^\pi e^{-iky} \log f(x_0+iy) dy, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (9)$$

Рівність (4), а отже і (9), правильні при $t \in (x_0; x)$ за винятком $t = \operatorname{Re} \rho_q$. Домножимо (9) на e^{kt} і проінтегруємо по t від x_0 до x . Одержимо

$$\begin{aligned}
& 2\pi i \int_{x_0}^x e^{kt} \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q} dt = \int_{x_0}^x \log f(t) dt + \\
& + k \int_{x_0}^x e^{kt} \left(\int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau) d\tau \right) dt + \int_{x_0}^x \left(i \int_0^\pi e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)} dy \right) dt + \\
& + (-1)^{k+1} \int_{x_0}^x \log f(t+i\pi) dt + (-1)^{k+1} k \int_{x_0}^x e^{kt} \left(\int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi) d\tau \right) dt + \\
& + i \int_0^\pi e^{-iky} \log f(x_0+iy) dy - ie^{k(x-x_0)} \int_0^\pi e^{-iky} \log f(x_0+iy) dy, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Інтегрування частинами в другому інтегралі правого боку (10) дає

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^x e^{kt} \left(\int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau) d\tau \right) dt = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau) d\tau \right) de^{kt} = \\
& = \frac{e^{kx}}{k} \int_{x_0}^x e^{-kt} \log f(t) dt - \frac{1}{k} \int_{x_0}^x \log f(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^x e^{kt} \left(\int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi) d\tau \right) dt = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^t e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi) d\tau \right) de^{kt} = \\
& = \frac{e^{kx}}{k} \int_{x_0}^x e^{-kt} \log f(t+i\pi) dt - \frac{1}{k} \int_{x_0}^x \log f(t+i\pi) dt, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Застосувавши теорему Фубіні до третього доданка правого боку (10), маємо

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^x \left(i \int_0^\pi e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)} dy \right) dt = i \int_0^\pi e^{-iky} \left(\int_{x_0}^x \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)} dt \right) dy = \\
& = i \int_0^\pi e^{-iky} (\log f(x+iy) - \log(x_0+iy)) dy, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Враховуючи (11)–(13), співвідношення (10) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-iky} \log f(x+iy) dy &= \int_{x_0}^x e^{kt} \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q} dt + \\ &+ \frac{ie^{kx}}{2\pi} \int_{x_0}^x e^{-kt} (\log f(t) + (-1)^{k+1} \log f(t+i\pi)) dt + \\ &+ \frac{e^{k(x-x_0)}}{2\pi} \int_0^\pi e^{-iky} \log f(x_0+iy) dy, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Позначимо

$$l_k(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-iky} \log f(x+iy) dy, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Безпосередні підрахунки засвідчують, що

$$c_k(x, f) = -\operatorname{Im} \frac{l_k(x, f) + \overline{l_{-k}(x, f)}}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Враховуючи (2) та (15), одержимо

$$\begin{aligned} c_k(x, f) &= 2 \int_{x_0}^x \sum_{\rho_q \in R_t} \left(\frac{e^{k\beta_q}}{e^{kt}} + \frac{e^{kt}}{e^{k\beta_q}} \right) \sin k\gamma_q dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^x \left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) (\log |f(t)| + (-1)^{k+1} \log |f(t+i\pi)|) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} + \frac{e^{kx}}{e^{kx_0}} \right) \int_0^\pi \log |f(x_0+iy)| \sin ky dy + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kx_0}} \right) \int_0^\pi \arg f(x_0+iy) \cos ky dy, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x. \end{aligned} \quad (16)$$

Застосувавши лему 1 до першого доданка правого боку (2), отримаємо (3). Лему 2 доведено.

Доведення лема 3. Якщо $\beta_q \leq x$, тоді правильна така нерівність

$$\frac{e^{\beta_q}}{e^x} \leq \frac{e^{x+1}}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^x}.$$

Звідси

$$\frac{e^{\beta_q}}{e^x} \leq e^{x+1} \left(\frac{1}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x+2}} \right).$$

Отже, оскільки $0 < \gamma_q < \pi$, то

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin \gamma_q \leq \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin \gamma_q \leq \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} e^{x+1} \left(\frac{1}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x+2}} \right) \sin \gamma_q. \quad (17)$$

За означенням 2 права частина (17) є характеристикою $C(x+1; x_0, 1/f)$, тобто

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin \gamma_q \leq e^{x+1} C(x+1; x_0, \frac{1}{f}) \leq a e^x \lambda(x+1+b) \leq a_1 e^x \lambda(x+b_1). \quad (18)$$

Враховуючи, що функція f є функцією скінченного λ -типу та аналог першої основної теореми (див. [2]), маємо $C(x; x_0, 1/f) \leq a \lambda(x+b)$.

Врахувавши означення $C(x; x_0, 1/f)$, одержуємо

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^x}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}} \right) \sin \gamma_q \leq a e^x \lambda(x+b). \quad (19)$$

З огляду на нерівності (17)–(19), одержуємо

$$\begin{aligned} \sum_{\rho_q \in R_x} \sin \gamma_q &\leq \sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^x}{e^{\beta_q}} \sin \gamma_q \leq a e^x \lambda(x+b) + \\ &+ \sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin \gamma_q \leq a_2 e^x \lambda(x+b_2), \end{aligned}$$

при $0 < \gamma_q < \pi$. Лему 3 доведено.

3. Доведення теореми 1.

Доведення теореми 1. Нехай $f \in \mathcal{F}_\lambda$.

Для коефіцієнтів Фур'є функції f правильна оцінка

$$|c_k(x, f)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\log |f(x+iy)|| |\sin ky| dy, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З огляду на нерівність $|\sin ky| \leq k \sin y$ для $0 \leq y \leq \pi$, (див., наприклад, [4, с. 10]) та умову а) теореми 1 отримаємо

$$\begin{aligned} |c_k(x, f)| &\leq k \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\log |f(x+iy)|| \sin y dy = \\ &= k \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log^+ |f(x+iy)| \sin y dy + k \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log^- |f(x+iy)| \sin y dy \leq \\ &\leq k a e^x \lambda(x+b) + k \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log^- |f(x+iy)| \sin y dy, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (20)$$

За аналогом першої основної теореми (теорема 2 з [2]) $S(x; x_0, 1/f) = S(x; x_0, f) + \varepsilon(x; x_0, f)$, де $\varepsilon(x; x_0, f) = O(1)$ при $x \rightarrow \infty$, для функції $f \in \mathcal{F}_\lambda$ маємо, що функція $1/f \in \mathcal{F}_\lambda$. Звідси та з умови a) випливає, що $S(x; x_0, 1/f) \leq a \lambda(x+b) + \varepsilon(x; x_0, f)$, де $\varepsilon(x; x_0, f) = O(1)$ при $x \rightarrow \infty$. Оскільки $B(x; x_0, 1/f) \leq S(x; x_0, 1/f)$, то

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi e^x} \int_0^\pi \log^- |f(x+iy)| \sin y \, dy = \\ & = \frac{2}{\pi e^x} \int_0^\pi \log^+ \left| \frac{1}{f(x+iy)} \right| \sin y \, dy = B(x; x_0, \frac{1}{f}) \leq a_1 \lambda(x+b), \end{aligned}$$

де a_1 — деяка стала.

Отже, з нерівності (3) та умови a) теореми 1 випливає

$$|c_k(x, f)| \leq k a e^x \lambda(x+b), \quad (21)$$

при деяких додатних a, b і всіх $k \in \mathbb{N}$.

Згідно з (3)

$$\begin{aligned} c_k(x+1, f) &= \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \left(\frac{e^{k(x+1)}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{k(x+1)}} \right) \sin k\gamma_q + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x+1} \left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+1)}} - \frac{e^{k(x+1)}}{e^{kt}} \right) (\log |f(t)| + (-1)^{k+1} \log |f(t+i\pi)|) \, dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{k(x+1)}} + \frac{e^{k(x+1)}}{e^{kx_0}} \right) \int_0^\pi \log |f(x_0+iy)| \sin ky \, dy + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{k(x+1)}} - \frac{e^{k(x+1)}}{e^{kx_0}} \right) \int_0^\pi \arg f(x_0+iy) \cos ky \, dy, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (22)$$

Домножимо обидва боки рівності (22) на e^{-k} , віднімемо від них $c_k(x, f)$, і вико-

ривавши (3), отримаємо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{e^k} c_k(x+1, f) - c_k(x, f) = \\
& = \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k} e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q - \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x+1} \left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+2)}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) (\log |f(t)| + (-1)^{k+1} \log |f(t+i\pi)|) dt - \\
& - \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^x \left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) (\log |f(t)| + (-1)^{k+1} \log |f(t+i\pi)|) dt + \\
& + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e^{2k}} - 1 \right) \frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} \int_0^\pi \log |f(x_0 + iy)| \sin ky dy + \\
& + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e^{2k}} - 1 \right) \frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} \int_0^\pi \arg f(x_0 + iy) \cos ky dy = \\
& = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{23}
\end{aligned}$$

Розглянемо I_1

$$\begin{aligned}
I_1 & = \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k} e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q - \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q = \\
& = \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_{x+1} \setminus R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k} e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q + \\
& + \frac{2}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{2k}} \right) \sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \sin k\gamma_q = G_1 + G_2, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Оцінимо $|G_1|$,

$$|G_1| = \frac{2}{k} \left| \sum_{\rho_q \in R_{x+1} \setminus R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k} e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q \right|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $e^{k(x-\beta_q)} - e^{k(\beta_q-x-2)} \leq 1$ для всіх $x \leq \rho_q \leq x+1$, то

$$|G_1| \leq \frac{2}{k} \left| \sum_{\rho_q \in R_x} \sin k\gamma_q \right| \leq 2 \sum_{\rho_q \in R_x} \sin \gamma_q, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

а також

$$\begin{aligned} |G_2| &= \frac{2}{k} \left| \left(1 - \frac{1}{e^{2k}} \right) \sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \sin k\gamma_q \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{k} \left| \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \sin k\gamma_q \right| \leq 2 \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \sin \gamma_q, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (25)$$

Отож, застосувавши лему 3 до співвідношень (24) та (25), отримаємо

$$|I_1| \leq ae^x \lambda(b+x). \quad (26)$$

Оцінимо I_2

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x+1} \left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+2)}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) (\log |f(t)| + (-1)^{k+1} \log |f(t+i\pi)|) dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^x \left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) (\log |f(t)| + (-1)^{k+1} \log |f(t+i\pi)|) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left| \left(\frac{1}{e^{2k}} - 1 \right) \int_{x_0}^x \frac{e^{kt}}{e^{kx}} (\log |f(t)| + (-1)^{k+1} \log |f(t+i\pi)|) dt \right| + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left| \int_x^{x+1} \left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+2)}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) (\log |f(t)| + (-1)^{k+1} \log |f(t+i\pi)|) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x+1} (|\log |f(t)|| + |\log |f(t+i\pi)||) dt. \end{aligned}$$

Врахувавши умову 2) означення 2, отримуємо

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x+1} \frac{e^{x+1}}{e^t} (|\log |f(t)|| + |\log |f(t+i\pi)||) dt \leq e^{x+1} a \lambda(x+b), \quad (27)$$

де a, b – деякі сталі.

Зауважимо, що доданки $|I_3|$ та $|I_4|$ не перевищують деякої сталої. Справді, $|\log |f(x_0 + iy)| \sin ky| \leq K$ і $|\arg f(x_0 + iy) \cos ky| \leq K$, $0 < y < \pi$, де K – деяка

стала. Тоді

$$\begin{aligned}
|I_3| + |I_4| &= \left| \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e^{2k}} - 1 \right) \frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} \int_0^\pi \log |f(x_0 + iy)| \sin ky \, dy \right| + \\
&+ \left| \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e^{2k}} - 1 \right) \frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} \int_0^\pi \arg f(x_0 + iy) \cos ky \, dy \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{e^{2k}} \pi K_1 + \frac{1}{\pi} \frac{1}{e^{2k}} \pi K_1 \leq K_2,
\end{aligned} \tag{28}$$

де K_1, K_2 – деякі сталі.

Отже, з (3) та (26)–(28) маємо

$$|c_k(x, f)| - 1/e^k |c_k(x+1, f)| \leq |1/e^k c_k(x+1, f) - c_k(x, f)| \leq ae^x \lambda(x+b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси

$$|c_k(x, f)| \leq 1/e^k |c_k(x+1, f)| + ae^x \lambda(x+b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Враховуючи (21), одержимо $|c_k(x, f)| \leq k/e^k a\lambda(x+1+b) + ae^x \lambda(x+b)$, звідки випливає б), оскільки умова 2) входить в означення класу \mathcal{F}_λ .

Нехай тепер виконуються умови б) теореми 1.

Для функції f правильна формула Пуассона-Йенсена

$$\log |f(x+iy)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P_{x_1}} \log |f(u+iv)| \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} \, ds - \sum_{\rho_q \in P_{x_1}} G(z, \rho_q), \tag{29}$$

де $P_{x_1} = \{z = x+iy : x_1 - \alpha < x < x_1 + \alpha, 0 < y < \pi\}$, $x_0 + \alpha < x_1$, $\alpha > 0$, $G(z, \zeta)$ – функція Гріна прямокутника P_{x_1} , $\frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n}$ – похідна за внутрішньою нормаллю ([3, с. 15]). Оскільки $G(z, \zeta) \geq 0$, то справджується таке співвідношення:

$$\log |f(x+iy)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P_{x_1}} \log |f(u+iv)| \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} \, ds. \tag{30}$$

Використовуючи теорію еліптичних функцій (див., наприклад, [5, гл. VIII], [6], [7]), можемо отримати розвинення ядра у формулі Пуассона-Йенсена (29)

$$\begin{aligned}
G(z, \zeta) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-e^{-4m\alpha})} e^{m(u-x)} \left(1 - e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right) \times \\
&\times \left(1 - e^{2m(x_1-u-\alpha)}\right) \sin my \sin mv, \quad x_1 - \alpha \leq u < x \leq x_1 + \alpha,
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
G(z, \zeta) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-e^{-4m\alpha})} e^{m(x-u)} \left(1 - e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right) \times \\
&\times \left(1 - e^{2m(u-x_1-\alpha)}\right) \sin my \sin mv, \quad x_1 - \alpha \leq x < u \leq x_1 + \alpha.
\end{aligned} \tag{32}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, u)}{\partial n} &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-4m\alpha}} e^{m(u-x)} \left(1 - e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right) \times \\ &\times \left(1 - e^{2m(x_1-u-\alpha)}\right) \sin my, \quad x_1 - \alpha \leq u < x \leq x_1 + \alpha, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, u + i\pi)}{\partial n} &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{1 - e^{-4m\alpha}} e^{m(u-x)} \left(1 - e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right) \times \\ &\times \left(1 - e^{2m(x_1-u-\alpha)}\right) \sin my, \quad x_1 - \alpha \leq u < x \leq x_1 + \alpha; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, u)}{\partial n} &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-4m\alpha}} e^{m(x-u)} \left(1 - e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right) \times \\ &\times \left(1 - e^{2m(u-x_1-\alpha)}\right) \sin my, \quad x_1 - \alpha \leq x < u \leq x_1 + \alpha, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, u + i\pi)}{\partial n} &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{1 - e^{-4m\alpha}} e^{m(x-u)} \left(1 - e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right) \times \\ &\times \left(1 - e^{2m(u-x_1-\alpha)}\right) \sin my, \quad x_1 - \alpha \leq x < u \leq x_1 + \alpha; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, x_1 - \alpha)}{\partial n} &= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-4m\alpha}} e^{m(x_1-x-\alpha)} \times \\ &\times \left(1 - e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right) \times \sin my \sin mv, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, x_1 + \alpha)}{\partial n} &= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-4m\alpha}} e^{m(x-x_1-\alpha)} \times \\ &\times \left(1 - e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right) \times \sin my \sin mv. \end{aligned} \quad (38)$$

Співвідношення (30) при $\alpha = 1$, $0 < \delta < 1$ і $x = x_1$ має вигляд

$$\begin{aligned}
& \log |f(x_1 + iy)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \log |f(x_1 + 1 + iv)| \frac{\partial G(z, x_1 + 1)}{\partial n} dv + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \log |f(x_1 - 1 + iv)| \frac{\partial G(z, x_1 - 1)}{\partial n} dv + \frac{1}{2\pi} \int_{x_1-1}^{x_1-\delta} \log |f(u)| \frac{\partial G(z, u)}{\partial n} du + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} \log |f(u)| \frac{\partial G(z, u)}{\partial n} du + \frac{1}{2\pi} \int_{x_1+\delta}^{x_1+1} \log |f(u)| \frac{\partial G(z, u)}{\partial n} du + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{x_1-1}^{x_1-\delta} \log |f(u + i\pi)| \frac{\partial G(z, u + i\pi)}{\partial n} du + \frac{1}{2\pi} \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} \log |f(u + i\pi)| \frac{\partial G(z, u + i\pi)}{\partial n} du + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{x_1+\delta}^{x_1+1} \log |f(u + i\pi)| \frac{\partial G(z, u + i\pi)}{\partial n} du = I_1 + I_2 + I_{31} + I_{32} + I_{33} + I_{41} + I_{42} + I_{43}.
\end{aligned}$$

Використавши нерівність $a^+ \leq |a|$, маємо

$$\log^+ |f(x_1 + iy)| \leq (I_1 + I_2)^+ + I_{31}^+ + I_{32}^+ + I_{33}^+ + I_{41}^+ + I_{42}^+ + I_{43}^+. \quad (39)$$

Розглянемо $I_1 + I_2$

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, x_1 + 1 + iv)}{\partial n} \log |f(x_1 + 1 + iv)| dv + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, x_1 - 1 + iv)}{\partial n} \log |f(x_1 - 1 + iv)| dv = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-4m}} e^{-m} (1 - e^{-2m}) \sin my \log |f(x_1 + 1 + iv)| \sin mv dv + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-4m}} e^{-m} (1 - e^{-2m}) \sin my \log |f(x_1 - 1 + iv)| \sin mv dv.
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\left| \frac{1}{1 - e^{-4m}} e^{-m} (1 - e^{-2m}) \sin my \right| \leq \frac{e^{-m}}{1 + e^{-2m}} \leq \frac{1}{e^m},$$

то за теоремою Вейерштрасса ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-4m}} e^{-m} (1 - e^{-2m}) \sin my \sin mv$$

рівномірно збігається при $0 \leq v \leq \pi$ і його можна почленно інтегрувати. Тому

$$I_1 + I_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{e^m} (c_m(x_1 + 1, f) + c_m(x_1 - 1, f)).$$

Отже, згідно з умовою б) теореми 1

$$|I_1 + I_2| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{e^m} (|c_m(x_1 + 1, f)| + |c_m(x_1 - 1, f)|) \leq a e^{x_1} \lambda(x_1 + b),$$

де a, b – деякі сталі. Домноживши це співвідношення на $\sin y$ і проінтегрувавши за y від 0 до π , отримаємо

$$\int_0^{2\pi} |I_1 + I_2| \sin y \, dy \leq 2 a e^{x_1} \lambda(x_1 + b). \quad (40)$$

Розглянемо I_{31} при $\alpha = 1$ і $x = x_1$. Оскільки $\frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} \geq 0$, $\log^+ |x| \leq |\log |x||$, то

$$I_{31}^+ \leq \frac{1}{\pi} \int_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log |f(u)|| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-2m}} e^{m(u-x_1)} (1 - e^{2m(x_1-u-1)}) \sin my \, du. \quad (41)$$

Оскільки

$$\left| \frac{1}{1 + e^{-2m}} e^{m(u-x_1)} (1 - e^{2m(x_1-u-1)}) \sin my \right| \leq e^{m(u-x_1)} \leq e^{-m\delta},$$

і мажоруючий ряд $\sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\delta} = \frac{1}{1-e^{-\delta}}$, збіжний, то за теоремою Вейєрштрасса ряд (41) збіжний абсолютно і рівномірно при $0 \leq y \leq \pi$, $x_1 - 1 \leq u \leq x_1 - \delta$. Отже, його можна почленно інтегрувати на $[x_1 - 1, x_1 - \delta]$. Тому

$$I_{31}^+ \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sin my \frac{1}{\pi} \int_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log |f(u)|| \frac{1}{1 + e^{-2m}} e^{m(u-x_1)} (1 - e^{2m(x_1-u-1)}) \, du. \quad (42)$$

Домножимо співвідношення (42) на $\sin y$ і проінтегруємо за y від 0 до π . Тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} I_{31}^+ \sin y \, dy \leq \\ & \leq \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin my \frac{1}{\pi} \int_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log |f(u)|| \frac{e^{m(u-x_1)}}{1 + e^{-2m}} (1 - e^{2m(x_1-u-1)}) \, du \sin y \, dy. \end{aligned}$$

Почленне інтегрування рівномірно збіжного на $[0, \pi]$ ряду дає

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin my \sin y \frac{1}{\pi} \int_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log |f(u)|| \frac{e^{m(u-x_1)}}{1+e^{-2m}} \left(1 - e^{2m(x_1-u-1)}\right) du dy.$$

З ортогональності системи $\{\sin my\}_{m=1}^{\infty}$ на $[0, \pi]$, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} I_{31}^+ \sin y dy &\leq \int_0^{\pi} \sin^2 y \int_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log |f(u)|| \frac{e^{u-x_1}}{1+e^{-2}} \left(1 - e^{2(x_1-u-1)}\right) du dy \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log |f(u)|| \frac{e^{u-x_1}}{1+e^{-2}} \left(1 - e^{2(x_1-u-1)}\right) du dy \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log |f(u)|| du \leq \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1+1} |\log |f(u)|| du. \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{1}{e^{x_1+1}} \leq \frac{1}{e^t}$, при $t \leq x_1 + 1$, то використавши умову 2), отримуємо

$$\frac{1}{e^{x_1+1}} \int_0^{\pi} I_{31}^+ \sin y dy \leq a\lambda(x_1 + b). \quad (43)$$

Аналогічно до I_{31}^+ доводиться оцінка для I_{33}^+ , I_{41}^+ та I_{43}^+ .

З абсолютної неперервності інтеграла Лебега існує таке $\delta > 0$, $\delta = \delta(x_1) < 1$, що кожен з інтегралів $|I_{32}|$ і $|I_{42}|$ не перевищує 1. Отже, з урахуванням співвідношень (40) та (43) отримуємо $\int_0^{\pi} \log^+ |f(x_1 + iy)| \sin y dy \leq e^x a_1 \lambda(x + b_1)$, де a_1, b_1 – деякі сталі. Ми показали, що $B(x; x_0, f) \leq a \lambda(x + b)$. Тепер оцінимо $A(x; x_0, f)$,

$$\begin{aligned} A(x; x_0, f) &= \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^x (\log^+ |f(t)| + \log^+ |f(t + i\pi)|) \left(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}} \right) dt \leq \\ &\frac{1}{\pi} \int_{x_0}^x \frac{\log^+ |f(t)| + \log^+ |f(t + i\pi)|}{e^t} dt. \end{aligned}$$

Використавши умову 2) та нерівність $\log^+ |x| \leq |\log |x||$, одержуємо $A(x; x_0, f) \leq a_1 \lambda(x + b_1)$, де a_1, b_1 – деякі сталі.

Отож, теорему 1 доведено.

-
1. Rubel L. A., Taylor B. A. Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France – 1968. – **96**. – P. 53-96.

2. *Бридуи А. М.* Характеристика і перша основна теорема Неванлінни для мероморфних в півсмузі функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2004. – Вип. 63. – С. 32-43.
3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М., 1970.
4. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1990.
5. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. – М., 1970.
6. *Малютин К. Г.* Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости // Матем. сборник – 2001. – 192. – №6. – С. 51-70.
7. *Малютин К. Г., Коломиец С. В.* Ряды Фурье и истинно-субгармонические функции конечного γ -типа // Вісн. Харків. ун-ту. Серія матем., прикладна матем. і мех. – 2000. – 475. – С. 105-112.

HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF FINITE λ -TYPE IN A HALF-STRIP

Andriy BRYDUN

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1
e-mail: a_brydun@franko.lviv.ua, a_brydun@yahoo.com*

A criterion of λ -type finiteness of holomorphic functions in a half-strip is proved.

Key words: holomorphic function, meromorphic function, Nevanlinna characteristic, function of finite λ -type.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2006

Прийнята до друку 24.10.2007