*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 112–116*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 112–116*

УДК 517.53

# ЗВ'ЯЗОК МІЖ АСИМПТОТИКОЮ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ ТА КУТОВОЮ ЩІЛЬНІСТЮ НУЛІВ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

**Мар'яна МОСТОВА**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*вул. Університецька, 1, Львів, 79000*
*e-mail: memyr23@gmail.com*

Для довільної повільно зростаючої функції $\upsilon$ побудовано приклад цілої функції $f$ нульового порядку, логарифмічна похідна якої зовні деякої $C_0^2$-множини еквівалентна лічильній функції нулів $f$ і нулі $f$ не мають кутової $\upsilon$-щільності.

*Ключові слова:* ціла функція, логарифмічна похідна, нульовий порядок, кутова щільність.

**1. Вступ і формулювання результатів.** Нехай $f$ — ціла функція скінченного додатного порядку $\rho$ і цілком регулярного зростання [1]. Добре відомо, що цілком регулярне зростання цілої функції додатного нецілого порядку еквівалентне існуванню кутової щільності її нулів стосовно функції порівняння $r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ — уточнений порядок функції $f$.

Позначимо через $F(z) = zf'(z)/f(z)$ — логарифмічну похідну функції $f$. Асимптотичні формули $F(z)$ для цілої функції ц. р. зр. $f$ зовні деяких виняткових множин знайдено в [2], а в [3] доведено, що з асимптотики $F(z)$ випливає цілком регулярне зростання функції $f$. Ми розглянемо аналогічні задачі для цілих функцій нульового порядку.

Через $L$ позначатимемо клас додатних, неспадних, необмежених, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ функцій $\upsilon$ таких, що $r\upsilon'(r)/\upsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$, $n(r) = n(r, 0, 2\pi)$ — лічильна функція нулів $f$, а через $H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, — клас цілих функцій $f$ нульового порядку, для яких $0 < \Delta = \varlimsup_{r\to+\infty} n(r)/\upsilon(r) < +\infty$. Нехай $n(r, \alpha, \beta)$ — кількість нулів цілої функції в секторі $\{z\colon |z| \leqslant r, \alpha \leqslant arg\ z < \beta\}, 0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi$.

Будемо говорити, що нулі функції $f \in H_0(\upsilon)$ мають кутову $\upsilon$-щільність, якщо існує границя

$$\Delta(\alpha, \beta) \colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{\upsilon(r)},$$

для всіх $\alpha$ і $\beta$, що не належать деякій не більше, ніж зліченній множині з $[0, 2\pi]$.

Нагадаємо, що множина $E \subset \mathbb{C}$ належить до класу $C_0^2$, якщо $E$ — вимірна і $mes_2\,(E \cap C(r)) = o(r^2)$, $r \to +\infty$, де $mes_2$ — плоска міра Лебега, а $C(r) = \{z\colon |z| \leqslant r\}$.

Асимптотику логарифмічної похідної для $f \in H_0(v)$ знайдено в [4].

**Теорема A.** *Нехай $v \in L$, $f \in H_0(v)$ і нулі $f$ мають кутову $v$-щільність. Тоді існує множина $E \in C_0^2$ така, що*

$$F(re^{i\varphi}) = \Delta v(r) + o(v(r)) = n(r) + o(v(r)), \quad z \to \infty, \quad z \notin E.$$

З теореми 1 випливає, що обернене твердження до теореми А неправильне.

**Теорема 1.** *Для довільної функції $v \in L$ існують функція $f \in H_0(v)$ і множина $E \in C_0^2$ такі, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(1), \quad z = re^{i\varphi} \to \infty, \quad z \notin E \tag{1}$$

*і нулі $f$ не мають кутової $v$-щільності.*

**2. Доведення.** Для доведення теореми 1 будемо використовувати такий наслідок з теореми Тепліца [[5], с. 326], який сформулюємо у вигляді леми.

**Лема 1.** *Нехай $(x_n)$ і $(y_n)$ нескінченно малі послідовності і для довільного $m \in \mathbb{N}$*

$$|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_m| \leqslant K \ (K = const).$$

*Тоді*

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1 \to 0, n \to +\infty.$$

*Доведення теореми.* Нехай $v$ — довільна функція з класу $L$. Виберемо послідовність дійсних чисел $r_k$ таку, що $r_k \nearrow +\infty$ при $k \to +\infty$ і

$$v(r_1) = 1, r_{k+1} > 2r_k, v(r_k) \in \mathbb{N}.$$

Приймемо $m_1 = v(r_1) = 1, m_k = v(r_k) - v(r_{k-1}), k \geqslant 2,$

$$v(r_k) > (k+1)v(r_{k-1}). \tag{2}$$

Нехай

$$f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{r_k}\right)^{m_k}\right).$$

Оскільки $m_k = v(r_k) - v(r_{k-1}) > kv(r_{k-1}) > k$ і для довільного $R > 0$ $(R/r_k)^{m_k} < (1/2)^k$, $k \geqslant k_0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{z}{r_k}\right)^{m_k}$ — абсолютно і рівномірно збіжний в крузі $\{z\colon |z| \leqslant R\}$, а отже, $f(z)$ — ціла функція.

Нехай $r_n \leqslant r < r_{n+1}$. Тоді

$$n(r) = \sum_{k=1}^{n} m_k = v(r_1) + \sum_{k=2}^{n} (v(r_k) - v(r_{k-1})) = v(r_n) \leqslant v(r)$$

і для всіх $\alpha$ і $\beta$, $0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi$, отримаємо

$$n(r,\alpha,\beta) = (1+o(1))\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\sum_{r_k\leqslant r} m_k = (1+o(1))\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\upsilon(r_n),\ r\to+\infty.$$

Звідси, завдяки (2), отримуємо, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{n(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(r_n,\alpha,\beta)}{\upsilon(r_n)} = \frac{\beta-\alpha}{2\pi},$$

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{n(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(r_{n+1}-0,\alpha,\beta)}{\upsilon(r_{n+1})} = \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\lim_{n\to+\infty}\frac{\upsilon(r_n)}{\upsilon(r_{n+1})} = 0.$$

Отже, нулі $f$ не мають кутової $\upsilon$-щільності.

Легко бачити, що

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-m_k)(z/r_k)^{m_k}}{1-(z/r_k)^{m_k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{1-(r_k/z)^{m_k}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{m_k(z/r_k)^{m_k}}{(z/r_k)^{m_k}-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k(r_k/z)^{m_k}}{1-(r_k/z)^{m_k}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{m_k(z/r_k)^{m_k}}{(z/r_k)^{m_k}-1}.$$

Звідси для $r_n \leqslant |z| = r < r_{n+1}$

$$|F(z)-n(r)| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k(r_k/z)^{m_k}}{1-(r_k/z)^{m_k}}\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{m_k(z/r_k)^{m_k}}{(z/r_k)^{m_k}-1}\right| = |\Sigma_1| + |\Sigma_2|. \qquad (3)$$

Далі для $r_n\left(1+1/\sqrt{m_n}\right) \leqslant |z| \leqslant r_{n+1}\left(1-1/\sqrt{m_{n+1}}\right)$ отримаємо

$$\left(\frac{r_n}{|z|}\right)^{m_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)^{-m_n} \leqslant 2^{-\sqrt{m_n}},$$

$$\left(\frac{|z|}{r_{n+1}}\right)^{m_{n+1}} \leqslant \left(1-\frac{1}{\sqrt{m_{n+1}}}\right)^{m_{n+1}} \leqslant 2^{-\sqrt{m_{n+1}}}.$$

Тоді

$$\left|\frac{1}{1-(r^n/|z|)^{m_n}}\right| < \frac{1}{1-2^{-\sqrt{m_n}}} < 2,$$

$$\left|\frac{1}{(|z|/r_{n+1})^{m_{n+1}}-1}\right| \leqslant \frac{1}{1-1/2^{-\sqrt{m_{n+1}}}} < 2.$$

Для $k \leqslant n-1$ правильні такі оцінки:

$$\left(\frac{r_k}{|z|}\right)^{m_k} \leqslant \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{m_k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{m_k} \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\frac{r_k}{r_n} = \frac{r_k}{r_{k+1}}\cdot\frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{r_{n-1}}{r_n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Отже,

$$|\Sigma_1| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{m_k(r_k/r)^{m_k}}{|1-(r_k/z)^{m_k}|} + m_n\left(\frac{r_n}{r}\right)^{m_n}\left|1-\left(\frac{r_n}{z}\right)^{m_n}\right|^{-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{m_k(r_k/r_n)^{m_k}}{1-(r_k/r_n)^{m_k}} +$$

$$+2m_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)^{-m_n}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n-1}m_k(r_k/r_n)^{m_k}+2\frac{m_n}{e^{\sqrt{m_n}}}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n-1}m_k2^{(k-n)m_k}+o(1),\ n\to+\infty.$$

Прийнявши $x_l=m_k/2^{m_k},\ y_l=1/2^{km_k}$, з леми 1 одержуємо

$$|\Sigma_1|=o(1),\ n\to+\infty. \tag{4}$$

Далі, аналогічно до оцінки $|\Sigma_1|$, отримуємо

$$|\Sigma_2|\leqslant\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{m_k(r/r_k)^{m_k}}{|(z/r_k)^{m_k}-1|}+m_{n+1}\left(\frac{r}{r_{n+1}}\right)^{m_{n+1}}\left|\left(\frac{z}{r_{n+1}}\right)^{m_{n+1}}-1\right|^{-1}<$$

$$<\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{m_k(r_{n+1}/r_k)^{m_k}}{1-(r_{n+1}/r_k)^{m_k}}+2m_{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{m_{n+1}}}\right)^{m_{n+1}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{m_k}{2^{(k-n)m_k}}+2\frac{m_{n+1}}{e^{\sqrt{m_{n+1}}}}=o(1),\ n\to+\infty. \tag{5}$$

Отже, з (3)-(5) для $z\notin E=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\left(r_k-r_k/\sqrt{m_k},\ r_k+r_k/\sqrt{m_k}\right)$ виконується (1). Залишається довести, що $E\in C_0^2$. Справді, для $r_n\leqslant r\leqslant r_{n+1}/2$ матимемо

$$mes_2\ (E\cap C(r))\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(r_k^2(1+\frac{1}{\sqrt{m_k}})^2-r_k^2\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(2\frac{r_k^2}{\sqrt{m_k}}+\frac{r_k^2}{m_k}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 3r_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(r_k/r_n)^2}{\sqrt{m_k}}\leqslant 3r^2\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{(k-n)2}}{\sqrt{m_k}}.$$

Прийнявши $x_l=1/\sqrt{m_l},\ y_l=1/4^l$, за лемою 1 отримуємо

$$mes_2\ (E\cap C(r))=o(r^2),\ r\to+\infty.$$

Аналогічно, для $r_{n+1}/2\leqslant r\leqslant r_{n+1}$

$$mes_2\ (E\cap C(r))\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\left(r_k^2(1+\frac{1}{\sqrt{m_k}})^2-r_k^2\right)\leqslant 3r_{n+1}^2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(r_k/r_{n+1})^2}{\sqrt{m_k}}\leqslant$$

$$\leqslant 12r^2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^{(k-n-1)2}}{\sqrt{m_k}}=o(r^2),\ r\to+\infty.$$

Отже, з останніх двох співвідношень

$$mes_2\ (E\cap C(r))=o(r^2),\ r\to+\infty,$$

що доводить теорему 1.

## Література

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гос.-тех. изд-во, 1956. — 632с.
2. *Гольдберг А.А.* Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста / А.А. Гольдберг, Н.Е. Коренков // Сиб. мат.ж. — 1980. — Т.21., №3. — С.63–79.

3. *Гольдберг А.А.* Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста и их логарифмических производных/ А.А. Гольдберг, Н.Н. Строчик // Сиб. мат. ж. — 1985. — Т.26., №6. — С.29–38.
4. *Заболоцький М.В.* Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку/ М.В. Заболоцький, М.Р. Мостова // Укр. матем. журн. — 2014. — Т.66., №4. — С.473–481.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 810с.

*Стаття: надійшла до редколегії 23.02.2015.*
*доопрацьована 12.05.2015.*
*прийнята до друку 11.11.2015.*

## RELATIONSHIP BETWEEN THE ASYMPTOTIC OF LOGARITHMIC DERIVATIVE AND ANGULAR DENSITY OF ZEROS FOR AN ENTIRE FUNCTION OF SLOW GROWTH

**Mariana MOSTOVA**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universytetska Str., 1, Lviv, 79000*
*e-mail: memyr23@gmail.com*

For any slowly increasing function $v$ we have constructed an example of a function $f$ of zero order, the logarithmic derivative of which outside of some $C_0^2$-set is equivalent to the zero counting function of $f$ and zeros of $f$ do not have angular $v$-density.

*Key words:* entire function, logarithmic derivative, zero order, angular density.