УДК 519.21+519.872

ОПТИМАЛЬНИЙ ІНВЕСТИЦІЙНИЙ ПОРТФЕЛЬ ДЛЯ РІЗНИХ ТИПІВ РОЗПОДІЛІВ ПОВЕРНЕНЬ

Тарас БОДНАР

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: bodnar@euv-frankfurt-o.de

Розглянуто проблему впливу різних типів розподілів повернень на формування оптимального портфеля. Отримані результати застосовано до побудови портфеля, який складається з індексів польського, російського й українського ринків цінних паперів.

Ключові слова: портфельний аналіз, матричний еліптичний розподіл, статичні методи в фінансах.

1. Провідну роль у визначенні ефективності певного портфеля відіграють розподіли оцінених його оптимальних ваг ([2], [10]). У [11] виведено тест для середньо-варіаційної ефективності портфеля, а в праці [4] – тест для перевірки ефективності середньо-варіаційного оптимального портфеля за умови нормальності на повернення цінних паперів. Використовуючи регресійні процедури, визначено скінченно-вибірковий розподіл трансформованих ваг.

На практиці припущення нормальності та незалежності не відповідають дійсності, особливо, коли розподіли повернень цінних паперів мають повільно спадаючі хвости [9], [13], [14], [16]. Саме для таких випадків у працях [17], [18] було запропоновано використання багатовимірного t-розподілу. У реальних задачах некорельованість повернень практично не виконується. У [12] доведено, що не неперервні торги можуть привести до додатної автокореляції. Змінні з часом очікувані повернення також мають додатну автокореляцію в денних поверненнях цінних паперів [5]. Припущення некорельованих повернень відповідає важливим теоретичним властивостям застосування наступних моделей для опису поведінки повернень цінних паперів [3], [6], [15].

Для опису повернень цінних паперів ми вибрали сім'ю еліптичних розподілів, оскільки вона охоплює багато відомих у практичному застосуванні багатовимірних розподілів, зокрема нормальний розподіл, мішаний нормальний розподіл, розподіл Пірсона II and VII типів, багатовимірний t-розподіл, багатовимірний розподіл Коші,

© Боднар Тарас, 2007

логістичний розподіл [7]. Привабливою альтернативою багатовимірної нормальності є еліптичні розподіли, чиї контори однакової густини мають такий самий еліптичний вигляд, як і у випадку нормального розподілу.

Через $p_{i,t}$ позначимо ціну i-го цінного паперу в момент часу t. Тоді під вектором повернень будемо розуміти наступний k-вимірний вектор $r_t = (r_{1,t}, \ldots, r_{k,t})$, де $r_{i,t} = lnp_{i,t} - lnp_{i,t-1}$. Надалі припускаємо, що вектор r_t має k-вимірний еліптичний розподіл, тобто густина вектора r_t задається такою формулою:

$$|\Sigma|^{-1/2} f((x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)),$$

де параметри процесу μ і Σ є відповідно вектором середніх і коваріаційною матрицею, а $|\Sigma|$ – визначник коваріаційної матриці. Важливу роль у теорії еліптичних розподілів відіграє генеруюча змінна еліптичного розподілу. Генеруюча змінна є випадковою величиною, яку задають за допомогою такої рівності:

$$R = (X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)$$

і повністю визначає тип еліптичного розподілу випадкового вектора X, тобто функцію $f(.)$.

Оптимальні портфельні ваги, які максимізують очікувану квадратну функцію корисності, визначають з рівності

$$w_{EU} = \frac{\Sigma^{-1}1_k}{1_k'\Sigma^{-1}1_k} + \alpha^{-1}S\mu, \tag{1}$$

де

$$S = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1}1_k1_k'\Sigma^{-1}}{1_k'\Sigma^{-1}1_k}. \tag{2}$$

Тут 1_k – k-вимірний вектор, всі елементи якого дорівнюють 1.

Мета нашої статті — вивчити залежність оцінок оптимальних ваг від типу еліптичного розподілу. Для цього використовують формули моментів оцінок для аналізу поведінки оптимальних портфельних ваг залежно від припущення, накладеного на розподіли повернень. Також досліджується випадок стійких симетричних розподілів. Показано, що оцінка оптимальних портфельних ваг має моменти вищого порядку навіть тоді, коли не існує середнє оцінки коваріаційної матриці.

2. Основні результати. Середнє і коваріаційну матрицю еліптичного процесу оцінюють за допомогою вибіркових оцінок. Тоді оцінки оптимальних портфельних ваг матимуть вигляд

$$\hat{w}_{EU} = \frac{\hat{\Sigma}^{-1}1_k}{1_k'\hat{\Sigma}^{-1}1_k} + \alpha^{-1}\hat{S}\hat{\mu},$$

де

$$\hat{S} = \hat{\Sigma}^{-1} - \frac{\hat{\Sigma}^{-1}1_k1_k'\hat{\Sigma}^{-1}}{1_k'\hat{\Sigma}^{-1}1_k}.$$

$$M_{ij} = \frac{(n-1)^2(n-k+1)}{(n-k)(n-k-1)^2(n-k-3)}Se_ie_j'S+$$

$$+\frac{(n-1)^2}{(n-k)(n-k-1)(n-k-3)}e_i'Se_j, \quad (3)$$

$$\tilde{M}_{ij}=\frac{(n-1)^2(3(n-k)-1)}{(n-k)(n-k-1)^2(n-k-3)}Se_ie_j'S+$$

$$+\frac{(n-1)^2}{(n-k)(n-k-1)(n-k-3)}e_i'Se_j, \quad (4)$$

$$M_{ij}^*=M_{ij}-\tilde{M}_{ij}=\frac{(n-1)^2}{(n-k-1)^2}Se_ie_j'S, \quad (5)$$

причому e_i $(i=1,2,...,k)$ – k-вимірний вектор, i-й елемент якого дорівнює одиниці, а всі інші – нулю.

Середнє і коваріація між елементами вектора оцінок мають вигляд

$$E(\hat{w}_{EU})=\frac{\Sigma^{-1}1_k}{1_k'\Sigma^{-1}1_k}+\frac{n-1}{n-k-1}(nk-2)E(R^{-2})\alpha^{-1}S\mu \quad (7)$$

і

$$Cov(\hat{w}_{EU}^i,\hat{w}_{EU}^j)=\frac{1}{n-k-1}\frac{e_i'Se_j}{1_k'\Sigma^{-1}1_k}-\alpha^{-2}\left((nk-2)E(R^{-2})\right)^2\mu'M_{ij}^*\mu+$$

$$+\alpha^{-2}(nk-2)(nk-4)E(R^{-4})\mu'\tilde{M}_{ij}\mu+$$

$$+\alpha^{-2}(nk-2)E(R^{-2})\left(\frac{tr(M_{ij}\Sigma)}{n}+\frac{(n-1)^2}{n(n-k-1)^2}e_i'Se_j\right). \quad (8)$$

Спочатку розглянемо багатовимірний симетричний стійкий розподіл. Якщо характеристична функція деякої випадкової величини Z має вигляд

$$\varphi(t't)=e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}},\ 0<\zeta\leqslant 2,\ r>0,$$

де t – k-вимірний вектор, то скажемо, що випадкова величина Z має багатовимірний симетричний стійкий розподіл. Це є багатовимірне узагальнення стійкого розподілу.

Зауважимо, що характеристична функція цього типу еліптичних симетричних розподілів належить до Φ_{l+1} для кожного $l+1$ [8]. Позначимо $Z=\left(Z^{(1)},Z^{(2)}\right)\sim S_{l+1}(\alpha)$, де $Z^{(1)}$ – q-вимірний вектор. Тоді з результатів [8] випливає, що $Z^{(1)}\sim S_q(\varphi)$, де через $S_q(\varphi)$ позначено сім'ю q-вимірних симетричних розподілів із характеристичною функцією φ. Застосовуючи теорему 2.5.6 з [8], доходимо висновку, що густина q-вимірного випадкового вектора $(1\leqslant q\leqslant l)$, який має багатовимірний симетричний розподіл, задають так:

$$g(X'X)=\frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1-q}{2}\right)\pi^{\frac{1}{2}}}\int\limits_{\left(\sum\limits_{i=1}^{q}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}^{\infty}v^{-(l-1)}\left(v^2-\sum_{i=1}^{q}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}(l+1-q)}dF_{l+1}(v),$$

де Z — q-вимірний випадковий вектор і $F_{l+1}(.)$ — функція розподілу випадкової величини R, яка є генеруючою змінною для $l+1$-вимірного випадку.

З теореми 2.9 [7] випливає, що густина генеруючої змінної R в q випадку має вигляд

$$f(r) = \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} r^{q-1} g(r^2) =$$

$$= \frac{2}{B\left(\frac{q}{2}, \frac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_r^\infty v^{-(l-1)} \left(v^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}(l+1-q)} dF_{l+1}(v).$$

Лема 1. *Нехай $(l+1)$-вимірний випадковий вектор Z має багатовимірний симетричний стійкий розподіл з індексом стійкості ζ, де $0 < \zeta \leqslant 2$. Тоді існує функція щільності $g(x)$ випадкового вектора Z, яка є неперервною і*

$$g(0) = \frac{4r^{-\frac{l+3}{\zeta}+\frac{5}{2}}}{\pi^{l+1}\zeta} \Gamma\left(\frac{l+1}{2\zeta}\right) > 0.$$

Доведення. Оскільки функція щільності є оберненим перетворенням Фур'є характеристичної функції, то існування густини випадкової величини Z рівносильне рівномірній збіжності інтеграла

$$g(X'X) = \frac{1}{\pi^{l+1}} \int\limits_0^\infty ... \int\limits_0^\infty e^{itx} e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}} dt.$$

Маємо

$$|e^{itx} e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}}| = e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}}.$$

З леми 1.3 ([7]) випливає, що

$$\int\limits_0^\infty ... \int\limits_0^\infty e^{itx} e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}} dt = \int\limits_0^\infty p^{\frac{l+1}{2}-1} e^{-rp^{\frac{\zeta}{2}}} dp = \frac{4r^{-\frac{l+3}{\zeta}+\frac{5}{2}}}{\zeta} \int\limits_0^\infty y^{\frac{l+1}{2\zeta}-1} e^{-y^2} dy,$$

де $y = rt^{\frac{\zeta}{2}}$. Останній інтеграл $\int_0^\infty y^{\frac{l+1}{2\zeta}-1} e^{-y^2} dy$ збігається при $\zeta > 0$ і його значення дорівнює $\Gamma(\frac{l+1}{2\zeta})$. Неперервність функції щільності випливає з неперервності функції $e^{itx} e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}}$.

Зауваження 1. Оскільки для стійких розподілів $E(|Z|^\beta) < \infty$ за умови, що $0 \leqslant \beta < \zeta$ і $E(|Z|^\beta) = \infty$ у випадку $\beta > \zeta$, то, враховуючи нерівність $g(0) > 0$, з леми 1 отримаємо $E(|Z|^\tau) < \infty$, якщо $-1 < \tau \leqslant \alpha$ $-1 < \tau < \zeta$.

На підставі простих обчислень легко довести таку лему.

Лема 2. *Нехай Z – випадкова величина, яка має симетричний стійкий розподіл з індексом стабільності ζ. Тоді*

$$E(Z^\beta) = \frac{2\pi^{\frac{l}{2}} B(\beta+1, \frac{1}{2}l+1)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)} \int\limits_0^\infty v^{2\beta+3} v^l g_{l+1}(v^2) dv.$$

Зауваження 2. Із зауваження 1 випливає, що інтеграл $\int_0^\infty v^\eta g_{l+1}(v^2)dv$ збігається тоді і тільки тоді, коли $-1 < \eta \le 2\zeta + 3 + l$.

Важливо визначити умови на β, за яких існує $E(R^{2\beta})$, де $\beta \in IR$. Відповідь на це питання дає теорема.

Теорема 1. *Нехай R – генеруюча змінна q-вимірного випадкового вектора, який має симетричний стійкий розподіл. Тоді*

$$E(R^{2\beta}) = \frac{2\pi^{\dfrac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)} \frac{B\left(\beta + \dfrac{q}{2}, \dfrac{l+1-q}{2} + 1\right)}{B\left(\dfrac{q}{2}, \dfrac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_0^\infty v^{2\beta+2+l} g_{l+1}(v^2) dv.$$

Доведення. Враховуючи, що

$$f_{l+1}(v) = \frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)} v^l g_{l+1}(v^2),$$

щільність випадкової змінної $Q = R^2$ можна задати такою формулою [7]:

$$f_Q(r) = \frac{\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}\right)} v^{\frac{q}{2}-1} g_{l+1}(r) =$$

$$= \frac{r^{\frac{q}{2}-1}}{B\left(\dfrac{q}{2}, \dfrac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_{\sqrt{r}}^\infty v^{-1}(v^2-r)^{\frac{l+1-q}{2}} g_{l+1}(v^2) dv.$$

Тому

$$E(R^{2\beta}) = \frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)} \frac{1}{B\left(\dfrac{q}{2}, \dfrac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_0^\infty r^{\beta+\frac{q}{2}-1} \int\limits_{\sqrt{r}}^\infty v^{-1}(v^2-r)^{\frac{l+1-q}{2}} g_{l+1}(v^2) dv dr.$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримаємо

$$E(R^{2\beta}) =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} \frac{1}{B\left(\frac{q}{2}, \frac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_0^\infty v^{-1} g_{l+1}(v^2) \int\limits_0^{v^2} r^{\beta+\frac{q}{2}-1}(v^2-r)^{\frac{l+1-q}{2}}\, dr\, dv =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} \frac{1}{B\left(\frac{q}{2}, \frac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_0^\infty v^{2\beta+2+l} g_{l+1}(v^2) \int\limits_0^1 y^{\beta+\frac{q}{2}-1}(1-y)^{\frac{l+1-q}{2}}\, dy\, dv =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} \frac{B\left(\beta+\frac{q}{2}, \frac{l+1-q}{2}+1\right)}{B\left(\frac{q}{2}, \frac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_0^\infty v^{2\beta+2+l} g_{l+1}(v^2)\, dv.$$

Зауваження 3. Із зауваження 2 випливає, що момент $E(R^{2\beta})$ існує тоді і тільки тоді, коли $-\frac{3+l}{2} < \beta \leq \zeta + \frac{1}{2}$.

Отже, середнє, варіації і моменти оцінок оптимальних портфельних ваг достатньо високого порядку у випадку максимізації очікуваної квадратної функції корисності існують для багатовимірних симетричних стійких розподілів з індексом стійкості ζ, $0 < \zeta < 2$, за умови, що оцінка коваріаційної матриці береться без нормування на другий момент генеруючої змінної, як і у випадку нормального розподілу. Такі результати неочікувані, оскільки у формулах використовують оцінку варіації у випадку стійких розподілів з індексом стійкості $0 < \zeta < 2$.

У випадку симетричного розподілу Котца $E(R^{-2m})$ існує для m таких, що $2(N-m)+l > 2$, де $l = nk$, і визначається формулою

$$E(R^{-2m}) = \int\limits_0^\infty v^{-m} \left(\frac{s r^{\frac{2N+l-2}{2s}}}{\pi^{\frac{l}{2}} \Gamma\left(\frac{2N+l-2}{2s}\right)} \right) v^{N+\frac{l}{2}-2} e^{-rv^s}\, dv =$$

$$= C_{l,N} \int\limits_0^\infty v^{N-m+\frac{l}{2}-2} e^{-rv^s}\, dv = \frac{C_{l,N}}{C_{l,N-m}} = \frac{\Gamma\left(\frac{2(N-m)+l-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\frac{2N+l-2}{2s}\right)} r^{\frac{m}{s}}.$$

Обчислимо середнє, варіацію і коваріацію елементів вектора $\hat{w}_{EU}$ за умови, що повернення мають симетричний розподіл Котца з середнім μ, коваріаційною матрицею Σ. Оскільки у нашому випадку $l = nk$, то з формул (3) і (4) отримуємо таку рівність

$$E(\hat{w}_{EU}) = \frac{\Sigma^{-1}1_k}{1_k'\Sigma^{-1}1_k} + \frac{n-1}{n-k-1}(nk-2)\frac{\Gamma\left(\dfrac{2(N-1)+nk-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2N+nk-2}{2s}\right)} r^{\frac{1}{s}}\alpha^{-1}S\mu,$$

за умови, що $2(N-m)+kn>2$. Коваріація між елементами $\hat{w}^i_{EU}$ і $\hat{w}^j_{EU}$ має вигляд

$$Cov(\hat{w}^i_{EU}, \hat{w}^j_{EU}) = \frac{1}{n-k-1}\frac{e_i'Se_j}{1_k'\Sigma^{-1}1_k} -$$

$$-\alpha^{-2}\left((nk-2)\frac{\Gamma\left(\dfrac{2(N-1)+nk-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2N+nk-2}{2s}\right)} r^{\frac{1}{s}}\right)^2 \mu' M^*_{ij}\mu +$$

$$+\alpha^{-2}(nk-2)(nk-4)\frac{\Gamma\left(\dfrac{2(N-2)+nk-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2N+nk-2}{2s}\right)} r^{\frac{2}{s}}\mu'\tilde{M}_{ij}\mu +$$

$$+\alpha^{-2}(nk-2)\frac{\Gamma\left(\dfrac{2(N-1)+nk-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2N+nk-2}{2s}\right)} r^{\frac{1}{s}}\left(\frac{tr(M_{ij}\Sigma)}{n} + \frac{(n-1)^2}{n(n-k-1)^2}e_i'Se_j\right),$$

де M_{ij}, $\tilde{M}_{ij}$ і M^*_{ij} визначають за формулами (3), (4) і (5) відповідно.

Проводячи аналогічні міркування і обчислюючи відповідні моменти, можна одержати формули середнього і коваріацій для інших типів розподілів. Застосуємо отримані результати до реальних даних. Для цього розглянемо ціни індексів ринків цінних паперів країн, що розвиваються (Україна, Польща та Росія) у часовому періоді з 8 січня 2003 до 30 березня 2004рр. Ґрунтуючись на відповідних даних, можна порахувати повернення і сформувати оптимальний портфель в сенсі максимізації очікуваної квадратичної функції корисності.

Позначимо через $p_{i,t}$ ціну індексу i-го ринку в момент часу t, де $i=1$ відповідає Україні, $i=2$ – Польщі та $i=3$ – Росії. Тоді повернення обчислюватимемо за такою формулою:

$$r_{i,t} = \ln\left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}\right).$$

Оцінка вектора середнього і варіації обчислюють за формулами $\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} r_j$, $\hat{\Sigma} = \dfrac{E(R^2_{(nor)})}{(n-1)E(R^2)}\sum\limits_{j=1}^{n}(r_j-\hat{\mu})(r_j-\hat{\mu})'$, де $r_j = (r_{1,j}, r_{2,j}, r_{3,j})$. Отже,

$$\hat{\mu} = (0,002793,\ 0,001183,\ 0,002296)$$

і

$$\hat{\Sigma} = \frac{E(R^2_{(nor)})}{E(R^2)} \begin{pmatrix} 0,000672741853 & -0,000000230215 & -0,000011507796 \\ -0,000000230215 & 0,000250635841 & 0,000074233684 \\ -0,000011507796 & 0,000074233684 & 0,000316689079 \end{pmatrix}.$$

Оскільки оцінки коваріаційних матриць пропорційні, то ризикованість інвестора прямо пов'язана з типом еліптичного розподілу для опису повернень цінних паперів. Позначимо $\tilde{\alpha} = \alpha \frac{nk}{E(R^2)}$. Тоді інвестор, який вибирає певний еліптичний розподіл для моделювання повернень цінних паперів і має коефіцієнт ризикованості α та інвестор, який припускає нормальність і має коефіцієнт ризикованості $\tilde{\alpha} = \alpha \frac{nk}{E(R^2)}$, формують той самий оптимальний портфель. Також зауважимо, що всі сформовані оптимальні портфелі, незалежно від типу еліптичного розподілу, належать ефективній множині портфелів.

Таблиця 1. Оптимальні портфельні ваги для різних типів еліптичних розподілів (коефіцієнт ризикованості інвестора $\alpha = 1$)

К.р.	Норм.	Котц. $r = 0.5$ $s = 1$	Котц. $r = 1$ $s = 2$	t-роз. $d = 4$	t-розр. $d = 10$	Пір.II $d = 1$	Пір.II $d = 10$ $\zeta = 0.2$	Басел $\beta = 0.5$ $\zeta = 0$	Лапл. $\beta = 0.25$
Укр.	1.58	0.55	0.24	2.94	1.92	0.21	0.21	326.7	163.4
Пол.	-3.04	-0.42	0.39	-6.52	-3.91	0.45	0.45	-833	-416.5
Рос.	2.46	0.87	0.37	4.58	2.99	0.34	0.34	507.3	254.1

У табл. 1 подано оптимальні портфельні ваги, які максимізують очікувану квадратичну функцію корисності для різних типів еліптичних розподілів. У всіх зазначених випадках коефіцієнт ризикованості інвестора $\alpha = 1$. Оптимальні ваги дуже чутливі до типу еліптичного розподілу. У випадку розподілу Пірсона другого типу портфельні ваги майже не змінюються зі зміною параметра розподілу d. Вони відповідають безризиковому інвесторові ($\alpha = \infty$), який припускає, що повернення мають нормальний розподіл. У випадку t-розподілу, коли ступені вільності зростають, розподіл оцінки оптимальних портфельних ваг прямує до нормального розподілу. Це можна передбачити, оскільки t-розподіл за умови, що ступені вільності прямують до нескінченності, прямує до нормального розподілу. Варто також зазначити поведінку оптимальних портфельних ваг для розподілів Басселя та Лапласа. Вони відповідають випадкові дуже ризикового інвестора за умови нормальності.

1. *Єлейко Я.І., Боднар Т.Д.* Про використання векторів функцій розподілів стратегій для пошуку оптимальних рішень // Економічна кібернетика. – 2002. – Т. 5-6. – С. 49-56.
2. *Barberis N.* Investing for the long run when returns are predictable // The Journal of Finance. – 1999. – Vol. 55. – P. 225-264.
3. *Bollerslav T.* A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // Rewiew of Economics and Statistics. – 1987. – Vol. 69. – P. 542-547.
4. *Britten-Jones M.* The Sampling error in estimates of mean-variance efficient portfolio weights // The Journal of Finance. – 1994. – Vol. 54. – P. 655-671.
5. *Conrad J., Kaul G.* Time-variation in expected returns // Journal of Business. – 1988. – Vol. 61. – P. 409-425.

6. *Engle R.F* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation // Econometrica. – 1982. – Vol. 50. – P. 987-1008.
7. *Fang K.T., S. Kotz, Ng K.W.* Symmetric multivariate and related distributions. – London: Chapman and Hall, 1989. – P. 220.
8. *Fang K.T., Zhang Y.T.* Generalized multivariate analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – P. 220.
9. *Fama E.F.* Foundations of finance. – New York: Basic Books, 1976. – P. 395.
10. *Fleming J., Kirby C., Ostdiek B.* The economic value of volatility timing // The Journal of Finance. – 2001. – Vol. 56. – P. 329-352.
11. *Jobson J.D., Korkie B.* A performance interpretation of multivariate tests of asset set intersection, spanning, and mean-variance efficiency // Journal of financial and quantitative analysis. Vol. 24, No. 2(1989). – P. 185-204.
12. *Lo A., MacKinlay A.C.* An econometric analysis of non-synchronous trading // Journal of Econometrics. – 1990. – Vol. 45. – P. 181-212.
13. *Markowitz H.* Foundations of portfolio theory // The Journal of Finance. – 1991. – Vol. 7. – P. 469-477.
14. *Mittnik S., Rachev S.T.* Modeling asset returns with alternative stable distributions // Econometric Reviews. – 1993. – Vol. 12. – P. 261-330.
15. *Nelson D.* Conditional heteroskedasticity in stock returns: A New Approach // Econometrica. – 1991. – Vol. 59. – P. 347-370.
16. *Osborne M.F.M.* Brownian motion in the stock market // Operation Research. – 1959. – Vol. 7. – P. 145-173.
17. *Sutradhar B.C.* Testing Linear hypothesis with t-error variable // Sankhya Ser. B. – 1988. – Vol. 50. – P. 175-180.
18. *Zellner A.* Bayesian and non-Bayesian analysis of the regression model with multivariate student-t error terms // J. Amer. Statist. Assoc. – 1976. – Vol. 71. – P. 400-405.

OPTIMAL INVESTMENT PORTFOLIO FOR DIFFERENT TYPES OF ASSET RETURNS DISTRIBUTION

Taras BODNAR

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1
e-mail: bodnar@euv-frankfurt-o.de

The present paper treats the problem of the influence of the distribution uncertainty on the portfolio selection. The derived results are applied in constructing of the international portfolio based on the Polish, Russian, and Ukrainian stock market indices.

Key words: portfolio analysis, matrix elliptical distribution, statistical methods in finance.

Стаття надійшла до редколегії 26.04.2006

Прийнята до друку 24.10.2007