ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 107–111
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 107–111

УДК 511.3

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ІНВАРІАНТІВ, ПЕРІОДІВ ТА ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

Ольга МИЛЬО, Ярослав ХОЛЯВКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Нехай $\wp_i(z)$, $(i = 1, 2)$ — алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса. Отримано оцінку сумісного наближення інваріантів цих функцій, їхніх періодів, числа α та значень кожної з цих функцій у періодах іншої та в точці α.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Вейєрштрасса.

1. Вступ. Розглянемо алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса $\wp_1(z)$, $\wp_2(z)$ з інваріантами $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$, відповідно. Позначимо через (ω, ω_1) пару основних періодів функції $\wp_1(z)$, а через (ω, ω_2) – функції $\wp_2(z)$ [1]. Нехай α довільне число таке, що $m\omega + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \alpha$ не є полюсами $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ при усіх $m, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

Надалі будемо дотримуватись таких позначень [2]: через $d(P)$, $L(P)$ позначимо степінь та довжину многочлена P з цілими коефіцієнтами; $\xi_1, \dots \xi_{12}$ — наближаючі алгебричні числа, $d_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ — їхні степені та довжини, відповідно.

Теорема 1. *Для довільних алгебричних чисел $\xi_1, \dots \xi_{12}$ справджується*

$$|\alpha-\xi_1|+|\omega-\xi_2|+|\omega_1-\xi_3|+|g_{1,2}-\xi_4|+|g_{1,3}-\xi_5|+|g_{2,2}-\xi_6|+|g_{2,3}-\xi_7|+|\wp_2(\omega_1)-\xi_8| \\ +|\wp_1(\alpha)-\xi_9|+|\wp_2(\alpha)-\xi_{10}|+|\omega_2-\xi_{11}|+|\wp_1(\omega_2)-\xi_{12}| > \exp\left(-\Lambda T^3\right), \qquad (1)$$

де $n_0 = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \dots \xi_{12})$, $T^2 = n_0 \left(\dfrac{\ln L_1}{d_1} + \dots + \dfrac{\ln L_{12}}{d_{12}} + \ln n_0 \right)$, $\Lambda > 0$ — *константа, залежна лише від чисел* $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$ *та* α.

Подібні оцінки та формулювання задач можна знайти, наприклад, в [2], [3].

2. Доведення Теореми 1. Дотримуватимемось стандартних позначень в теорії еліптичних функцій [1]. Доведемо таку оцінку наближення.

Теорема 2. *Для довільних алгебричних чисел $\xi_1, \dots \xi_{10}$ справджується така нерівність:* $|\alpha - \xi_1| + |\omega - \xi_2| + |\omega_1 - \xi_3| + |g_{1,2} - \xi_4| + |g_{1,3} - \xi_5| + |g_{2,2} - \xi_6| + |g_{2,3} - \xi_7| + |\wp_2(\omega_1) - \xi_8| + |\wp_1(\alpha) - \xi_9| + |\wp_2(\alpha) - \xi_{10}| > \exp\left(-\lambda^8 N^3\right)$, *де*

$N^2 = n\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \cdots + \frac{\ln L_{10}}{d_{10}} + \ln n\right)$, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \ldots \xi_{10})$, λ — *натуральне число, залежне лише від* $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$ *та* α.

Нехай $c_1, c_2, \ldots$ — додатні константи, які не залежать від n, d_i, L_i та λ.

Лема 1. *Якщо* λ — *достатньо велике, то нерівність*

$$|\alpha - \xi_1| + |\omega - \xi_2| + |\omega_1 - \xi_3| + |g_{1,2} - \xi_4| + |g_{1,3} - \xi_5| + |g_{2,2} - \xi_6| + |g_{2,3} - \xi_7| +$$
$$|\wp_2(\omega_1) - \xi_8| + |\wp_1(\alpha) - \xi_9| + |\wp_2(\alpha) - \xi_{10}| < \exp\left(-\lambda^8 N^3\right) \qquad (2)$$

неможлива.

Доводити Лему 1 будемо від супротивного. Приймемо

$$M = [\lambda N], \quad K = L = S = [\lambda^2 N], \qquad (3)$$

$m, m_1, s \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant s \leqslant S$, межі зміни m та m_1 будуть зазначені в кожному випадку окремо. Позначимо через $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ лінійно незалежні серед чисел $\xi_1^{u_1}, \ldots, \xi_{10}^{u_{10}}$, $u_i = 0, 1, \ldots, d_i - 1$. Визначимо

$$f(z) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_1, l_2 = 1}^{L} C_{k,l_1,l_2} z^k \wp_1^{l_1}(z) \wp_2^{l_2}(z), \quad C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau} \zeta_\tau, \quad C_{k,l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Як і в [4], позначимо $\phi(z) = \wp_2(z + \frac{\omega}{2})$. З формули додавання для $\wp(z)$ отримаємо

$$\wp_2(z+w) = \wp_2(z + \frac{\omega}{2} + w + \frac{\omega}{2}) = \left(\frac{\phi'(z) - \phi'(w)}{2(\phi(z) - \phi(w))}\right)^2 - \phi(z) - \phi(w) = \frac{\Lambda_1(z,w)}{\Lambda_2(z,w)}. \quad (5)$$

Існують многочлени [4] $G_{s,p,l}$ від $\wp_2(z), \wp_2'(z), \phi(z), \phi'(z)$ такі, що

$$G_{s,p,l} = \frac{d^s}{d\, w^s} (\Lambda_1^p(z,w) \Lambda_2^l(z,w))|_{w=0}, \qquad (6)$$

$\ln L(G_{s,p,l}) \leqslant s \ln(s(p+l) + c_1(s+p+l))$, $\deg G_{s,p,l} \leqslant 4(p+l)$.

Враховуючи, що $(\wp_i'(z))^2 = 4\wp_i^3(z) - g_{i,2}\wp_i(z) - g_{i,3}$ та $\wp_i''(z) = 6\wp_i^2(z) - g_{i,2}/2$, з (5), (6) подібно як у праці [4], отримаємо

$$f^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\, w^s}((\Lambda_2^{-L}(z,w)(f(z+w)\Lambda_2^L(z,w)))|_{w=0} = \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} \left(\frac{d^{s-t}}{d\, w^{s-t}} \Lambda_2^{-L}(z,w)\right)|_{w=0} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2} \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \left(\frac{d^{t-i}}{d\, w^{t-i}} (z+w)^k \wp_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0} G_{i,l_2,L-l_2}(z). \qquad (7)$$

Позначимо

$$f_{s,t}(z) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2} \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \left(\frac{d^{t-i}}{dw^{t-i}} (z+w)^k \wp_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0} G_{i,l_2,L-l_2}(z). \quad (8)$$

Нехай $\xi_{13}^2 = 4\xi_8^3 - \xi_6\xi_8 - \xi_7$, $\xi_{14}^2 = 4\xi_9^3 - \xi_4\xi_9 - \xi_5$, $\xi_{15}^2 = 4\xi_{10}^3 - \xi_6\xi_{10} - \xi_7$; $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{10}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15})$; $f_{s,m,m_1}(\overline{\xi})$ та $f_{s,t,m,m_1}(\overline{\xi})$ — вирази, отримані з виразів $f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)$ та $f_{s,t}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)$ заміною α, ω, ω_1, $g_{1,2}$, $g_{1,3}$, $g_{2,2}$, $g_{2,3}$, $\wp_2(\omega_1)$, $\wp_1(\alpha)$, $\wp_2(\alpha)$, $\wp_2'(\omega_1)\, \wp_1'(\alpha)$, $\wp_2'(\alpha)$, на $\xi_1, \ldots, \xi_{10}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15}$, відповідно.

Розглянемо $f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi})$, $1 \leqslant m, m_1 \leqslant M$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$, як M^2S лінійні форми від nKL^2 змінних $C_{k,l_1,l_2,\tau}$. Згідно з [5] лема 4.1 та (3), (8), виберемо числа $C_{k,l_1,l_2,\tau}$, які не всі дорівнюють нулю так, що для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant M$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$

$$f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi}) = 0, \quad 0 < \max |C_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_2\lambda^3 n^{-1} N^3). \tag{9}$$

З (2), (3), (9) при $1 \leqslant m, m_1 \leqslant \lambda M$, $0 \leqslant s \leqslant S$ отримаємо

$$|f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha) - f_{s,m,m_1}(\bar{\xi})| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 N^3). \tag{10}$$

З (7)–(10), якщо $1 \leqslant m, m_1 \leqslant M$, $0 \leqslant s \leqslant S$, то одержимо

$$|f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 N^3). \tag{11}$$

Доведемо, що оцінка (11) також виконується і для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant \lambda M$, $0 \leqslant s \leqslant S$.

Лема 2. *Нехай нерівність (11) справджується для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^d M$, $2^d < \lambda$ при $0 \leqslant s \leqslant S$. Тоді вона справджується і для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1} M$ за тих самих s.*

Нехай $G(z) = f(z)\sigma_1^{2L}(z)\sigma_2^{2L}(z)$, де $\sigma_i(z)$ – σ-функція, що відповідає $\wp_i(z)$ [1]. Виберемо найменше ціле r таке, що $r > 4(2^d M + 1)(|\omega| + |\omega_1| + |\omega_2| + |\alpha| + 1)$. Позначимо $R = 4r$. Тоді з (3), (4) і (9) отримаємо $|G(z)|_{|z| \leqslant R} < \exp(-c_3 2^d \lambda^4 N^3)$, тому з леми 4.5 в [5] при $0 \leqslant s \leqslant S$ отримаємо $|G^{(s)}(z)|_{|z| \leqslant r} < \exp(-2^d \lambda^5 N^3)$. Для $\varepsilon = R^{-1}$ в ε-околах $V(\varepsilon, m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)$ точок $m\omega + m_1\omega_1 + \alpha$ функції $\sigma_1(z)$ та $\sigma_2(z)$ не мають нулів, тому при $1 \leqslant m, m_1 \leqslant \lambda M$ з леми 7.1 [3] та (3) отримаємо $|\sigma_i(z)|_{z \in V(\varepsilon, m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)} > \exp(-c_4\lambda^4 N^2)$, звідки при $1 \leqslant m, m_1 \leqslant \lambda M$ випливає $|f(z)|_{z \in V(\varepsilon, m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)} < \exp(-2^{2d-1}\lambda^5 N^3)$. Отже, для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1} M$, $0 \leqslant s \leqslant S$ отримаємо

$$|f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{3} N^3). \tag{12}$$

Враховуючи (10), для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1} M$ та $0 \leqslant s \leqslant S$ з (12) випливає

$$|f_{s,m,m_1}(\bar{\xi})| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{4} N^3). \tag{13}$$

Розглядаючи $f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi})$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$, $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1} M$ як значення відповідного многочлена в алгебричних точках, з леми 4.1 в [5] та (3) отримаємо для $f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi}) \neq 0$ оцінку

$$|f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi})| > \exp(-\lambda^{3,5} N^3). \tag{14}$$

З (8), (14) одержимо

$$|f_{s,m,m_1}(\bar{\xi})| > \exp(-\lambda^4 N^3). \tag{15}$$

Оцінки (13) і (15) суперечливі, тому для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1} M$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$ отримаємо $f_{s,m,m_1}(\bar{\xi}) = 0$, що разом з (10) доводить Лему 2.

Оцінимо $|C_{k,l_1,l_2,\tau}|$ зверху. Приймемо

$$\alpha_\kappa = \left(1 - \frac{\kappa}{\lambda L}\right) \frac{\omega + \omega_1 + \alpha}{4}, \kappa = 1, ..., L. \tag{16}$$

З леми 4 [6] отримаємо твердження.

Лема 3. *Нехай* $\Delta = \det(\wp_1^{l_1}(\alpha_\kappa))_{l_1,\ \kappa=1,\dots,L}$, $\Delta(\kappa) = \det(\wp_2^{l_2}(m_1\omega_1+\alpha_\kappa)_{l_2,\ m_1=1,\dots,L}$, $\Delta(m_1,\ \kappa) = \det((m\omega + m_1\omega_1+\alpha_\kappa)^k)_{m,\ k=1,\dots,L}$, $\Delta_{l_1,\ \kappa}$ *— алгебричне доповнення елемента* $\wp_1^{l_1}(\alpha_\kappa)$ *визначника* Δ, $\Delta_{l_2,\ m_1}(\kappa)$ *— елемента* $\wp_2^{l_2}(m_1\omega_1+\alpha_\kappa)$ *визначника* $\Delta(\kappa)$, $\Delta_{m,\ k}(m_1,\ \kappa)$ *— елемента* $(m\omega+m_1\omega_1+\alpha_\kappa)^k$ *визначника* $\Delta(m_1,\ \kappa)$. *Якщо* $\Delta \neq 0$, $\Delta(\kappa)\neq 0$ *та* $\Delta(m_1,\ \kappa)\neq 0$, *то*

$$C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\kappa,\ m,\ m_1=1}^{L} \frac{\Delta_{l_1,\ \kappa}}{\Delta}\frac{\Delta_{l_2,\ m_1}(\kappa)}{\Delta(\kappa)}\frac{\Delta_{m,\ k}(m_1,\ \kappa)}{\Delta(m_1,\ \kappa)} f(m\omega+m_1\omega_1+\alpha_\kappa). \tag{17}$$

З (16) випливає, що Δ, $\Delta(\kappa)$ і $\Delta(m_1,\ \kappa)$, які є визначниками Вандермонда, відмінні від нуля. З (3), (16) та леми 1.1 [3] для довільної $\wp(z)$ випливає $|\wp(\alpha_\kappa)-\wp(\alpha_j)| > \exp(-\lambda \ln N)$, $\kappa \neq j$. З цієї оцінки та (3) отримаємо

$$\left|\frac{\Delta_{l_1,\ \kappa}}{\Delta}\right|, \left|\frac{\Delta_{l_2,\ m_1}(\kappa)}{\Delta(\kappa)}\right|, \left|\frac{\Delta_{m,\ k}(m_1,\ \kappa)}{\Delta(m_1,\ \kappa)}\right| < \exp(c_5\lambda^3 N\ln N). \tag{18}$$

З леми 7.1 [3] для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant L$, в точках $z = m\omega+m_1\omega_1+\alpha_\kappa$ отримаємо $\min|\sigma^{2L}(z)| > \exp(-c_6\lambda^6 N^3)$, тому за умови $(1/2)\lambda \leqslant 2^d \leqslant \lambda$ одержимо оцінку $|f(m\omega+m_1\omega_1+\alpha_\kappa)| < \exp(-(1/4)\lambda^7 N^3)$. Звідси і з (17), (18) та Леми 3 випливає

$$|C_{k,l_1,l_2}| < \exp(-\lambda^6 N^3). \tag{19}$$

Розглядаючи C_{k,l_1,l_2} як значення відповідного многочлена (4) $A_{k,\ p,\ l}$ з цілими коефіцієнтами $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ в точці $\xi_1,\dots,\xi_{10}$ і використовуючи (3) та лему 4.1 [5], для $C_{k,l_1,l_2}\neq 0$ отримаємо $|C_{k,l_1,l_2}| > \exp(-\lambda^4 N^3)$, що суперечить оцінці (19). Тому всі C_{k,l_1,l_2} дорівнюють нулеві. Але тоді з (4) і всі $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ дорівнюють нулеві, що суперечить (9). Останнє протиріччя засвідчує, що (2) не справджується, що доводить Лему 1 та Теорему 2. Якщо в (2) замінити ω_1 на ω_2 і $\wp_2(\omega_1)$ на $\wp_1(\omega_2)$ та взяти точки $m\omega+m_2\omega_2+\alpha$, то такими ж міркуваннями отримаємо доведення твердження, яке подібне до Теореми 2 для так зміненої множини чисел. Отже, (1) виконується за досить великого Λ. Теорема 1 доведена.

Література

1. *Уиттекер Э.Е.,* Курс современного анализа/ Э.Е. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон// Т.2, М.: Физматгиз, 1963.
2. *Fel'dman N.I.,* Transcendental Numbers/ N.I. Fel'dman, Yu.V. Nesterenko// Springer-Verlag. Berlin, 1998.
3. *Masser D.* Elliptic functions and transcendence. Springer-Verlag. Berlin, 1975.
4. *Chudnovsky G.V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem // Inventiones Math. — Vol. 61. — 1980. — P.267–290.
5. *Reyssat E.* Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp.// Bull. Soc. Math. France. — 1980, 1, P.47–79.
6. *Фельдман Н.И.* Алгебраическая независимость некоторых чисел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1980, №4. — С.46–50.

Стаття: надійшла до редколегії 22.09.2014
доопрацьована 15.03.2015
прийнята до друку 11.11.2015

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF INVARIANTS, PERIOD AND VALUES OF TWO ELLIPTIC WEIERSTRASS FUNCTIONS

Yaroslav KHOLYAVKA, Olga MYLYO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetka Str. 1, Lviv, 79000
e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua, olga.mylyo@gmail.com

Let $\wp_i(z)$, $i = 1, 2$, be algebraically independent Weierstrass elliptic functions. We estimate a simultaneous approximation of invariants of these functions, their periods, number α and values of each of these functions at the periods of the other one and at the point α.

Key words: simultaneous approximation, Weierstrass elliptic function.