ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 117–128
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 117–128

УДК 517.53

ПРО АДАМАРОВІ КОМПОЗИЦІЇ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Оксана МУЛЯВА, Степан ФЕДИНЯК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: info@nuft.edu.ua, fedynyak@yahoo.com

Для цілих і аналітичних в одиничному крузі функцій у термінах узагальнених порядків досліджено зростання адамарових композицій їхніх похідних Гельфонда-Леонтьєва. Вивчено поводження максимальних членів таких композицій.

Ключові слова: аналітична функція, похідна Гельфонда-Леонтьєва, композиція Адамара, максимальний член.

Для степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$

з радіусом збіжності $R[f] = R \in [0, \infty]$ і степеневого ряду $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$ з $R[l] = R \in [0, \infty]$ і $l_k > 0$ для всіх $k \geq 0$ степеневий ряд

$$D_l^{(n)} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k \tag{2}$$

називається [1] похідною Гельфонда-Леонтьєва n-го порядку. Якщо $l(z) = e^z$, то $D_l^{(n)} f(z) = f^{(n)}(z)$ є звичайною похідною n-го порядку.

Степеневий ряд

$$(f * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k z^k \tag{3}$$

називається адамаровою композицією ряду (1) і ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k = g(z)$. Відомо [2], що $R[f * g] \geq R[f]R[g]$ і обернена нерівність може не виконуватись. Властивості адамарових композицій використовують для дослідження аналітичних продовжень функцій (див., наприклад, [3], [4], с.31–57).

Зрозуміло, що не завжди радіус збіжності похідної Гельфонда-Леонтьєва ряду (1) збігається з радіусом збіжності цього ряду. Але правильна така лема [5].

Лема 1. *Для того, щоб для кожного ряду (1) рівності* $R[f]=+\infty$ *і* $R[D_l^{(n)}f]=+\infty$ *були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб*

$$0<q=\varliminf_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}\le\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}=Q<+\infty, \tag{4}$$

а для еквівалентності рівностей $R[f]=1$ *і* $R[D_l^{(n)}f]=1$ *необхідною і достатньою є умова*

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}=1. \tag{5}$$

Щодо одночасної аналітичності похідної Гельфонда-Леонтьєва адамарової композиції

$$D_l^{(n)}(f*g)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_k}{l_{k+n}}f_{k+n}g_{k+n}z^k \tag{6}$$

функцій f і g та адамарової композиції

$$(D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^2 f_{k+n}g_{k+n}z^k \tag{7}$$

їхні похідні Гельфонда-Леонтьєва в [5] доведено як лему.

Лема 2. *За умови (4) рівносильними є рівності* $R[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=+\infty$ *і* $R[D_l^{(n)}(f*g)]=+\infty$*, а за умови (5) такими є рівності* $R[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=1$ *і* $R[D_l^{(n)}(f*g)]=1$.

Якщо $R[f]>0$, то для $0\le r<R[f]$ нехай $M(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $\mu(r,f)=\max\{|f_k|r^k:k\ge 0\}$ — максимальний член ряду (1), а $\nu(r,f)=\max\{n:|f_k|r^k=\mu(r,f)\}$ — його центральний індекс.

Найвживанішими характеристиками зростання цілої функції f є її порядок $\varrho[f]$ і нижній порядок $\lambda[f]$, означені формулами

$$\lambda[f]=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r},\quad \varrho[f]=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}.$$

Для функцій, аналітичних в крузі $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$, нижній порядок $\lambda^*[f]$ і порядок $\varrho^*[f]$ вводять за формулами

$$\lambda^*[f]=\varliminf_{r\uparrow 1}\frac{\ln^+\ln M(r,f)}{-\ln(1-r)},\quad \varrho^*[f]=\varlimsup_{r\uparrow 1}\frac{\ln^+\ln M(r,f)}{-\ln(1-r)}.$$

Основними в [5] є такі теореми.

Теорема A. Нехай f і g — цілі функції. Якщо виконується умова (4) з $q>1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=\lambda[f*g],$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=\varrho[f*g],$$

якщо

$$0<\varliminf_{k\to\infty}\frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}}\le\varlimsup_{k\to\infty}\frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}}<+\infty, \tag{8}$$

то

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=n\lambda[f*g],$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=n\varrho[f*g].$$

Умова (4) з $q>1$ в теоремі А є істотною [5].

Теорема B. Нехай f і g — аналітичні в $\mathbb{D}$ функції і $R[f*g]=1$. Тоді за умови (9)

$$n\lambda^*[f*g]\le\varliminf_{r\uparrow1}\frac{1}{-\ln(1-r)}\ln^+\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le n(\lambda^*[f*g]+1)$$

і

$$n\varrho^*[f*g]\le\varlimsup_{r\uparrow1}\frac{1}{-\ln(1-r)}\ln^+\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le n(\varrho^*[f*g]+1).$$

У [5] в термінах порядку та нижнього порядку також досліджено поводження відношень $\dfrac{\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}$ і $\dfrac{\mu(r,D_l^{(m)}f*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}$ з $n>m$.

Тут ми перенесемо результати з [5] на випадок узагальнених порядків, які ввів М.М. Шеремета.

Через L позначимо клас додатних неперервних на $(-\infty,+\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x)=\alpha(x_0)$ для $-\infty<x\le x_0$ і $\alpha(x)\uparrow+\infty$ при $x_0\le x\to+\infty$. Будемо говорити, що $\alpha\in L^0$, якщо $\alpha\in L$ і $\alpha((1+o(1))x)=(1+o(1))\alpha(x)$ при $x\to+\infty$. Зрештою, $\alpha\in L_{\text{пз}}$, якщо $\alpha\in L$ і $\alpha(cx)=(1+o(1))\alpha(x)$ при $x\to+\infty$ для кожного $c\in(0,+\infty)$, тобто α — повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{пз}}\subset L^0$.

Для $\alpha\in L$ і $\beta\in L$ узагальненими порядком $\varrho_{\alpha\beta}[f]$ і нижнім порядком $\lambda_{\alpha\beta}[f]$ цілої функції f називаються [6] величини

$$\varrho_{\alpha\beta}[f]=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(\ln r)},\quad \lambda_{\alpha\beta}[f]=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(\ln r)}.$$

Для функцій, аналітичних в крузі $\mathbb{D}$, узагальнені нижній порядок $\lambda^*_{\alpha\beta}[f]$ і порядок $\varrho^*_{\alpha\beta}[f]$ вводяться [7] за формулами

$$\lambda^*_{\alpha\beta}[f]=\varliminf_{r\uparrow1}\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(1/(1-r))},\quad \varrho^*_{\alpha\beta}[f]=\varlimsup_{r\uparrow1}\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(1/(1-r))}.$$

Якщо в означеннях узагальнених порядків функції (1) замість $\ln M(r,f)$ поставимо $\ln \mu(r,f)$ або $\nu(r,f)$, то отримаємо величини, які позначимо, відповідно, через $\varrho_{\alpha\beta}[\ln \mu]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\ln \mu]$, $\varrho_{\alpha\beta}[\nu]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\nu]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln \mu]$, $\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln \mu]$, $\varrho^*_{\alpha\beta}[\nu]$, $\lambda^*_{\alpha\beta}[\nu]$.

Лема 3. *Нехай $\alpha \in L_{пз}$, $\beta \in L^0$ і для кожного $c \in (0, +\infty)$*

$$\alpha(x\alpha^{-1}(c\beta(x))) = (1 + o(1))c\beta(x), \quad x \to +\infty. \tag{9}$$

Тоді, якщо f — ціла функція, то $\varrho_{\alpha\beta}[f] = \varrho_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \varrho_{\alpha\beta}[\nu] = \varrho_{\alpha\beta}[f']$ і $\lambda_{\alpha\beta}[f] = \lambda_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \lambda_{\alpha\beta}[\nu] = \lambda_{\alpha\beta}[f']$.

Якщо ж f — аналітична в $\mathbb{D}$ функція, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |f_k| = +\infty$ і $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to +\infty$, то $\varrho^*_{\alpha\beta}[f] = \varrho^*_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \varrho^*_{\alpha\beta}[\nu] = \varrho^*_{\alpha\beta}[f']$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f] = \lambda^*_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \lambda^*_{\alpha\beta}[\nu] = \lambda^*_{\alpha\beta}[f']$.

Доведення. З нерівності Коші $\mu(r,f) \le M(r,f)$ отримуємо $\varrho_{\alpha\beta}[\ln \mu] \le \varrho_{\alpha\beta}[f]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\ln \mu] \le \lambda_{\alpha\beta}[f]$, $\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln \mu] \le \varrho^*_{\alpha\beta}[f]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln \mu] \le \lambda^*_{\alpha\beta}[f]$. З іншого боку, нехай $0 < \gamma(r) < R[f] - r$. Тоді

$$M(r,f) \le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|(r+\gamma(r))^k \left(\frac{r}{r+\gamma(r)}\right)^k \le \mu(r+\gamma(r), f)\frac{r+\gamma(r)}{\gamma(r)}.$$

Якщо $R[f] = +\infty$, то виберемо $\gamma(r) = \varepsilon r$, де $0 < \varepsilon < 1$. Тоді $\ln M(r,f) \le \le \ln \mu((1+\varepsilon)r, f) + \ln((1+\varepsilon)/\varepsilon) = (1+o(1)) \ln \mu((1+\varepsilon)r, f)$ при $r \to +\infty$ і, якщо $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$, то легко отримуємо нерівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln \mu] \ge \varrho_{\alpha\beta}[f]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[\ln \mu] \ge \lambda_{\alpha\beta}[f]$.

Якщо ж $R[f] = 1$, то виберемо $\gamma(r) = \varepsilon(1-r)$, де $0 < \varepsilon < 1$. Тоді $\ln M(r,f) \le \ln \mu(r + \varepsilon(1-r), f) + \ln(1/(\varepsilon(1-r))$, і отже,

$$\begin{aligned}\alpha(\ln M(r,f)) &\le \alpha(2\max\{\ln \mu(r+\varepsilon(1-r), f),\, \ln(1/(\varepsilon(1-r)))\}) = \\ &= (1+o(1))\alpha(\max\{\ln \mu(r+\varepsilon(1-r), f),\, \ln(1/(\varepsilon(1-r)))\}) \le \\ &\le (1+o(1))(\alpha(\ln \mu(r+\varepsilon(1-r), f)) + \alpha(\ln(1/(\varepsilon(1-r))))), \quad r \uparrow 1.\end{aligned}$$

Оскільки $\alpha \in L^0$ і $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to +\infty$, то отримуємо

$$\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(1/(1-r))} \le \frac{\alpha(\ln \mu(r+\varepsilon(1-r), f))}{\beta(1/(1-r-\varepsilon(1-r)))} \frac{\beta(1/(1-r-\varepsilon(1-r)))}{\beta(1/(1-r))},$$

тобто

$$\varrho^*_{\alpha\beta}[f] \le \varrho^*_{\alpha\beta}[\ln \mu]A(\varepsilon) \text{ і } \lambda^*_{\alpha\beta}[f] \le \lambda^*_{\alpha\beta}[\ln \mu]A(\varepsilon),$$

де $A(\varepsilon) = \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\beta(x/(1-\varepsilon))}{\beta(x)}$.

В [8] доведено таку властивість класу L^0: *якщо $\beta \in L^0$ і $\varepsilon \in (0,1)$, то $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\beta((1+\varepsilon)x)}{\beta(x)} \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.* Тому $A(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, і отже, з огляду на довільність ε правильні нерівності $\varrho^*_{\alpha\beta}[f] \le \varrho^*_{\alpha\beta}[\ln \mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f] \le \lambda^*_{\alpha\beta}[\ln \mu]$. Рівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \varrho_{\alpha\beta}[f]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \lambda_{\alpha\beta}[f]$, $\varrho^*_{\alpha\beta}[f] = \varrho^*_{\alpha\beta}[\ln \mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f] = \lambda^*_{\alpha\beta}[\ln \mu]$ доведено.

Добре відомо [9, с. 13], що за умови зростання функції $\ln\,\mu(r,f)$ для $0 \le r_0 < r < R[f]$

$$\ln\,\mu(r,f) - \ln\,\mu(r_0,f) = \int_{r_0}^{r} \nu(t,f) d\ln t.$$

Тому

$$\ln\,\mu(r,f) - \ln\,\mu(r_0,f) \le \nu(r,f)\ln\,(r/r_0)$$

і для $0 < \gamma(r) < r - r_0$

$$\ln\,\mu(r,f) - \ln\,\mu(r_0,f) \ge \int_{r-\gamma(r)}^{r} \nu(t,f) d\ln t \ge \nu(r-\gamma(r),f)\ln\,\frac{r}{r-\gamma(r)}.$$

Якщо $R[f] = +\infty$, то виберемо $r_0 = 1$ і $\gamma(r) = \varepsilon r$, де $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

$$\ln\,\mu(r,f) - \ln\,\mu(r_0,f) \ge \nu((1-\varepsilon)r,f)\ln\,(1/(1-\varepsilon)),$$

звідки з огляду на умови $\alpha \in L_{\text{пз}}$, $\beta \in L^0$ і наведену вище властивість функцій з класу L^0, як у доведенні нерівностей $\varrho^*_{\alpha\beta}[f] \le \varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f] \le \lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$, отримуємо нерівності $\varrho_{\alpha\beta}[\nu] \le \varrho_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[\nu] \le \lambda_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$. З іншого боку,

$$\ln\,\mu(r,f) \le \ln\,\mu(r_0,f) + \nu(r,f)(\ln\,r - \ln\,r_0) = (1+o(1))\nu(r,f)\ln\,r \text{ при } r \to +\infty,$$

і, якщо $\nu(r_k,f) \le \alpha^{-1}(c\beta(\ln\,r_k))$, то з огляду на умову (9)

$$\alpha(\ln\,\mu(r_k,f)) \le (1+o(1))\alpha(\ln\,r_k\alpha^{-1}(c\beta(\ln\,r_k))) = (1+o(1))c\beta(\ln\,r_k)$$

при $k \to \infty$. Звідси отримуємо нерівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\,\mu] \le \varrho_{\alpha\beta}[\nu]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\,\mu] \le \lambda_{\alpha\beta}[\nu]$.

Якщо $R[f] = 1$, то виберемо $r_0 = 1/2$ і $\gamma(r) = \varepsilon(1-r)$, де $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

$$\ln\,\mu(r,f) \le \ln\,\mu(1/2,f) + \nu(r,f)\ln\,2,$$

звідки випливають нерівності $\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu] \le \varrho^*_{\alpha\beta}[\nu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu] \le \lambda^*_{\alpha\beta}[\nu]$. З іншого боку, оскільки з умови $\varlimsup\limits_{k\to\infty} |f_k| = +\infty$ випливає зростання функції $\ln\,\mu(r,f)$ до $+\infty$, то

$$\begin{aligned}\ln\,\mu(r,f) &\ge \ln\mu(r_0,f) + \nu(r-\varepsilon(1-r),f)\ln\frac{r}{r-\varepsilon(1-r)} = \\ &= (1+o(1))\varepsilon(1-r)\nu(r-\varepsilon(1-r),f),\end{aligned}$$

тобто

$$\nu(r-\varepsilon(1-r),f) \le (1+o(1))\frac{\ln\,\mu(r,f)}{\varepsilon(1-r)}, \quad r \uparrow 1.$$

Тому, якщо $\ln\,\mu(r_k,f) \le \alpha^{-1}(c\beta(1/(1-r_k)))$, то з огляду на умови (9) і $\alpha \in L_{\text{пз}}$

$$\begin{aligned}\alpha(\nu(r_k-\varepsilon(1-r_k),f)) &\le \alpha\left((1+o(1))\frac{1}{\varepsilon(1-r_k)}\alpha^{-1}\left(c\beta\left(\frac{1}{1-r_k}\right)\right)\right) = \\ &= (1+o(1))c\beta\left(\frac{1}{1-r_k}\right)\end{aligned}$$

при $k \to \infty$. Звідси випливає, що

$$\frac{\alpha(\nu(r_k-\varepsilon(1-r_k),f))}{\beta(1/(1-(r_k-\varepsilon(1-r_k)))} \le (1+o(1))c\frac{\beta(1/(1-r_k))}{\beta(1/(1+\varepsilon)(1-r_k))}, \quad k \to \infty,$$

звідки з огляду на властивість функцій з класу L^0 і довільність ε отримуємо нерівності $\varrho^*_{\alpha\beta}[\nu] \le \varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[\nu] \le \lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$. Рівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\,\mu] = \varrho_{\alpha\beta}[\nu]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\,\mu] = \lambda_{\alpha\beta}[\nu]$, $\varrho^*_{\alpha\beta}[\nu] = \varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[\nu] = \lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ доведено.

Для $0 < \gamma(r) < R[f] - r$ з інтегральної формули Коші

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z| = \gamma(|z|)} \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau - z)^2}$$

отримуємо нерівність $M(r, f') \le M(r + \gamma(r), f)/\gamma(r)$, а з огляду на формулу Лейбніца-Ньютона $f(z) = \int\limits_0^z f'(\tau)d\tau + f(0)$ правильна нерівність $M(r, f) \le M(r, f') + |f(0)|$. Якщо $R[f] = +\infty$, то виберемо $\gamma(r) = 1$ і з останніх двох нерівностей одержимо рівності $\varrho_{\alpha\beta}[f'] = \varrho_{\alpha\beta}[f]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[f'] = \lambda_{\alpha\beta}[f]$. Якщо $R[f] = 1$, то виберемо $\gamma(r) = \varepsilon(1 - r)$, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді, як вище,

$$\begin{aligned} \alpha(\ln\, M(r, f')) &\le \alpha(\ln\, M(r + \varepsilon(1 - r), f) + \ln(1/(\varepsilon(1 - r))) \le \\ &\le (1 + o(1))(\alpha(\ln\, M(r + \varepsilon(1 - r), f) + \alpha(\ln(1/(1 - r))), \quad r \uparrow 1. \end{aligned}$$

Оскільки $\alpha(\ln x) = o(\beta(x))$ при $x \to +\infty$, то використовуючи властивість функцій з класу L^0 і довільність ε, отримуємо нерівності $\varrho^*_{\alpha\beta}[f'] \le \varrho^*_{\alpha\beta}[f]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f'] \le \lambda^*_{\alpha\beta}[f]$. Протилежні нерівності випливають з нерівності $M(r, f) \le M(r, f') + |f(0)|$. Лему 3 доведено. □

Перейдемо до зростання похідних Гельфонда-Леонтьєва.

Лема 4. *Нехай $\alpha \in L_{пз}$, $\beta \in L^0$ і для кожного $c \in (0, +\infty)$ і виконується умова (9). Тоді, якщо f і g — цілі функції, а послідовність (l_k) задовольняє умову (4), то $\lambda_{\alpha\beta}[D^{(n)}_l f * D^{(n)}_l g] = \lambda_{\alpha\beta}[D^{(n)}_l (f * g)] = \lambda[f * g]$ і $\varrho_{\alpha\beta}[D^{(n)}_l f * D^{(n)}_l g] = \varrho_{\alpha\beta}[D^{(n)}_l (f * g)] = \varrho[f * g]$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Спочатку доведемо, що $\lambda_{\alpha\beta}[D^{(n)}_l f] = \lambda_{\alpha\beta}[f]$ і $\varrho_{\alpha\beta}[D^{(n)}_l f] = \varrho_{\alpha\beta}[f]$. Достатньо розглянути випадок $n = 1$. З умови (4) випливає існування таких чисел $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$, що $q_1^k \le l_k/l_{k+1} \le q_2^k$ для всіх $k \ge 0$. Тому, як доведено в [5], правильні асимптотичні нерівності

$$(1 + o(1)) \ln\, \mu(q_1 r, f) \le \ln\, \mu(r, D^{(1)}_l f) \le (1 + o(1)) \ln\, \mu(q_2 r, f), \quad r \to +\infty,$$

тобто за умов $\alpha \in L^0$, $\beta \in L^0$ отримуємо рівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\, \mu(\cdot, D^{(1)}_l f] = \varrho_{\alpha\beta}[\ln\, \mu(\cdot, f]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\, \mu(\cdot, D^{(1)}_l f] = \lambda_{\alpha\beta}[\ln\, \mu(\cdot, D_l(1) f]$, звідки з огляду на лему 3 випливають потрібні рівності. Отже, $\lambda_{\alpha\beta}[D^{(n)}_l (f * g)] = \lambda[f * g]$ і $\varrho_{\alpha\beta}[D^{(n)}_l (f * g)] = \varrho[f * g]$. Щоб довести рівності $\lambda[D^{(n)}_l f * D^{(n)}_l g)] = \lambda[D^{(n)}_l (f * g)]$ і $\varrho[D^{(n)}_l f * D^{(n)}_l g)] = \varrho[D^{(n)}_l (f * g)]$, треба зауважити, що [5], $q_1^n \mu(r, D^{(n)}_l (f * g)) \le \mu(r, D^{(n)}_l f * D^{(n)}_l g) \le q_2^n \mu(r, D^{(n)}_l (f * g))$, і використати наведену вище аргументацію. Лему 4 доведено.

□

Лема 5. *Нехай $\alpha \in L_{пз}$, $\beta \in L^0$, для кожного $c \in (0, +\infty)$ виконується умова (9) і $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to +\infty$. Тоді, якщо f і g — аналітичні $\mathbb{D}$ функції, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} |f_k||g_k| =$*

$+\infty$ *а послідовність* (l_k) *задовольняє умову (8), то* $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]=\lambda[f*g]$ *і* $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]=\varrho[f*g]$ *для кожного* $n\in\mathbb{N}$.

Доведення. Спочатку доведемо таке: якщо $\varlimsup\limits_{k\to\infty}|f_k|=+\infty$, то $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f]=\lambda^*_{\alpha\beta}[f]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f]=\varrho^*_{\alpha\beta}[f]$. Достатньо розглянути випадок $n=1$. З (8) випливає існування таких чисел $0<h_1\le h_2<+\infty$, що $h_1(k+1)\le l_k/l_{k+1}\le h_2(k+1)$ для всіх $k\ge 0$. Тому $\mu(r,D_l^{(1)}f)\le h_2\max\{(k+1)|f_{k+1}|r^k:\,k\ge 0\}=h_2\mu(r,f')$ і, аналогічно, $\mu(r,D_l^{(1)}f)\ge h_1\mu(r,f')$, звідки випливає, що $\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu(\cdot,D_l^{(1)}f)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu(\cdot,f')]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu(\cdot,D_l^{(1)}f)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu(\cdot,f')]$. Тому за лемою 3 $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(1)}f)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[f']=\lambda^*_{\alpha\beta}[f]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(1)}f)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[f']=\varrho^*_{\alpha\beta}[f]$. Отже, $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[f*g]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[f*g]$.

Щоб довести, що $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$, треба зауважити, що за умови (8) правильні [5] нерівності $h_1^n\mu(r,F^{(n)})\le\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)\le h_2^n\mu(r,F^{(n)})$, де

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_k}{l_{k+n}}f_{k+n}g_{k+n}z^{k+n}=z^nD_l^{(n)}(f*g)(z).$$

Звідси і леми 3 випливає, що $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[F^{(n)}]=\lambda^*_{\alpha\beta}[F]=\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[F^{(n)}]=\varrho^*_{\alpha\beta}[F]=\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$. Лему 5 доведено. □

Використовуючи леми 3 — 5, доведемо тепер теореми, які узагальнюють або доповнюють теореми А і Б. Почнемо з випадку, коли послідовність (l_k) задовольняє умову (4).

Теорема 1. *Нехай* $\alpha\in L_{nз}$, $\beta\in L^0$ *і для кожного* $c\in(0,+\infty)$ *виконується умова (9). Тоді, якщо* f *і* g *— цілі функції, а послідовність* (l_k) *задовольняє умову (4) з* $q>1$, *то для* $n<m$

$$\begin{aligned}\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)&=\\=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{\mu(r,D_l^{(m)}f*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\right)&=\\=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)&=\lambda_{\alpha\beta}[f*g]\end{aligned}\tag{10}$$

і

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)=\\
&\quad=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{\mu(r,D_l^{(m)}f*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\right)=\\
&\quad=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g]. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Доведення. Будемо використовувати доведені в [5] такі нерівності:

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}}\le\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)+n}} \qquad (12)$$

і

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n-m}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\le\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le\frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n}}. \qquad (13)$$

Доведемо спочатку останні рівності в (12) і (13). З (4) з $q>1$ ввипливає існування таких чисел $1<q_1\le q_2<+\infty$, що $q_1^{kn}\le l_k/l_{k+n}\le q_2^{kn}$ для всіх $k\ge k_0$. Тому з огляду на (12)

$$n\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\ln q_1\le\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le n\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)\ln q_2, \qquad (14)$$

для $r\ge r_0$. За лемою 3

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\alpha(\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}{\beta(\ln r)}=\lambda_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)],$$

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\alpha(\nu(r,D_l^{(n)}(f*g)))}{\beta(\ln r)}=\varrho_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$$

і такі ж рівності правильні, якщо замість $D_l^{(n)}(f*g)$ поставити $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$, оскільки $\alpha\in L_{\text{пз}}$, то з (14) отримуємо потрібні рівності.

Далі, за виконання умови (4) з $q>1$ з (13) замість (14) тепер для всіх досить великих $r>0$ отримуємо

$$(m-n)\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\ln q_1\le\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le(m-n)\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))\ln q_2,$$

звідки, з огляду на лему 3, випливають рівності

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g]$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g].$$

Нарешті, враховуючи, що ряд (7) відрізняється від ряду (6) тільки тим, що замість l_k/l_{k+n} стоїть $(l_k/l_{k+n})^2$, з огляду на (13) матимемо

$$\left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n-m}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)^2\leq\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}f^*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\leq\left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n}}\right)^2 \quad (15)$$

для всіх досить великих $r>0$, звідки, як і раніше, отримуємо рівності

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}f^*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g]$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}f^*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g]$$

Теорему 1 доведено.

□

Перейдемо до розляду випадку, коли послідовність (l_k) задовольняє умову (8).

Теорема 2. *Нехай $\alpha\in L_{nз}$, $\beta\in L^0$ і для кожного $c\in(0,+\infty)$ виконується умова (9). Тоді, якщо f і g — цілі функції, а послідовність (l_k) задовольняє умову (8) то:*

1) для $n\geq 1$

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\sqrt[n]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g]$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\sqrt[n]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g];$$

2) для $m>n$

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(r\cdot\sqrt[m-n]{\frac{\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g],$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(r\cdot\sqrt[m-n]{\frac{\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g];$$

3) для $m>n$

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\sqrt{r}\cdot\sqrt[2(m-n)]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g],$$

і

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\,\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\sqrt{r}\cdot\sqrt[2(m-n)]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g].$$

Доведення. З (8) випливає існування таких чисел $0<h_1\le h_2<+\infty$, що $h_1k^n\le l_k/l_{k+n}\le h_2k^n$ для всіх $k\ge 0$. Тому з (12) для всіх $r\ge r_0$ отримаємо

$$h_1\nu^n(r,D_l^{(n)}(f*g))\le\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le h_2\nu^n(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g),$$

тобто

$$\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\sqrt[n]{h_1}\le\sqrt[n]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\le\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)\sqrt[n]{h_2},\qquad(16)$$

звідки з огляду на умову $\alpha\in L_{\text{пз}}$ і лему 3 отримуємо твердження 1) теореми 2.

Далі, з (13) для всіх досить великих $r>0$ матимемо

$$h_1\nu^{m-n}(r,D_l^{(n)}(f*g))\le\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le h_2\nu^{m-n}(r,D_l^{(m)}(f*g)),$$

тобто

$$\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\sqrt[m-n]{h_1}\le\sqrt[m-n]{\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\le\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))\sqrt[m-n]{h_1},\quad(17)$$

звідки отримуємо твердження 2) теореми 2.

Нарешті, з (15) випливає, що

$$\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\sqrt[2(m-n)]{h_1}\le\sqrt[2(m-n)]{\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}f*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}}\le$$
$$\le\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))\sqrt[2(m-n)]{h_1},\qquad(18)$$

звідки одержуємо твердження 3). Теорему 2 доведено.

□

Використовуючи (16) — (18) та леми 3 — 5, подібно доводиться теорема 3.

Теорема 3. *Нехай $\alpha\in L_{пз}$, $\beta\in L^0$, для кожного $c\in(0,+\infty)$ виконується умова (9) і $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to+\infty$. Тоді, якщо f і g — аналітичні в $\mathbb{D}$ функції, $\underline{\lim}_{k\to\infty}|f_k||g_k|=+\infty$, а послідовність (l_k) задовольняє умову (8) то:*

1) для $n \geq 1$

$$\varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(\sqrt[n]{\frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))}}\right) = \lambda^*_{\alpha\beta}[f * g]$$

і

$$\varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(\sqrt[n]{\frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))}}\right) = \varrho^*_{\alpha\beta}[f * g];$$

2) для $m > n$

$$\varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(r \cdot \sqrt[m-n]{\frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f * g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))}}\right) = \lambda^*_{\alpha\beta}[f * g],$$

і

$$\varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(r \cdot \sqrt[m-n]{\frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f * g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))}}\right) = \varrho^*_{\alpha\beta}[f * g];$$

3) для $m > n$

$$\varliminf_{r\uparrow 1} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(\sqrt{r} \cdot \sqrt[2(m-n)]{\frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))}}\right) = \lambda^*_{\alpha\beta}[f * g],$$

і

$$\varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(\sqrt{r} \cdot \sqrt[2(m-n)]{\frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))}}\right) = \varrho^*_{\alpha\beta}[f * g].$$

Зауважимо, що умови теорем 1 — 2 задовольняють, наприклад, функції $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$. Тому з теорем 1 і 2 випливає теорема А. Функції $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$ умову (9) не задовольняє, і видно, що теорема 3 не є узагальненням теореми Б, а її доповненням.

Література

1. *Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье// Матем. сб. — Т.23. N 3. — 1957. — С. 477–500.
2. *Hadamard J.* Theoreme sur le series entieres // Acta math. Bd. — 22. 1899. — S. 55–63.
3. *Hadamard J.* La serie de Taylor et son prolongement analytique // Scientia phys.-math. — N 12. — 1901. — P. 42–63.
4. *Л. Бибербах* Аналитическое продолжение — М.: Наука, 1967. — 239 с.
5. *Луговая Л.Л., Мулява О.М., Шеремета М.Н.* Свойства адамаровских композиций производных Гельфонда-Леонтьева аналитических функций // Уфимский матем. журн. — Т.2, N 2. — 2010. — С. 90–101.

6. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв.вузов. Матем. — 1967. — N2. — С. 100–108.
7. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом функции, аналитической в круге, и модулями коэффициентов ее ряда Тейлора // ДАН УССР. Сер. А. — 1966. — N6. — С. 729–732.
8. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristics of entire functions // Matem. Studii. — 2003. — Vol. 19, N 1. — P. 73–82.
9. *Г. Полиа , Г. Сеге* Задачи и теоремы из анализа. II. — М.: Наука, 1978. — 432с.

Стаття: надійшла до редколегії 30.06.2015
прийнята до друку 11.11.2015

ON HADAMARD'S COMPOSITIONS OF GELFOND-LEONT'EV DERIVATIVES FOR ANALYTIC FUNCTIONS

Oksana MULYAVA, Stepan FEDYNYAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: info@nuft.edu.ua, fedynyak@yahoo.com

For entire and analytic functions in the unit disk, in the terms of generalized orders, the growth of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives is investigated. The behaviour of the maximal terms such compositions is studied.

Key words: analytic function, Hadamard's composition, Gelfond-Leont'ev derivative, maximal term.