ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 161–165
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 161–165

УДК 517.53

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ВИРОДЖЕНОЇ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Юрій ТРУХАН, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: yurik93@mail.ru, m m sheremeta@list.ru

Досліджено обмеженість l-індексу виродженої гіпергеометричної функції.

Ключові слова: ціла функція, обмеженість l-індексу, вироджена гіпергеометрична функція.

Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

— ціла функція, а l — додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція. Функція f називається функцією обмеженого l-індексу [1], якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(|z|)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{2}$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом функції f і позначається через $N(f, l)$.

Для $G \subset \mathbb{C}$ нехай $N(f, l; G)$ — l-індекс функції f в G, тобто найменше з таких чисел $N \in \mathbb{Z}_+$, що (2) виконується для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$.

Виродженою гіпергеометричною функцією називається [2] функція

$$F(z) = F(\alpha, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{j+\alpha}{j+\gamma}\right)\frac{z^k}{k!}, \quad \gamma \ne 0, -1\ -2, \ldots. \tag{3}$$

В [3] доведено таке: якщо параметри функції (3) задовольняють умову $0 < \alpha \le \le \gamma$, то для кожної похідної $F^{(n)}$, $n \ge 0$ правильна нерівність $N(F^{(n)}, l_n) \le 1$, де $l_n(r) \equiv 4\max\{\sqrt{e}/(2-\sqrt{e}), \gamma + n + 1\}$. Виникає природне запитання, яким буде l-індекс функції (3) у випадку, коли $0 < \gamma \le \alpha$.

Щоб відповісти на це питання, ми використаємо ту обставину, що вироджена гіпергеометрична функція є [2] розв'язком диференціальнго рівняння

$$zw'' + (\gamma - z)w' - \alpha w = 0, \tag{4}$$

і доведену в [3] лему.

Лема 1. *Якщо функція (1) аналітична в* $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z : |z| \le R\}$, $f_0 = 1$ *і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| R^n \le a(R) < 1, \tag{5}$$

то $N(f, l; \mathbb{D}_R) \le 1$ *з* $l(|z|) = \dfrac{1 + a(R)}{(1 - a(R))(R - |z|)}$.

Якщо $z \in \mathbb{D}_{\xi R}$, $0 < \xi < 1$, то $R - |z| \ge (1 - \xi)R$ і з леми 1 випливає, що $N(f, l; \mathbb{D}_{\xi R}) \le 1$ з $l(|z|) \equiv \dfrac{1 + a(R)}{(1 - \xi)R(1 - a(R))}$, бо якщо $N(f, l_*, G) \le N$ і $l_*(r) \le l^*(r)$, то неважко довести [1], що $N(f, l^*, G) \le N$. Тому правильна така лема.

Лема 2. *Якщо функція (1) ціла і* $f_0 = 1$, *то для кожних* $\xi \in (0, 1)$ *і* $R \in (0, +\infty)$ *за умови (5) правильна нерівність* $N(f, l; \mathbb{D}_{\xi R}) \le 1$ *з* $l(|z|) \equiv \dfrac{1 + a(R)}{(1 - \xi)R(1 - a(R))}$.

За умови $0 < \gamma \le \alpha$ отримаємо $\dfrac{j + \alpha}{j + \gamma} \le \dfrac{\alpha}{\gamma}$ для всіх $j \ge 0$. Тому для коефіцієнтів f_k функції (3) правильна оцінка $|f_k| \le \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^k$ для всіх $k \ge 1$, і отже, якщо $R = \dfrac{\gamma\eta}{\alpha}$, де $\eta \in (0, \ln 2)$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k| R^k \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\eta^k}{k!} = e^\eta - 1 = a(R) < 1$. Якщо тепер $|z| \le \xi R = \xi\dfrac{\gamma\eta}{\alpha}$, де $\xi \in (0, 1)$, то звідси за лемою 2 отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції задовольняють умову* $0 < \gamma \le \alpha$, *то для кожних* $\eta \in (0, \ln 2)$ *і* $\xi \in (0, 1)$ *правильна нерівність* $N(F, l; \mathbb{D}_{\xi\gamma\eta/\alpha}) \le 1$ *з*

$$l(|z|) \equiv \frac{\alpha e^\eta}{(2 - e^\eta)(1 - \xi)\gamma\eta}. \tag{6}$$

Позначимо

$$L = L(\alpha, \gamma, \xi, \eta) = \max\left\{1 + \frac{\alpha}{\xi\eta}, \frac{2\alpha}{\xi\eta\gamma}\right\}.$$

Доведемо тепер, що функція F в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{\xi\gamma\eta/\alpha}$ є обмеженого l-індексу з $l(|z|) \equiv L$. Для цього спочатку зауважимо, що для всіх $m \ge 0$

$$\frac{1 + (m + \gamma)\alpha/(\xi\gamma\eta)}{(m + 2)} \le \frac{1}{2}L. \tag{7}$$

Справді, функція у лівій частині нерівності (7) спадає за змінною m за умови $2\alpha - \xi\eta\gamma - \gamma\alpha < 0$, тому не перевищує $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\alpha}{\xi\eta}\right)$ і зростає у протилежному випадку, і отже, не перевищує $\dfrac{1}{2}\dfrac{2\alpha}{\xi\eta\gamma}$.

Правильна також нерівність

$$\frac{\alpha^2}{\xi\eta\gamma} \le L^2. \tag{8}$$

Справді, якщо $\gamma \le 1$, то $\dfrac{4\alpha^2}{(\xi\eta\gamma)^2} \ge \dfrac{\alpha^2}{\xi\eta\gamma}$. Якщо ж $\gamma \ge 1$, то $\dfrac{\alpha^2}{\xi\eta\gamma} \le \dfrac{\alpha^2}{\xi\eta} \le \dfrac{\alpha^2}{(\xi\eta)^2} \le$ $\le \left(1+\dfrac{\alpha}{\xi\eta}\right)^2$.

Доведемо, нарешті, що для всіх $m \ge 1$

$$\frac{2(m+\alpha)\alpha}{(m+2)(m+1)\xi\eta\gamma} \le L^2. \tag{9}$$

Якщо $\alpha \ge 1$, то вираз у лівій частині нерівності (9) спадає за змінною m і тому не перевищує $\dfrac{\alpha^2}{\xi\eta\gamma}$. Використовуючи (8), отримуємо (9). Якщо ж $\alpha \le 1$, то $\dfrac{2(m+\alpha)\alpha}{(m+2)(m+1)\xi\eta\gamma} \le \dfrac{2\alpha}{(m+2)\xi\eta\gamma} \le \dfrac{\alpha}{\xi\eta\gamma} \le \dfrac{4\alpha^2}{(\xi\eta\gamma)^2}$.

Підставляючи F у рівняння (4), для $|z| \ge \xi\gamma\eta/\alpha$ одержимо

$$|F''(z)| \le \left(1+\frac{\gamma}{|z|}\right)|F'(z)| + \frac{\alpha}{|z|}|F(z)| \le \left(1+\frac{\gamma\alpha}{\xi\gamma\eta}\right)|F'(z)| + \frac{\alpha^2}{\xi\gamma\eta}|F(z)|,$$

звідки, використовуючи (7) з $m=0$ та (8),

$$\frac{|F''(z)|}{2!L^2} \le \frac{1+\dfrac{\alpha}{\xi\eta}}{2L}\frac{|F'(z)|}{1!L} + \frac{\dfrac{\alpha^2}{\xi\gamma\eta}}{2L^2}|F(z)| \le \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!L},\, |F(z)|\right\}. \tag{10}$$

Якщо підставимо F у (4) і продиференціюємо $m \ge 1$ раз, то отримаємо

$$zF^{(m+2)}(z) + (m+\gamma-z)F^{(m+1)}(z) - (m+\alpha)F^{(m)}(z) \equiv 0, \tag{11}$$

звідки, як вище, використовуючи (7) та (9),

$$\frac{|F^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!L^{m+2}} \le \frac{1+\dfrac{(m+\gamma)\alpha}{\xi\gamma\eta}}{(m+2)L}\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!L^{m+1}} + \frac{\dfrac{(m+\alpha)\alpha}{\xi\gamma\eta}}{(m+2)(m+1)L^2}\frac{|F^{(m)}(z)|}{m!L^m} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!L^{m+1}},\, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!L^m}\right\}. \tag{12}$$

З (10) і (12) легко випливає, що для всіх $n \ge 0$

$$\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!L^n} \le \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!L},\, |F(z)|\right\},$$

тобто правильне таке твердження.

Твердження 2. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції задовольняють умову $0 < \gamma \le \alpha$, то для кожних $\eta \in (0, \ln 2)$ і $\xi \in (0, 1)$ правильна нерівність $N(F, l; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{\xi\gamma\eta/\alpha}) \le 1$ з $l(|z|) \equiv \max\left\{1+\dfrac{\alpha}{\xi\eta},\, \dfrac{2\alpha}{\xi\eta\gamma}\right\}$.*

Використовуючи зауваження після леми 1, отримуємо таку теорему.

Теорема 1. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції задовольняють умову* $0<\gamma\le\alpha$, *то для кожних* $\eta\in(0,\ln 2)$ *і* $\xi\in(0,1)$ *правильна нерівність* $N(F,l)\le 1$ *з*

$$l(|z|)\equiv\max\left\{\frac{\alpha e^{\eta}}{(2-e^{\eta})(1-\xi)\gamma\eta},\ 1+\frac{\alpha}{\xi\eta},\ \frac{2\alpha}{\xi\eta\gamma}\right\}. \tag{13}$$

Якщо виберемо $\xi=\dfrac{2(2-e^{\eta})}{4-e^{\eta}}$, то за умови $\eta\in(0,\ln 2)$ матимемо $\xi\in\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ і

$$\frac{\alpha e^{\eta}}{(2-e^{\eta})(1-\xi)\gamma\eta}=\frac{2\alpha}{\xi\eta\gamma}=\frac{\alpha(4-e^{\eta})}{\eta\gamma(2-e^{\eta})},$$

і отже, з (13) отримаємо

$$l(|z|)\equiv\max\left\{\frac{\alpha(4-e^{\eta})}{\eta\gamma(2-e^{\eta})},\ 1+\frac{\alpha}{\eta}\frac{4-e^{\eta}}{2(2-e^{\eta})}\right\}.$$

Можемо також довільно вибирати $\eta\in(0,\ln 2)$. Для $\eta=\ln(3/2)$ отримуємо $\dfrac{4-e^{\eta}}{\eta(2-e^{\eta})}=\dfrac{5}{\ln(3/2)}<\dfrac{25}{2}$. Тому з теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції задовольняють умову* $0<\gamma\le\alpha$, *то правильна нерівність* $N(F,l)\le 1$ *з*

$$l(|z|)\equiv\max\left\{1+\frac{25\alpha}{4},\ \frac{25\alpha}{2\gamma}\right\}.$$

Зауважимо таке: оскільки [3] для функції (3) і $n\ge 1$ похідна $F^{(n)}$ має l-індекс такий, як і функція

$$F_n(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=n}^{k+n-1}\frac{j+\alpha}{j+\gamma}\right)\frac{z^k}{k!},$$

а її коефіцієнти не перевищують $\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^k$ для всіх $k\ge 1$, то згідно з доведенням твердження 1 для будь-яких $\eta\in(0,\ln 2)$ і $\xi\in(0,1)$ правильна нерівність $N(F^{(n)},l;\mathbb{D}_{\xi\gamma\eta/\alpha})\le 1$, де $l(|z|)$ набуває вигляду (6).

З іншого боку, для кожного фіксованого $n\ge 1$ і всіх $m\ge 0$ з тотожності (11) одержуємо

$$zF^{(m+n+2)}(z)+(m+n+\gamma-z)F^{(n+m+1)}(z)-(m+n+\alpha)F^{(n+j)}(z)\equiv 0. \tag{14}$$

Тотожність (14) відрізняється від (11) тим, що тепер замість γ стоїть $n+\gamma$, а замість α стоїть $n+\alpha$. Тому, як вище, для кожних $\eta\in(0,\ln 2)$ і $\xi\in(0,1)$ отримуємо нерівність $N(F^{(n)},l;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{(\xi\gamma\eta/\alpha)})\le 1$ з $l(|z|)\equiv\max\left\{1+\dfrac{n+\alpha}{\xi\eta},\ \dfrac{2(n+\alpha)}{\xi\eta(n+\gamma)}\right\}$.

Отже, якщо $0<\gamma\le\alpha$, то для кожних $\eta\in(0,\ln 2)$ і $\xi\in(0,1)$ правильна нерівність $N(F^{(n)},l)\le 1$ з

$$l(|z|)\equiv\max\left\{\frac{\alpha e^{\eta}}{(2-e^{\eta})(1-\xi)\gamma\eta},\ 1+\frac{n+\alpha}{\xi\eta},\ \frac{2(n+\alpha)}{\xi\eta(n+\gamma)}\right\}.$$

Література

1. *Sheremeta M.M.* Analytic functions of bounded index / M.M. Sheremeta – Lviv: VNTL Publishers. — 1999. — 141 p.
2. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции / Д.С. Кузнецов — М.: Высш. школа. — 1965. — 423 с.
3. *Шеремета З.М.* Обмеженість l-індексу аналітичних функцій, зображених степеневими рядами / З.М. Шеремета, М.М. Шеремета // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2006. — Вип. 66. — С. 208–213.

Стаття: надійшла до редколегії 10.02.2014
доопрацьована 27.05.2014
прийнята до друку 11.11.2015

ON THE l-INDEX BOUNDEDNESS OF CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION

Yuriy TRUKHAN, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: yurik93@mail.ru, m m sheremeta@list.ru

The boundedness of l-index of a confluent hypergeometric function is investigated.

Key words: entire function, l-index boundedness, confluent hypergeometric function.