ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 130–141
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 130–141

УДК 517.9

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ НА АЛГЕБРАХ ТИПУ ВІНЕРА ТА ЙОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ

Ольга М'ЯУС

Національний університет "Львівська політехніка", вул. Степана Бандери, 12, Львів, Україна
e-mail: myausolya@mail.ru

Побудовано функціональне числення Хілле-Філліпса-Балакрішнана на алгебрах типу Вінера обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі у класах узагальнених функцій та одержані його диференціальні властивості.

Ключові слова: узагальнена функція, операторне числення, генератор групи, алгебра типу Вінера.

1. Вступ. Перетворення

$$\widehat{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(t)x dt, \tag{1}$$

де $U(t)$ — група операторів, називають перетворенням Е. Хілле, Р. Філліпса та А. Балакришнана, яке вони використовували для побудови функціонального числення [1, 2, 3] генераторів C_0 — груп операторів у згорткових алгебрах мір.

За допомогою перетворень вигляду (1) та їхніх узагальнень у [2] побудовано функціональне числення генераторів сильно неперервних груп операторів у класах обмежених функцій, у [4, 5, 6] – у певних класах узагальнених функцій експоненціального типу, зокрема, у [6] – на банахових алгебрах типу Вінера обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі. Зауважимо, що за допомогою перетворення

$$\widehat{x} = \int\limits_{0}^{\infty} U(t)x dt,$$

де $U(t)$– півгрупа операторів, у [1, 7] та інших працях будують функціональне числення генераторів півгруп операторів.

Оскільки простори функцій експоненціального типу [8, 9] інваріантні щодо операторів диференціювання, то таке функціональне числення має деякі диференціальні властивості, яких немає у класичному функціональному численні операторів.

Мета нашої праці — побудувати функціональне числення на банахових алгебрах типу Вінера для інших, ніж у [6], просторів узагальнених функцій та визначити його диференціальні властивості.

2. Розподіли експоненціального типу. Нехай $L_1(\mathbb{R})$ — банахів простір сумовних функцій $\varphi(t)$ дійсної змінної $t \in \mathbb{R}$ з нормою $\|\varphi\|_{L_1} := \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\, dt$. Якщо $\varphi, \psi \in L_1(\mathbb{R})$, то визначена згортка

$$(\varphi * \psi)(t) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\psi(t-s)\, ds.$$

Простір $L_1(\mathbb{R})$ є банаховою алгеброю стосовно згортки.

Нехай $L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})$ – простір сумовних функцій $\varphi(t)$ з нормою

$$\|\varphi\|_{L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t^m \omega(at)\varphi(t)| dt < \infty$$

при фіксованих m, a $(m = 0, 1, 2, \dots; a > 0)$, де $\omega(t)$ $(-\infty < t < \infty)$– ціла трансцендентна функція нульового роду, корені якої лежать на уявній додатній півосі

$$\omega(t) = C \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{t}{it_k}\Big),$$

$C = const,\ \ C \geq 1,\ \ 0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots,\ \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{t_k} < \infty$, або $\omega(t) \equiv 1$.

Для кожного $\nu > 0$ у просторі $L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})$ визначимо [10] банахів підпростір

$$E_\nu^{(m,a,\omega)} := \Big\{\varphi(t) \in L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R}) \mid \ \|\varphi\|_{E_\nu^{(m,a,\omega)}} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|D^k \varphi\|_{L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})}}{\nu^k} < \infty\Big\},$$

який є інваріантним стосовно оператора диференціювання $D = \frac{d}{dt}$, тобто якщо $\varphi \in E_\nu^{(m,a,\omega)}$, то $D\varphi \in E_\nu^{(m,a,\omega)}$, вкладення $E_\nu^{(m,a,\omega)} \subset L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})$ ізометричне [10]. Нехай

$$E^{(m,a,\omega)} := \bigcup\nolimits_\nu E_\nu^{(m,a,\omega)} = lim\ ind_{\nu \to +\infty} E_\nu^{(m,a,\omega)}$$

– об'єднання просторів з топологією індуктивної границі стосовно неперервних вкладень $E_\nu^{(m,a,\omega)} \subset E_\mu^{(m,a,\omega)}$, де $\nu \leq \mu$. Простір $E^{(m,a,\omega)}$ належить області визначення оператора диференціювання D та є інваріантним щодо його дії [10].

У випадку $m = 0$ та $\omega \equiv 1$ отримуємо простори

$$\mathcal{E}^\nu := \Big\{\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}) \mid \ \|\varphi\|_{\mathcal{E}^\nu} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|D^k \varphi\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\nu^k} < \infty\Big\} \quad \text{та} \quad \mathcal{E} := \bigcup\nolimits_{\nu > 0} \mathcal{E}^\nu.$$

Простір $\mathcal{E}$ складається з усіх цілих аналітичних функцій на $\mathbb{C}$ експоненціального типу, звуження яких на дійсну вісь $\mathbb{R}$ належить $L_1(\mathbb{R})$. Операторне числення у цьому класі функцій та у класі лінійних неперервних функціоналів на ньому вивчене у [5].

Введемо [10] простір

$$E := \bigcap\nolimits_{m,a} E^{(m,a,\omega)} = lim\ pr_{m,a} E^{(m,a,\omega)}$$

з топологією проективної границі, впорядкувавши m, a так, щоб вкладення $E^{(m+1,a+1,\omega)} \subset E^{(m,a,\omega)}$ були неперервними. Згідно з [10] простір E секвенціально повний (див. [9]), інваріантний стосовно дії ізометричної групи зсувів $T_s : \varphi(t) \to \varphi(t-s)$, $s \in \mathbb{R}$ на $L_1(\mathbb{R})$.

Через $\mathcal{L}(E)$ позначаємо алгебру лінійних неперервних операторів над простором E з сильною операторною топологією.

Елементи спряженого простору E' називаємо [10] узагальненими функціями експоненціального типу. Простір E' — локально опуклий лінійний топологічний простір. У [10] доведено, що E' є інваріантним щодо диференціювання, тому коректно визначена операція диференціювання

$$\langle \varphi \mid D^k g \rangle = (-1)^k \langle D^k \varphi \mid g \rangle, \qquad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{2}$$

для всіх функціоналів $g \in E'$ і всіх цілих функцій $\varphi \in E$ на $\mathbb{R}$ експоненціального типу. Операцію згортки функцій $f \in E'$ та $\varphi \in E$ визначаємо формулою

$$(f * \varphi)(t) := \langle \varphi(t-s) \mid f(s) \rangle = \langle T_s \varphi(t) \mid f(t) \rangle.$$

У [10] доведено, що для кожної $f \in E'$ оператор згортки

$$K_f : E \ni \varphi \longrightarrow f * \varphi \tag{3}$$

належить простору $\mathcal{L}(E)$, задовольняє співвідношення

$$K_f T_{-s} \varphi = T_{-s} K_f \varphi \qquad \forall \varphi \in E, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

і навпаки, якщо оператор $K_f \in \mathcal{L}(E)$ задовольняє умову (4), то існує єдиний функціонал $f \in E'$ такий, що оператор K_f набуває вигляду (3).

Згортку функцій $f, g \in E'$ визначаємо [10] формулою

$$\langle \varphi \mid f * g \rangle = [f * (g * \varphi)](0) \quad \forall \varphi \in E.$$

Тоді [10, 11]

$$(f * g) * \varphi = f * (g * \varphi) \quad \forall f, g \in E', \ \varphi \in E,$$

E' – топологічна алгебра щодо згортки

$$E' \times E' \ni (g, h) \longmapsto g * h \in E',$$

а E – її згорткова підалгебра.

За відомою теоремою Пейлі–Вінера–Шварца [12, с. 175], Фур'є-образ

$$\widehat{E} := \left\{ \widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\cdot\xi} \varphi(t)\, dt \ (\xi \in \mathbb{R}) \ : \ \varphi(t) \in E \right\}$$

простору E з індуктивною топологією при перетворенні Фур'є

$$\mathcal{F} \colon E \ni \varphi \longrightarrow \widehat{\varphi} \in \widehat{E}$$

складається з нескінченно диференційовних фінітних функцій на $\mathbb{R}$. Тому

$$\widehat{E} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{5}$$

де $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – класичний простір основних функцій Шварца. Згідно з [10]

$$\mathcal{F}(g * h) = \widehat{g * h} = \widehat{g} \cdot \widehat{h}, \qquad g, h \in E'$$

і тоді Фур'є-образ $\widehat{E'}$ простору E' – топологічна алгебра з поточковим множенням, а $\widehat{E}$ – її підалгебра щодо множення; $\langle \widehat{E} \mid \widehat{E'} \rangle$ утворює нову дуальну пару, що є Фур'є-образом дуальної пари $\langle E \mid E' \rangle$.

3. Алгебра Вінера $W_\pi(B)$**.** Нехай X — банахів рефлексивний простір, X' — дуальний до нього; $\mathcal{B}(X^n)$ — сукупність обмежених n-лінійних функціоналів на $X^n = X \times \ldots \times X$; $\mathcal{B}(X^n_s)$ — сукупність усіх симетричних n-лінійних функціоналів h, тобто таких, що $h(x_1, \ldots, x_n) = h(x_{s_1}, \ldots, x_{s_n})$ для кожного елемента $s = (s_1, \ldots, s_n)$ групи $\mathcal{G}_n$ перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$; $\mathcal{P}^n(X)$ — сукупність n-однорідних функціоналів $f : X \to \mathbb{C}$, тобто таких, що

$$f(x) = (h \circ \Delta_n)(x) \quad \forall x \in X \quad \text{та деякого} \quad h \in \mathcal{B}(X^n),$$

де Δ_n – вкладення X в X^n, а саме $\quad \Delta_n : X \longrightarrow X^n \qquad (x \longmapsto (x, \ldots, x))$.

Алгебричний проективний тензорний добуток n просторів Банаха

$$X^{\otimes n} = X \otimes \ldots \otimes X$$

складається з усіх скінченних сум

$$u = \sum_j x_{1j} \otimes \cdots \otimes x_{nj}, \qquad x_{ij} \in X, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \in \mathbb{N} \tag{6}$$

зі звичайними алгебричними операціями [13, 14].

Нехай $X^{\otimes n}_\pi$ — алгебричний тензорний добуток $X^{\otimes n}$ з проективною нормою [13]

$$\|u\|_\pi = \inf \sum_j \|x_{1j}\| \cdots \|x_{nj}\|.$$

Тут інфімум приймаємо за всіма скінченними зображеннями (6),

$X'^{\otimes n}_\pi$ — проективний тензорний добуток дуальних банахових просторів X' (відомо [3], IV.9, [15], що $X'^{\otimes n}_\pi$ є замкненим підпростором простору $(X^{\otimes n}_\pi)'$);

$\langle u \mid F'_n \rangle$ — значення лінійного функціоналу $F'_n \in X'^{\otimes n}_\pi$ на $u \in X^{\otimes n}_\pi$;

$x_1 \odot \ldots \odot x_n := \frac{1}{n!} \sum_{s=(s_1,\ldots,s_n) \in \mathcal{G}_n} x_{s_1} \otimes \ldots \otimes x_{s_n}$ — елементи симетричного проективного тензорного добутку $X^{\odot n}_\pi$;

$x^{\odot n} := x \odot \ldots \odot x \in X^{\odot n}_\pi, \ \ x^{\odot 0} := 1 \in \mathbb{C} \quad \forall x \in X$.

Згідно з [15] кожному функціоналу $F'_n \in X'^{\odot n}_\pi$ відповідає єдиний n-однорідний поліном F_n [16, 17] такий, що

$$F_n(x) := \langle x^{\odot n} \mid F'_n \rangle \text{ для всіх } x \in X.$$

Позначимо

$$\mathcal{P}^n_\pi(X) = \left\{ F_n \colon F'_n \in X'^{\odot n}_\pi \right\}, \ n = 1, 2, \ldots, \ \mathcal{P}^0_\pi(X) = \mathbb{C}.$$

На $\mathcal{P}^n_\pi(X)$ визначаємо норму

$$\|F_n\| := \|F'_n\|_\pi, \quad \forall F'_n \in X^{'\odot n}_\pi$$

та одержуємо ізометрію $\mathcal{P}^n_\pi(X)$ та $X'^{\odot n}_\pi$ [18, Prop. 1]. Зауважимо, що $\quad \mathcal{P}^n_\pi(X) \subset \mathcal{P}^n(X)$.

Користуючись подібним означенням для просторів Гільберта з [19], у [20] введена алгебра Вінера

$$W_\pi(X) := \Big\{F = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n \colon F_n \in \mathcal{P}_\pi^n(X)\Big\}$$

зі скінченною нормою $\|F\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \|F_n\|$.

При $X = \mathbb{C}$ отримуємо класичну алгебру Вінера.

Нехай $B = B(X) = \big\{x \in X \colon \|x\| < 1\big\}$ – відкрита одинична куля в X. Згідно з [18], $W_\pi(B)$ – банахова підалгебра з одиницею алгебри всіх обмежених аналітичних функцій на $B(X)$.

У [21] досліджено властивості секторіальних операторів на алгебрах типу Вінера. Функціональне числення для генераторів сильно неперервних груп ізометричних лінійних операторів, що діють на алгебрі Вінера $W_\pi(B)$, побудоване в [6] у Фур'є-образах просторів $\mathcal{E}$ та $\mathcal{E}'$. Тут будуємо його у Фур'є-образах просторів E, E' та визначаємо диференціальні властивості побудованого функціонального числення.

4. Функціональне числення на алгебрі Вінера. Нехай U_t $(t \in \mathbb{R})$ — C_0-група лінійних ізометричних операторів на X з генератором $-A$. Тоді на алгебрі $W_\pi(B)$ коректно визначена [18] C_0-група ізометричних операторів

$$\widehat{U}_t F(x) = F(U_t x), \quad x \in B, \quad F \in W_\pi(B).$$

Також $\widehat{U}_t$ є групою алгебричних автоморфізмів

$$\widehat{U}_t(F\cdot G) = \big(\widehat{U}_t F\big)\cdot\big(\widehat{U}_t G\big).$$

Справді, оскільки $F\cdot G = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} F_k\cdot G_{n-k}\Big)$, то

$$\begin{aligned}
\widehat{U}_t(F\cdot G)(x) &= (F\cdot G)(U_t x)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n} F_k(U_t x)\cdot G_{n-k}(U_t x)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n(U_t x)\cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} G_n(U_t x)\\
&= \big(\widehat{U}_t F\big)(x)\cdot\big(\widehat{U}_t G\big)(x), \quad x \in B.
\end{aligned}$$

Позначаємо через $\mathcal{L}(W_\pi)$ банахову алгебру всіх обмежених лінійних операторів на W_π. Нехай A' — спряжений до A, I' — одиничний оператор в X',

$A'_j := \underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'}_{j-1}\otimes A'\otimes\underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'}_{n-j}, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad A'_0 = I',$

$-\widehat{A}$ — генератор групи $\widehat{U}_t$.

5. Властивості фінітних функцій від оператора $\widehat{A}$. Для кожної $\varphi \in E$ визначаємо оператори

$$\widehat{\varphi}(A) = \int_{\mathbb{R}} U_t\varphi(t)\,dt,$$

$$[\widehat{\varphi}(A_j)]' := \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{j-1} \otimes [\widehat{\varphi}(A)]' \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

де $[\widehat{\varphi}(A)]'$ – спряжений до $\widehat{\varphi}(A) \in \mathcal{L}(X)$, $[\widehat{\varphi}(A_0)]' = I'$.

Оператори $\widehat{\varphi}(A)$ та $[\widehat{\varphi}(A)]'$ обмежені на X і $X'^{\odot n}_{\pi}$, відповідно.

Згідно з [18]

$$\widehat{A}F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} A'_j F'_n \right\rangle,$$

а за теоремою 1 [6] для кожної $\varphi \in E$ оператор $\widehat{\varphi}(\widehat{A})$

$$\widehat{\varphi}(\widehat{A})F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} [\widehat{\varphi}(A_j)]' F'_n \right\rangle, \qquad x \in B, \quad F \in W_\pi \tag{7}$$

належить до банахової алгебри $\mathcal{L}(W_\pi)$.

Теорема 1. *Для довільних* $\varphi, \psi \in E$

$$\widehat{(D^k\varphi)}(\widehat{A}) = \widehat{A}^k\, \widehat{\varphi}(\widehat{A}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$\widehat{(\varphi * \psi)}(\widehat{A}) = \widehat{\varphi}(\widehat{A})\widehat{\psi}(\widehat{A}). \tag{9}$$

Доведення. Доведемо спочатку диференціальну властивість (8). Для довільних $\varphi \in E$, $F \in W_\pi$, $x \in B$ знайдемо $\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x)$. Згідно з означенням

$$\begin{aligned}\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{(D\varphi)}(A_j)\right]' F'_n \right\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{(D\varphi)}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F'_n \right\rangle.\end{aligned}$$

Використовуючи властивість групи, доводимо, що

$$\widehat{(D\varphi)}(A) = \int_{\mathbb{R}} U_t(D\varphi)(t)dt = -\int_{\mathbb{R}} DU_t\varphi(t)dt = A\widehat{\varphi}(A),$$

тобто

$$\widehat{(D\varphi)}(A) = A\widehat{\varphi}(A). \tag{10}$$

Тоді $\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x)$ набуває вигляду

$$\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes [A\widehat{\varphi}(A)]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F'_n \right\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} [\widehat{\varphi}(A)]'\, A' F'_n \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} A'\, [\widehat{\varphi}(A)]'\, F'_n \right\rangle.$$

Для довільних $y \in D(A')$ матимемо

$$\sum_{j=1}^{n} A' \left[\widehat{\varphi}(A)\right]' y =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} I' y_1 \otimes \ldots \otimes I' y_{j-1} \otimes A' \left[\widehat{\varphi}(A)\right]' y_j \otimes I' y_{j+1} \otimes \ldots \otimes I' y_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A'_j \Big(I' y_1 \otimes \ldots \otimes I' y_{j-1} \otimes \left[\widehat{\varphi}(A)\right]' y_j \otimes I' y_{j+1} \otimes \ldots \otimes I' y_n \Big).$$

Врахувавши означення $\widehat{A}$ та $\widehat{\varphi}(\widehat{A}) \in \mathcal{L}(W_\pi)$, одержуємо

$$\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x) =$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{k=0}^{n} \frac{A'_k}{n!} \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in\mathcal{G}_n} \Big(\underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{k-1} \otimes \left[\widehat{\varphi}(A)\right]' \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-k} \Big) \Big(F'_{n,s_1} \otimes \ldots \otimes F'_{n,s_n} \Big) \right\rangle$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{k=0}^{n} A'_k \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{\varphi}(A_j)\right]' F'_n \right\rangle =$$

$$= \widehat{A} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{\varphi}(A_j)\right]' F'_n \right\rangle = \widehat{A}\, \widehat{\varphi}(\widehat{A})F(x),$$

а отже, для довільних $\varphi \in E$, $F \in W_\pi$, $x \in B$

$$\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x) = \widehat{A}\, \widehat{\varphi}(\widehat{A})F(x). \tag{11}$$

Так само для довільно вибраного k, враховуючи, що $\widehat{(D^k\varphi)}(A) = A^k \widehat{\varphi}(A)$ [11] та попередні перетворення, маємо

$$\widehat{(D^k\varphi)}(\widehat{A})F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{(D^k\varphi)}(A_j)\right]' F'_n \right\rangle =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{(D^k\varphi)}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F'_n \right\rangle =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[A^k \widehat{\varphi}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F'_n \right\rangle =$$

$$= \widehat{A}^k \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{\varphi}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F'_n \right\rangle =$$

$$= \widehat{A}^k \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \widehat{\varphi}(\widehat{A}_j) F'_n \right\rangle = \widehat{A}^k\, \widehat{\varphi}(\widehat{A})F(x).$$

Для довільних $\varphi, \psi \in E$ визначеною є згортка функцій $\varphi * \psi \in E$, $\widehat{\varphi}(A)\widehat{\psi}(A) \in \mathcal{L}(X)$ та відома властивість $\widehat{(\varphi * \psi)}(A) = \widehat{\varphi}(A)\widehat{\psi}(A)$ [11].

Для довільних $\varphi, \psi \in E$, $F \in W_\pi$, $x \in B$ знайдемо

$$\widehat{(\varphi * \psi)}(\widehat{A})F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{(\varphi * \psi)}(A_j)\right]' F_n' \right\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{(\varphi * \psi)}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F_n' \right\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{\varphi}(A)\widehat{\psi}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F_n' \right\rangle.$$

Звідси, як при доведенні попередньої властивості, отримуємо

$$\widehat{(\varphi * \psi)}(\widehat{A})F(x) = \widehat{\varphi}(\widehat{A})\,\widehat{\psi}(\widehat{A})F(x)$$

для довільних $F \in W_\pi$ та $x \in B$, а отже, властивість (9). Теорема доведена.

$\square$

6. Узагальнені функцій від оператора $\widehat{A}$ та їхні властивості. Визначимо поповнення

$$E(W_\pi) := E \otimes_\pi W_\pi$$

тензорного добутку $E \otimes W_\pi$ з відповідною проективною тензорною нормою.

З відомої теореми Гротендіка [3, с. 122] про зображення елементів проективного тензорного добутку випливає, що для кожної $F \in E(W_\pi)$ існує набір $\varphi_j \in E$, $j \in \mathbb{N}$ такий, що ряди

$$F = \sum_{j\in\mathbb{N}} F_j \otimes \varphi_j \qquad F_j \in W_\pi, \quad \varphi_j \in E \tag{12}$$

абсолютно збігаються в $E(W_\pi)$. Кожний елемент $F \in E(W_\pi)$ є W_π-значна ціла функція експоненціального типу

$$R \ni t \longmapsto F(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} F_j(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} F_j(x) \otimes \varphi_j(t), \quad F_j \in W_\pi, \quad \varphi_j \in E.$$

Отже, визначені елементи

$$\widehat{F} := \{ \sum_{j\in\mathbb{Z}^+} \widehat{\varphi}_j(\widehat{A})F_j : \quad F_j \in W_\pi,\ \varphi_j \in E\} \in \widehat{E}(W_\pi),$$

де $\widehat{\varphi}_j(\widehat{A})$ визначена формулою (7).

Підпростір

$$\widehat{E}(W_\pi) := \left\{ \widehat{F} \colon F \in E(W_\pi) \right\}$$

повний щодо норми, індукованої відображенням $E(W_\pi) \ni F \longmapsto \widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi)$ (доводиться як лема 5 у [4]).

Визначимо згортку розподілу експоненціального типу $g \in E'$ і W_π-значної цілої функції експоненціального типу $F \in E(W_\pi)$, поданої за допомогою ряду (12)

$$(F * g)(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} F_j(x) \otimes (g * \varphi_j)(t), \qquad x \in B, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

де $g * \varphi$ – згортка розподілу $g \in E'$ і $\varphi \in E$.

Підпростір $\widehat{E}(W_\pi)$ інваріантний щодо кожного

$$\widehat{K}_g : \widehat{K}_g \widehat{F} := \widehat{F * g}, \qquad g \in E'$$

(доводиться за схемою доведення леми 6 із [4]).

Позначаємо через $\mathcal{L}\left[\widehat{E}(W_\pi)\right]$ алгебру всіх обмежених лінійних операторів на просторі $\widehat{E}(W_\pi)$ з сильною операторною топологією.

Для $g \in E'$ визначимо лінійний оператор $\widehat{g}(\widehat{A})$ формулою

$$\begin{gathered} \widehat{g}(\widehat{A})\colon \widehat{E}(W_\pi) \ni \widehat{F} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \widehat{\varphi}_j(\widehat{A}) F_j \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F}, \\ \widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F} := \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} (\widehat{g * \varphi_j})(\widehat{A}) F_j \in \widehat{E}(W_\pi). \end{gathered} \tag{14}$$

Теорема 2. *Відображення*

$$\widehat{E'} \ni \widehat{g} \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A}) \in \mathcal{L}\left[\widehat{E}(W_\pi)\right]$$

є неперервним гомоморфізмом алгебри $\widehat{E'}$ на $\mathcal{L}\left[\widehat{E}(W_\pi)\right]$. Для довільної $g \in E'$

$$(\widehat{D^k g})(\widehat{A}) = \widehat{A}^k \widehat{g}(\widehat{A}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

де похідна Dg узагальненої функції g визначена формулою (2).

Доведення. За властивостями згортки та з означення простору $\widehat{E}$ одержуємо, що $\widehat{K}_g : \widehat{E} \longrightarrow \widehat{E}$. За означенням $\widehat{E}(W_\pi)$

$$\widehat{F}^m \to \widehat{F} \text{ у просторі } \widehat{E}(W_\pi) \text{ тоді і тільки тоді, коли}$$
$$F^m \to F \text{ у просторі } E(W_\pi), \quad m \to \infty.$$

Якщо ж $F^m \to F$, $m \to \infty$ у просторі $E(W_\pi)$, то за неперервністю K_g матимемо: $K_g F^m \to K_g F$, $m \to \infty$ у просторі E. Звідси знову за означенням $\widehat{E}(W_\pi)$ отримуємо $\widehat{K}_g \widehat{F^m} \to \widehat{K}_g \widehat{F}$, $m \to \infty$. Ми з'ясували, що $\widehat{K}_g \in \mathcal{L}(\widehat{E})$.

Для довільних узагальнених функцій f, g із рівності

$$K_{f*g} = K_f K_g$$

випливає

$$\widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \widehat{K}_g.$$

Отже, побудоване функціональне числення реалізує алгебричний гомоморфізм із згорткової алгебри узагальнених функцій на алгебру неперервних операторів над простором $\widehat{E}(W_\pi)$.

Щоб довести неперервність функціонального числення, використовуємо, що у просторі $\widehat{E}'$ топологія індукується з E', а в просторі E' задано слабку топологію. Отож, достатньо довести неперервність відображення

$$E' \ni g \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi) \text{ для кожного } \widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi).$$

За властивістю згортки одержуємо неперервність

$$E' \ni g \longrightarrow K_g \in \mathcal{L}(E(W_\pi)),$$

а звідси також неперервність відображення

$$E' \ni g \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F} \in E(W_\pi).$$

Якщо $g_m \to g$ у просторі E', то

$$(I \otimes K_{g_m})F \to (I \otimes K_g)F$$

у просторі $E(W_\pi)$. З означення $\widehat{E}$ матимемо $\widehat{K}_{g_m}\widehat{F} \to \widehat{K}_g\widehat{F}$ у просторі $\widehat{E}(W_\pi)$. Отже, відображення

$$E' \ni g \longrightarrow \widehat{K}_g\widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi)$$

є неперервним.

Доведемо диференціальну властивість (15). Використовуючи означення (14) узагальненої функції від оператора, для довільних $g \in E'$, $\widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi)$ матимемо

$$\widehat{(Dg)}(\widehat{A})\widehat{F} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} (\widehat{Dg * \varphi_j})(\widehat{A})F_j \tag{16}$$

з деякими функціями $F_j \in W_\pi$, $\varphi_j \in E$. За властивостями згортки

$$Dg * \varphi = g * D\varphi = D(g * \varphi).$$

Для кожної $F_j \in W_\pi$ матимемо

$$(\widehat{Dg * \varphi_j})(\widehat{A})F_j(x) = D\widehat{(g * \varphi_j)}(\widehat{A})F_j(x)$$

і ці функції визначаються формулою (7) (оскільки $g * \varphi \in E$ для довільних $g \in E'$, $\varphi \in E$)

$$\begin{aligned} &D\widehat{(g * \varphi_j)}(\widehat{A})F_j(x) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{k=0}^{n} \left[D\widehat{(g * \varphi_j)}(A_k)\right]' F_n' \right\rangle = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \left[\sum_{k=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes [D\widehat{(g * \varphi_j)}(A)]'}_{k} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-k}\right] F_n' \right\rangle \end{aligned}$$

для всіх $x \in B$. За доведеним у [10]

$$D\widehat{(g * \varphi_j)}(A) = A\,\widehat{(g * \varphi_j)}(A),$$

звідки попередній вираз набуває вигляду

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle x^{\odot n}\,\middle|\,\left[\sum_{k=0}^{n}\underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'\otimes[A(\widehat{g*\varphi_j})(A)]'}_{k}\otimes\underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'}_{n-k}\right]F_n'\right\rangle,$$

а останній, як при виведенні властивості (8), дорівнює

$$\widehat{A}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle x^{\odot n}\,\middle|\,\left[\sum_{k=0}^{n}\underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'\otimes[(\widehat{g*\varphi_j})(A)]'}_{k}\otimes\underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'}_{n-k}\right]F_n'\right\rangle=$$

$$=\widehat{A}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle x^{\odot n}\,\middle|\,\sum_{s=0}^{n}\left[(\widehat{g*\varphi_j})(A_k)\right]'F_n'\right\rangle=\widehat{A}\,(\widehat{g*\varphi_j})(\widehat{A})F_j(x),\quad x\in B.$$

Ми довели, що

$$(\widehat{Dg*\varphi_j})(\widehat{A})F_j(x)=\widehat{A}\,(\widehat{g*\varphi_j})(\widehat{A})F_j(x),\quad x\in B.$$

Звідси, на підставі формул (14) та (16), одержуємо бажану властивість (15) при $k=1$. Випадок $k=2,3,\ldots$ розглядаємо як при доведенні теореми 1 із використанням відомих відповідних властивостей функцій оператора A та властивостей згорток. $\square$

Список використаної літератури

1. *Balakrishnan A.V.* An operational calculus of infinitesimal operators of semigroups / A.V. Balakrishnan // Trans. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 91. — P. 330–351 (doi: 10.1090/5002-9947-1959-0107179-0.)
2. *Baeumer B.* Unbounded functional calculas for bounded groups with applications / B. Baeumer, M. Haase and M. Kovcs // J. Evol. Eqn. — 2009. — Vol. 9. — P. 171–195.
3. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства / Х. Шефер — М: Мир, 1971.
4. *Lozynska V.Ja.* Analytical distributions of exponential type / V.Ja. Lozynska, O.V. Lopushansky // Mat. met. and phys.-mech. fields. — 1999. — Vol. 42, №4. — P. 46–55.
5. *Lopushansky O.V.* Operator calculas in algebras of distributions of exponential type / O.V. Lopushansky, V.Ja. Lozynska // Mat. met. and phys.-mech. fields. — 2000. — Vol. 43, №3. — P. 24–33.
6. *Myaus O.M.* Functional calculus on a Wiener type algebra of analytic functions of infinite many variables / O.M. Myaus // Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech/Mat. — 2012. — Vol. 76. — P. 231–237.
7. *Parta M.I.* Operator calculas on the class of Sato's hyperfunctions / M.I. Parta, S.V. Sharyn // Carp. Math. Publ. — 2013. — Vol. 5, №1. — P. 114–120.
8. *Радыно Я.В.* Пространство векторов экспоненциального типа / Я.В. Радыно // Докл. АН БССР. — 1983. — Т. 27, №9. — С. 791–793.
9. *Лопушанський О.В.* Операторне числення на ультрагладких векторах / О.В. Лопушанський // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, №4. — С. 502–513.
10. *Lozynska V.Ja.* On generalized functions of exponential type / V.Ja. Lozynska, O.M. Myaus // Prykladni prob. of mech. and mat. — 2006. — Vol.4. — P. 48–53.

11. *Lozynska V. Ja.* Distributions of exponential type and functional calculas / V. Ja. Lozynska, O.M. Myaus // Mat. meth. and phys.-mech. fields. — 2004. — Vol. 4, №2. — P. 44–49.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров — М.: Наука, 1981.
13. *Grothendieck A.* Résumé de la théorie métrique des products tensorels topologiques / A. Grothendieck // Bol. Soc Math São Paulo. — 1953. — Vol. 8. — P. 1–79.
14. *Grotendieck A.* Products tensoriel topologues et espases nucleaire / A. Grothendieck // Mem. Amer. Math. Soc. — 1955. — Vol. 16, №2. — P. 1–140.
15. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces / S. Dineen — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.
16. *Aron R.* An introduction to polynomials on Banach spaces / R. Aron // Extracta Mathematics. — 2002. — Vol. 17, №3. — P. 303–329.
17. *Bochnak J.* Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces / J. Bochnak, J. Siciak // Studia Mathematica. — Vol. XXXIX. — P. 59–76.
18. *Bednarz A.* Exponential Type Vectors in Wiener algebras on a Banach ball / A. Bednarz // Opuscula Matematica. — 2008. — Vol. 28, №1. — P. 5–17.
19. *Lopushansky O., Zagorodnyuk A.* Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables / // Annales Polonici Mathematici. — 2003. — Vol. 81, №2. — P. 111–122.
20. *Bednarz A.* Exponential Type Vectors of Isometric Group Generators / A. Bednarz, O.V. Lopushansky // Matematychni Studii. — 2002. — Vol. 18, №1. — P. 99–106.
21. *Lopushansky A.* Sectorial operators on Wiener algebras of analytic functions / A. Lopushansky // Topology. — 2009. — Vol. 48, №2-4. — P. 105–110.

Стаття: надійшла до редколегії 25.04.2016
прийнята до друку 08.06.2016

FUNCTIONAL CALCULUS ON WIENER TYPE ALGEBRAS AND ITS DIFFERENTIAL PROPERTIES

Olga MYAUS

Lviv Polytechnic National University,
Stepan Bandera str., 12, Lviv, Ukraine
e-mail: myausolya@mail.ru

Hille-Phillips-Balacrishnan functional calculus on Wiener algebras of bounded analytical functions on unit ball and its differential properties are obtained.

Key words: generalized function, operator calculus, generator of group, Wiener type algebra.