ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 73–87
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 73–87

УДК 514

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНА СТРУКТУРА ГЛАДКИХ СУБМЕРСІЙ

Віктор КУЗАКОНЬ[1], Олександр ШЕЛЄХОВ[2]

[1] *Одеська національна академія харчових технологій,*
вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65039
e-mail: kuzakon_v@ukr.net
[2] *Тверський державний університет,*
вул. Желябова 33, м. Тверь, 170100
e-mail: amshelekhov@rambler.ru

Методом Елі Картана вивчаємо геометрію шарування, яка є породжена гладкою субмерсією. Отримано канонічний вигляд структурних рівнянь гладкої субмерсії, з'ясовано геометричний сенс канонізації. Як приклад, детально розглянуто шарування двовимірних поверхонь у тривимірному евклідовому просторі, описано усі його інваріанти.

Ключові слова: многовид, зовнішні форми, рухомий репер, гладке шарування, головне розшарування, інваріант, гладкі субмерсії.

1. Вступ. Диференціальні інваріанти шарувань досліджував один з авторів цієї статті у працях [6]–[14]. Застосовували методику, яка запропонована в [1],[3]. Наша мета — дослідити геометрію гладких шарувань класичним методом Е.Картана, в основі якого є зовнішні форми та рухомий репер. Цей метод був суттєво вдосконалений у працях багатьох геометрів: Г.Ф. Лаптєвим, див., наприклад, [15], [16]. Зокрема, у [17] він побудував інваріантну теорію диференційованих відображень гладкого многовиду у многовид більшої розмірності. Ми розвинули цю теорію для випадку гладких субмерсій. В першій частині праці знайдено канонічний вигляд структурних рівнянь гладкої субмерсії та з'ясовано геометричний сенс проведеної канонізації. Також ми продемонстрували, що з субмерсією канонічно пов'язані G-структури першого та другого порядку, та певний тривалентний тензор. У другій частині детально розглядаємо розшарування двовимірних поверхонь у тривимірному евклідовому просторі, знаходимо його диференціальні інваріанти, з'ясовуємо їхній геометричний сенс. Зокрема, ми довели, що алгебра інваріантів породжена інваріантами другого диференціального околу, які визначають розшарування з точністю до руху.

2. Структурні рівняння гладкої субмерсії.

2.1. Структурні рівняння гладкої субмерсії у довільному репері. Нехай M та X — гладкі многовиди розмірностей n та r, відповідно, $n > r$, та $f : M \to X$ — гладке відображення (субмерсія).

Згідно з [15] задамо структурні рівняння многовиду M у вигляді

$$\begin{aligned} d\omega^i =& \omega^j \wedge \omega^i_j, \\ d\omega^i_j =& \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \\ d\omega^i_{jk} =& \omega^m_{jk} \wedge \omega^i_m - \omega^i_{mk} \wedge \omega^m_j - \omega^i_{jm} \wedge \omega^m_k + \omega^m \wedge \omega^i_{jkm}, \quad \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Тут ω^i, $i, j, k, m, ... = 1, 2, \ldots n$, — базисні диференціальні форми многовиду M, які є залежними від диференціалів параметрів x^i — локальних координат на M.

Як відомо [16], форми ω^i і ω^i_j утворюють базис розшарування $H^1(M)$ кореперів першого порядку многовиду M, форми $\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}$ — базис розшарування $H^2(M)$ кореперів другого порядку та ін.

Аналогічно запишемо структурні рівняння многовиду X

$$\begin{aligned} d\vartheta^a =& \vartheta^b \wedge \vartheta^a_b, \\ d\vartheta^a_b =& \vartheta^c_b \wedge \vartheta^a_c + \vartheta^c \wedge \vartheta^a_{bc}, \\ & \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Тут ϑ^a, $a, b, c, ... = 1, 2, \ldots m$, — базисні диференціальні форми многовиду X, що залежать від диференціалів параметрів u^a — локальних координат на X.

У локальних координатах рівняння субмерсії f набувають вигляду $u = f(x)$. Якщо ми продиференціюємо це рівняння та замінимо у ньому диференціали змінних на інваріантні форми ω^i, ϑ^a, то отримаємо диференціальні рівняння субмерсії f у інваріантному вигляді

$$\vartheta^a = \lambda^a_i \, \omega^i. \tag{3}$$

Функції $\lambda^a_i = \lambda^a_i(x, u)$ утворюють диференціально-геометричний об'єкт першого порядку відображення f [15].

Субмерсія f визначає у многовиді M шарування Φ із шарами корозмірності m, де базою шарування є многовид X. Шар у M визначається фіксацією точки многовиду X, тобто фіксацією локальних координат u^a (або, коротше, параметра u). Вважаючи $u = const$, отримуємо $\vartheta^a = 0$, внаслідок чого з (3) випливає

$$\lambda^a_i \, \omega^i = 0 \tag{4}$$

— диференціальні рівняння шарування Φ.

На многовиді M діє псевдогрупа локальних дифеоморфізмів, яку позначимо $\mathcal{P}$. Аналогічну групу, що діє на X, позначимо $\mathcal{Q}$. Якщо на многовидах M та X не зафіксовано жодних додаткових структур, то субмерсія f та шарування Φ розглядатимуться з точністю до перетворень псевдогрупи $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$.

Зовнішнє диференціювання рівнянь (3) з урахуванням структурних рівнянь призводить до появи квадратичних рівнянь

$$(d\lambda^a_i - \lambda^a_k \, \omega^k_i + \lambda^b_i \, \vartheta^a_b) \wedge \omega^i = 0.$$

Згідно з лемою Картана отримаємо

$$d\lambda_i^a - \lambda_k^a\,\omega_i^k + \lambda_i^b\,\vartheta_b^a = \lambda_{ik}^a\omega^k, \tag{5}$$

де $\lambda_{ik}^a = \lambda_{ki}^a$ — деякі нові функції, які разом з функціями λ_i^a становлять диференціально-геометричний об'єкт другого порядку відображення f [15].

Продовжуючи рівняння (5), тобто, диференціюючи їх зовнішнньо, та згодом розкриваючи за лемою Картана, отримуємо нову серію рівнянь, що містять нові функції $\lambda_{ik\ell}^a$, та ін. Рівняння (1), (2) разом з рівняннями (3), (5) називають *структурними рівняннями субмерсії f або шарування* Φ.

Звузимо родину кореперів $H^1(M)$, вибираючи форми $\lambda_i^a\,\omega^i$, які анулюються на шарах шарування Φ, як нові базисні форми ω^a многовиду M. У новому базисі рівняння (4) шару шарування Φ набудуть вигляду

$$\omega^a = 0. \tag{6}$$

Порівнюючи з (4), знаходимо, що у новому репері $\lambda_b^a = \delta_b^a$, $\lambda_u^a = 0$, де зазвичай через δ_b^a позначено символ Кронекера та $u = m+1, m+2, \ldots, n$. Отримані корепери першого порядку назвемо адаптованими субмерсії f або шаруванню Φ. Звичайно, термін „адаптований корепер“ застосовують також до усього розшарування адаптованих кореперів, яке будемо позначати $\mathcal{R}_1$. Далі будемо вважати, що усі розрахунки виконують в адаптованому корепері $\mathcal{R}_1$. У ньому рівняння (3) мають простий вигляд

$$\vartheta^a = \omega^a. \tag{7}$$

Назвемо їх *канонічними рівняннями субмерсії f або шарування* Φ.

Внаслідок спеціалізації корепера ($\lambda_b^a = \delta_b^a$, $\lambda_u^a = 0$) рівняння (5) можна поділити на дві серії

$$\vartheta_b^a = \omega_b^a + \lambda_{bk}^a\omega^k \tag{8}$$

та

$$\omega_u^a = A_{uv}^a\omega^v + A_{ub}^a\omega^b, \tag{9}$$

де позначено $A_{uk}^a = -\lambda_{uk}^a$. Внаслідок симетрії величин λ_{jk}^a по нижніх індексах, величини A_{uv}^i також є симетричними $A_{uv}^i = A_{vu}^i$.

2.2. Канонічні структурні рівняння субмерсії. Якщо продиференціюємо рівняння (9) зовнішньо, то отримаємо

$$\triangledown A_{uv}^a \wedge \omega^v + \triangledown A_{ub}^a \wedge \omega^b + A_{ub}^a A_{vc}^b \omega^v \wedge \omega^c = 0, \tag{10}$$

де позначено

$$\begin{aligned} \triangledown A_{uv}^a &= dA_{uv}^a + A_{uv}^b\omega_b^a - A_{wv}^a\omega_u^w - A_{uw}^a\omega_v^w + \omega_{uv}^a, \\ \triangledown A_{ub}^a &= dA_{ub}^a + A_{ub}^c\omega_c^a - A_{vb}^a\omega_u^v - A_{uc}^a\omega_b^c - A_{uv}^a\omega_b^v + \omega_{ub}^a. \end{aligned} \tag{11}$$

Внаслідок симетрії величин A_{uv}^a можна вважати, що форми ω_{uv}^a також симетричні $\omega_{uv}^a = \omega_{uv}^a$.

Користуючись лемою Картана, з квадратичних рівнянь (10) отримаємо

$$\begin{aligned} \triangledown A_{uv}^a &= A_{uvb}^a\omega^b + A_{uvw}^a\omega^w, \\ \triangledown A_{ub}^a &= A_{ubc}^a\omega^c + A_{ubv}^a\omega^v, \end{aligned} \tag{12}$$

де виконуються співвідношення

$$A_{[uv]b}^a = 0, \quad A_{uvw}^a = A_{(uvw)}^a, \quad A_{u[bc]}^a = 0, \quad A_{ubv}^a - A_{uvb}^a = A_{uc}^a A_{ub}^c. \tag{13}$$

Якщо позначимо

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a + \lambda_{bk}^a \omega^k, \tag{14}$$

то рівняння (8) набудуть вигляду

$$\vartheta_b^a = \tilde{\omega}_b^a, \tag{15}$$

а внаслідок (7), (15) і рівностей $A_{ub}^a = -\lambda_{ub}^a = -\lambda_{bu}^a$ перші серії структурних рівнянь (1) і (2) набудуть однакового вигляду

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \tilde{\omega}_b^a. \tag{16}$$

На решту рівнянь першої серії (1) заміна (14) не впливає

$$d\omega^u = \omega^k \wedge \omega_k^u.$$

Знайдемо зображення (репрезентацію) псевдогрупи $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ у корепері $\mathcal{R}_1$. Довільне перетворення з $\mathcal{P}$ набуває вигляду $\tilde{\omega}^i = p_j^i \omega^j$, а довільне перетворення з $\mathcal{Q}$ — $\tilde{\vartheta}^a = q_b^a \vartheta^b$. Вважатимемо, що кобазиси $\tilde{\omega}^i$ і $\tilde{\vartheta}^a$ також з $\mathcal{R}_1$, тобто для них також виконуються рівняння (7): $\tilde{\vartheta}^a = \tilde{\omega}^a$. Тоді з попередніх рівнянь випливає, що $q_b^a = p_b^a$, $p_v^a = 0$, матриця (p_j^i) набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} (p_b^a) & 0 \\ (p_b^u) & (p_v^u) \end{pmatrix}.$$

Отож, внаслідок редукції репера псевдогрупа $\mathcal{P}$ звузилася до псевдогрупи $\mathcal{P}'$, обмеженої умовами $p_v^a = 0$, а псевдогрупа $\mathcal{Q}$ вкладається у $\mathcal{P}'$, що є її розширенням.

Заміна (14) визначає перехід до нового адаптованого корепера, який позначимо $\mathcal{R}_2$. Далі будемо вважати, що усі рівняння записані у корепері $\mathcal{R}_2$. Порівнюючи рівняння (15) та (8), знаходимо, що у корепері $\mathcal{R}_2$ мають виконуватись співвідношення $\lambda_{bk}^a = 0$, звідки внаслідок симетрії цих величин за нижніми індексами матимемо $A_{ub}^a = 0$. Внаслідок цього рівняння (9) набудуть вигляду

$$\omega_u^a = A_{uv}^a \omega^v, \tag{17}$$

де, враховуючи попередні позначення, отримаємо

$$A_{uv}^a = A_{vu}^a. \tag{18}$$

З других рівностей рівнянь (11) та (12) внаслідок умови $A_{ub}^a = 0$ випливає

$$\omega_{ub}^a = A_{uv}^a \omega_b^v + A_{ubc}^a \omega^c + A_{ubv}^a \omega^v, \tag{19}$$

а співвідношення (13) тепер можна записати так:

$$A_{[uv]b}^a = 0, \quad A_{uvw}^a = A_{(uvw)}^a, \quad A_{u[bc]}^a = 0, \quad A_{ubv}^a = A_{uvb}^a. \tag{13'}$$

Диференціюємо (15), скориставшись структурними рівняннями (1) та (2), записаними у корепері $\mathcal{R}_2$. Одержимо

$$(\omega_{bc}^a - \vartheta_{bc}^a) \wedge \omega^c + (\omega_{bv}^a - A_{uv}^a \omega_b^u) \wedge \omega^v = 0.$$

Застосуємо лему Картана та отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \omega_{bc}^a - \vartheta_{bc}^a &= \mu_{bcd}^a \omega^d + \mu_{bcv}^a \omega^v, \\ \omega_{bv}^a - A_{uv}^a \omega_b^u &= \mu_{bvc}^a \omega^c + \mu_{bvw}^a \omega^w, \end{aligned} \tag{20}$$

де виконуються співвідношення

$$\mu^a_{b[cd]} = 0, \quad \mu^a_{bcv} = \mu^a_{bvc}, \quad \mu^a_{b[vw]} = 0. \tag{21}$$

За допомогою першого зі співвідношень (20) введемо такі позначення:

$$\tilde{\omega}^a_{bc} \equiv \omega^a_{bc} - \mu^a_{bcv}\omega^v = \vartheta^a_{bc} + \mu^a_{bcd}\omega^d \equiv \tilde{\vartheta}^a_{bc}. \tag{22}$$

Остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} d\omega^a_b &= \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^u_b \wedge \omega^a_u + \omega^c \wedge \omega^a_{bc} + \omega^v \wedge \omega^a_{bv} \\ &= \omega^c_b \wedge \omega^a_c + A^a_{uv}\omega^u_b \wedge \omega^v + \omega^c \wedge \omega^a_{bc} + \omega^v \wedge \omega^a_{bv} \\ &= \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^v(\omega^a_{bv} - A^a_{uv}\omega^u_b) + \omega^c \wedge \omega^a_{bc}. \end{aligned}$$

Замінюючи вираз у дужках за допомогою (20), та враховуючи співвідношення $\mu^a_{b[vw]} = 0$ (див. (21)), після перетворень з урахуванням позначень (22), остаточно одержуємо

$$d\tilde{\omega}^a_b = \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_c + \omega^c \wedge \tilde{\omega}^a_{bc}. \tag{23}$$

Можна перевірити простим обчисленням, що форма $d\tilde{\vartheta}^a_{bc}$ має саме такий вигляд, тобто, диференціювання співвідношення $\tilde{\omega}^a_{bc} = \tilde{\vartheta}^a_{bc}$, що випливає з (22), дає тотожність.

Заміни (22) визначають перехід до нових адаптованих корепeрів третього порядку на многовидах M і X, і ці корепери позначимо, відповідно, $\mathcal{R}_3$ і $\mathcal{R}'$. В них (див. (22)) вже $\tilde{\omega}^a_{bc} \equiv \tilde{\vartheta}^a_{bc}$, тому з рівнянь вигляду (20), записаних для корепера $\mathcal{R}_3$, випливає $\mu^a_{bcd} = \mu^a_{bcv} = 0$, тому друге рівняння (20) набуде вигляду

$$\omega^a_{bu} = A^a_{vu}\omega^v_b + \mu^a_{buv}\omega^v. \tag{20$'$}$$

Продовжуючи наведені міркування за індукцією, матимемо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $f : M \to X$ — гладка субмерсія та структурні рівняння многовидів M та X записані у вигляді (1), (2). Тоді базиси у розшаруваннях кореперів першого, другого та інших порядків на многовидах M та X можна обрати так, щоб виконувалися рівняння*

$$\vartheta^a = \omega^a, \quad \vartheta^a_b = \omega^a_b, \quad \omega^a_{bc} = \vartheta^a_{bc}, \ldots \tag{24}$$

для будь-якої кількості нижніх індексів.

Якщо це зроблено, то вважатимемо, що *структури многовидів M та X є канонічно узгодженими стосовно субмерсії f*. У цьому випадку структурні рівняння (2) многовиду X становлять частину структурних рівнянь (1) многовиду M, які будемо називати *канонічними структурними рівняннями субмерсії f або шарування* Φ.

Якщо виконується лише перша серія співвідношень (24), то вважатимемо, що є канонічно узгодженими структури першого порядку, якщо перша та друга серії співвідношень — то канонічно узгодженими є структури другого порядку стосовно субмерсії f та ін.

Якщо канонічно узгодженими є структури другого порядку, то перші дві серії рівнянь (1) будемо називати структурними рівняннями субмерсії f.

2.3. G-структури, пов'язані з субмерсією.

Перші дві серії структурних рівнянь (1) многовиду M

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} \tag{25}$$

можна розглядати як структурні рівняння головного розшарування реперів (реперів першого порядку) над M, базою якого є M, а шаром — многовид R_p реперів першого порядку, віднесених до певної точки p, $p \in M$. Шар R_p виокремлюється цілком інтегровною системою $\omega^i = 0$, внаслідок якої рівняння (25) набувають вигляду

$$\delta\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k. \tag{26}$$

Тут зазвичай $\pi^i_j = \omega^i_j (\operatorname{mod} \omega^i = 0)$, а δ — символ диференціювання за вторинними параметрами, тобто за параметрами репера у R_p. Рівняння (26) є рівняннями повної лінійної групи $GL(n)$, що діє на многовиді R_p вільно та просто транзитивно.

Якщо на многовидах M та X канонічно узгоджені структури другого порядку, то з рівнянь (17) та (26) отримуємо $\pi^a_u = 0$, $\delta\pi^a_u = 0$. Цілком інтегровна система $\pi^a_u = 0$ виокремлює на групі $GL(n)$ підгрупу G, структурні рівняння якої отримаємо з (26), враховуючи $\pi^a_u = 0$

$$\delta\pi^a_b = \pi^c_b \wedge \pi^a_c,\ \delta\pi^u_b = \pi^c_b \wedge \pi^u_c + \pi^v_b \wedge \pi^u_v,\ \delta\pi^u_v = \pi^w_v \wedge \pi^u_w. \tag{26'}$$

Група G є групою матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, \tag{27}$$

де A, B, C — матриці $r \times r, (n-r) \times r, (n-r) \times (n-r)$, відповідно.

Цілком інтегровні системи $\pi^u_b = \pi^u_v = 0$, $\pi^u_v = \pi^a_b = 0$, $\pi^a_b = \pi^u_b = 0$ виокремлюють у групі G відповідно підгрупи $GL(r), A(r, n-r), GL(n-r)$, де через $A(r, n-r)$ позначено абелеву групу матриць $(n-r) \times r$ щодо додавання. Як видно з рівнянь (26'), підгрупи $GL(r)$ і $GL(n-r)$ є нормальними дільниками G.

Група G діє транзитивно на многовиді адаптованих реперів, який ми позначили як $\mathcal{R}_1$. Тому вона задає на многовиді M G-структуру [19], яку ми позначимо B_G.

Згідно з означенням група $GL(r)$ транзитивно діє на розшаруванні реперів многовиду X. Доведемо, що група $GL(n-r)$ транзитивно діє на розшаруванні реперів шару шарування Φ. Справді, шар фіксується рівнянням (9), внаслідок якого з рівнянь (1) (в адаптованому репері) отримуємо структурні рівняння шару

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega^u_v, \\ d\omega^u_v &= \omega^w_v \wedge \omega^u_w + \omega^b_v \wedge \omega^u_b + \omega^w \wedge \omega^u_{vw} = \omega^w_v \wedge \omega^u_w + A^b_{vw}\omega^w \wedge \omega^u_b + \omega^w \wedge \omega^u_{vw}. \end{aligned}$$

Фіксуючи точку шару ($\omega^u = 0$), одержуємо структурні рівняння групи $GL(n-r)$

$$d\pi^u_v = \pi^w_v \wedge \pi^u_w.$$

Отже, ця група діє на розшаруванні реперів, базою якого є шар шарування Φ.

Далі розглянемо перші три серії структурних рівнянь (1). Їх можна розглядати як структурні рівняння головного розшарування реперів другого порядку над M, базою якого є M, а шаром — многовид R^2_p реперів другого порядку, віднесених до певної точки p, $p \in M$. Шар R^2_p виокремлюється цілком інтегровною системою $\omega^i = 0$, внаслідок якої з (1) випливає

$$\begin{aligned} \delta\pi^i_j =& \pi^k_j \wedge \pi^i_k, \\ \delta\pi^i_{jk} =& \pi^m_{jk} \wedge \pi^i_m - \pi^i_{mk} \wedge \pi^m_j - \pi^i_{jm} \wedge \pi^m_k. \end{aligned} \tag{28}$$

Ці рівняння визначають групу Лі, яка має назву диференціальної групи другого порядку [15], позначимо її $\mathcal{D}^2$. Зазначимо, що диференціальні групи досліджували різні автори, наприклад, їх матричну репрезентацію подано у [18], див. також [4].

Якщо структури многовидів M та X узгоджені до другого порядку, то з третьої серії рівнянь (28) на підставі (17) знаходимо

$$\delta\pi^a_{uv} = \pi^b_{uv} \wedge \pi^a_b - \pi^a_{wv} \wedge \pi^w_u - \pi^a_{uw} \wedge \pi^w_v. \tag{28}$$

Звідси випливає, що система пфафових рівнянь $\pi^a_{uv} = 0$ на групі $\mathcal{D}^2$ є цілком інтегровною, отже, виокремлює деяку підгрупу, позначимо її $\mathcal{D}^2_0$.

Нехай у розшаруванні реперів другого порядку над M зафіксовано підрозшарування вигляду

$$\omega^a_{uv} = B^a_{uvk}\omega^k. \tag{29}$$

Позначимо його $\tilde{\mathcal{R}}$. У шарі R^2_p цього підрозшарування будуть виконуватись рівняння $\pi^a_{uv} = 0$, тобто у R^2_p діє група $\mathcal{D}^2_0$. Отже, на многовиді M визначено G-структуру другого порядку $B_{D^2_0}$ із структурною групою $\mathcal{D}^2_0$ [4]. Одночасно з (12) знаходимо, що на $\tilde{\mathcal{R}}$ форма $\bigtriangledown A^a_{uv}$ стає головною. Це означає, див. [15], що величини A^a_{uv} утворюють тензор на G-структурі B_G. Доведемо теорему.

Теорема 2. *Нехай $f : M \to X$ — субмерсія, і структури M та X канонічно узгоджені стосовно f, тобто виконуються рівняння (1), (16), (17), (19), (20'), (23) і та ін. Тоді на M визначено G-структуру B_G, де G — підгрупа вигляду (27) повної лінійної групи $GL(n)$, що діє на підрозшаруванні реперів, заданих рівняннями (17). Нехай на M зафіксований перетин вигляду (29). Тоді на M визначено G-структуру другого порядку $B_{D^2_0}$ із структурною групою $\mathcal{D}^2_0$ — підгрупою диференціальної групи другого порядку $\mathcal{D}^2$, виокремленою рівняннями $\pi^a_{uv} = 0$. У цьому випадку величини A^a_{uv}, визначені рівностями (10) та (12,1), утворюють тензор на G-структурі B_G.*

3. Інваріанти розшарування поверхонь у тривимірному евклідовому просторі.

3.1. Рівняння субмерсії $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$.

Нехай $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$, де $\mathbb{E}^3$ — тривимірний евклідовий простір. У $\mathbb{E}^3$ ми будемо використовувати ортонормовані репери. Тому попередні міркування доведеться дещо змінити, оскільки їх проводили для загального випадку, коли на многовиди реперів не накладається жодних умов.

Нехай p — довільна точка у $\mathbb{E}^3$, e_i — рухомий ортонормований репер, $i, j, k, ... = 1, 2, 3$. Вважаємо, як зазичай

$$dp = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega^j_i e_j. \tag{30}$$

Форми ω^i та ω^j_i задовольняють структурні рівняння евклідового простору

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k, \tag{31}$$

та співвідношення

$$\omega^i_j = -\omega^j_i,\ \omega^i_i = 0, \tag{32}$$

які випливають з умови ортонормованості. Як відомо [4], форми ω^i та ω^i_j є інваріантними формами групи рухів D^3 простору $\mathbb{E}^3$.

В одновимірному випадку рівняння (2) набудуть вигляду

$$d\vartheta^1 = \vartheta^1 \wedge \vartheta^1_1,\ d\vartheta^1_1 = \vartheta^1 \wedge \vartheta^1_{11},\ d\vartheta^1_{11} = \vartheta^1_1 \wedge \vartheta^1_{11} + \vartheta^1 \wedge \vartheta^1_{111}, \dots \tag{33}$$

Зазначимо, що під час зміни кобазису $\tilde{\vartheta}^1 = \lambda\vartheta^1$ форми у рівняннях (33) перетворюються так:

$$\tilde{\vartheta}^1_1 = \vartheta^1_1 - dq/q,\ \tilde{\vartheta}^1_{11} = q^{-1}\vartheta^1_{11},\ \tilde{\vartheta}^1_{111} = q^{-2}\vartheta^1_{111}, \dots$$

Адаптувати родину ортонормованих реперів у $\mathbb{E}^3$ можна з двох міркувань: 1) щоб спростити рівняння шару; 2) щоб спростити рівняння субмерсії f. Шар V (двовимірна поверхня) у $\mathbb{E}^3$ звичайно визначається рівнянням $\omega^3 = 0$, у цьому випадку вектори e_1 і e_2 рухомого репера дотичні до поверхні V, а вектор e_3 спрямований у напрямі її нормалі. Можливі перетворення корепера в цьому випадку набувають вигляду

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3,\ \tilde{\omega}^a = p^a_b\omega^b,$$

де $a, b = 1, 2$, (p^a_b) — ортогональна матриця. Обираючи таку родину реперів, ми отримаємо рівняння субмерсії у вигляді $\vartheta^1 = \lambda\omega^3$. Зробимо на $\mathbb{R}$ заміну кобазису $\vartheta^1 \to \lambda\vartheta^1$, внаслідок чого рівняння субмерсії набуде вигляду

$$\vartheta^1 = \omega^3. \tag{34}$$

З іншого боку, довільний дифеоморфізм з $\mathcal{Q}$ має бути записаний у вигляді $\tilde{\vartheta}^1 = q\vartheta^1$ або на підставі (34), $\tilde{\omega}^3 = q\omega^3$. Порівнюючи зі згаданими допустимими перетвореннями, знаходимо, що $q = 1$, тобто будь-який дифеоморфізм з $\mathcal{Q}$ набуває вигляду

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3. \tag{35}$$

Його значення полягає в тому, що псевдогрупа так званих калібрувальних перетворень $\vartheta^1 \to q\vartheta^1$ на $\mathbb{R}$ є тривіальною, тобто калібрування — фіксоване. З наведених міркувань випливає, що нетривіальна псевдогрупа калібрувальних перетворень може виникнути лише у разі відмови від вимоги ортонормованості рухомого репера, тобто за умови, що у рухомому ортогональному репері вектор нормалі до щару V не обов'язково одиничний.

Далі ми розглянемо тільки випадок $q = 1$ (калібрування є фіксованим), коли виконуються рівняння (34) і (35).

3.2. Канонічний репер субмерсії $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$.

Диференціюючи (34) зовнішньо за допомогою (31)–(33), враховуючи (34), отримуємо рівняння

$$\omega^1 \wedge \omega^3_1 + \omega^2 \wedge \omega^3_2 = \omega^3 \wedge \vartheta^1_1.$$

Звідси за лемою Картана одержуємо

$$\omega^3_1 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2 + a_1\omega^3,\ \omega^3_2 = a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2 + a_2\omega^3,\ a_{12} = a_{21}, \tag{36}$$

і

$$\vartheta^1_1 = -a_1\omega^1 - a_2\omega^2 + a_3\omega^3. \tag{37}$$

Зазначимо, що, підставивши цей вираз у перше рівняння системи (33), отримуємо вираз для форми $d\omega^3$, який випливає також з першої серії рівнянь (31) і рівнянь (36)

$$d\omega^3 = a_1\omega^1 \wedge \omega^3 + a_2\omega^2 \wedge \omega^3. \tag{38}$$

Диференціюючи зовнішньо рівняння (36), отримаємо

$$\begin{aligned} \bigtriangledown a_{11} \wedge \omega^1 + \bigtriangledown a_{12} \wedge \omega^2 + \bigtriangledown a_1 \wedge \omega^3 = 0, \\ \bigtriangledown a_{12} \wedge \omega^1 + \bigtriangledown a_{22} \wedge \omega^2 + \bigtriangledown a_2 \wedge \omega^3 = 0, \end{aligned}$$

де позначено

$$\begin{aligned} \bigtriangledown a_{11} &= da_{11} - 2a_{12}\omega_1^2, \\ \bigtriangledown a_{12} &= da_{12} - a_{11}\omega_2^1 - a_{22}\omega_1^2, \\ \bigtriangledown a_{22} &= da_{22} - 2a_{12}\omega_2^1, \\ \bigtriangledown a_1 &= da_1 - a_2\omega_1^2 + a_{11}\omega_1^3 + a_{12}\omega_2^3 + (a_1)^2\omega^1 + a_1a_2\omega^2, \\ \bigtriangledown a_2 &= da_2 - a_1\omega_2^1 + a_{12}\omega_1^3 + a_{22}\omega_2^3 + a_1a_2\omega^1 + (a_2)^2\omega^2. \end{aligned} \tag{39}$$

Звідси, на підставі леми Картана, випливають рівності

$$\begin{aligned} \bigtriangledown a_{11} &= a_{111}\omega^1 + a_{112}\omega^2 + a_{113}\omega^3, \\ \bigtriangledown a_{12} &= a_{112}\omega^1 + a_{122}\omega^2 + a_{123}\omega^3, \\ \bigtriangledown a_{22} &= a_{122}\omega^1 + a_{222}\omega^2 + a_{223}\omega^3, \\ \bigtriangledown a_1 &= a_{113}\omega^1 + a_{123}\omega^2 + b_{11}\omega^3, \\ \bigtriangledown a_2 &= a_{123}\omega^1 + a_{223}\omega^2 + b_{22}\omega^3. \end{aligned} \tag{40}$$

Диференціюючи зовнішньо рівняння (37), після перетворень та застосування леми Картана отримуємо

$$\begin{aligned} &da_3 + \vartheta_{11}^1 = a_{33}\omega^3 + \\ &(-b_{11} - a_1a_3 + 2a_1a_{11} + 2a_2a_{12})\omega^1 + (-b_{22} - a_2a_3 + 2a_1a_{12} + 2a_2a_{22})\omega^2, \end{aligned} \tag{41}$$

де a_{33} — деяка нова функція.

Фіксуємо точку p, тобто вважатимемо $\omega^i = 0$. Тоді з (41) випливає рівняння

$$\delta a_3 + \pi_{11}^1 = 0,$$

де, як і вище, символ δ означає диференціювання за вторинними параметрами. З останньої рівності ми бачимо, що завдяки фіксації змінної a_3 можна форму π_{11}^1 привести до нуля. Інакше кажучи, ми можемо звузити родину реперів, лишивши тільки ті, в яких форма ϑ_{11}^1 є головною. Вважатимемо, наприклад, $a_3 = 0$, тоді з (41) отримаємо вираз для форми ϑ_{11}^1

$$\vartheta_{11}^1 = a_{33}\omega^3 + (-b_{11} + 2a_1a_{11} + 2a_2a_{12})\omega^1 + (-b_{22} + 2a_1a_{12} + 2a_2a_{22})\omega^2. \tag{41$'$}$$

Рівняння (37) внаслідок проведеної канонізації набуває такого вигляду:

$$\vartheta_1^1 = -a_1\omega^1 - a_2\omega^2. \tag{37$'$}$$

Якщо продиференціювати рівняння (36') зовнішньо і скористатися другим рівнянням (33), рівнянням (41) (за умови $a_3 = 0$), останніми двома рівняннями (39) та структурними рівняннями (31), то отримуємо тотожності.

Подальші міркування аналогічні. Продиференціюємо рівняння (41'), застосовуємо лему Картана, та вважатимемо в отриманих рівняннях $\omega^i = 0$. Після обчислень отримаємо рівності

$$\delta a_{33} + \pi^1_{111} = 0,$$

з яких бачимо, що завдяки фіксації змінної a_{33} можна форму π^1_{111} звести до нуля. Вважаючи $a_{33} = 0$, ми зробимо форму ϑ^1_{111} головною, а формула (41') набуде вигляду

$$\vartheta^1_{11} = (-b_{11} + 2a_1a_{11} + 2a_2a_{12})\omega^1 + (-b_{22} + 2a_1a_{12} + 2a_2a_{22})\omega^2. \qquad (41'')$$

Продовжуючи міркування за індукцією, матимемо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай задано субмерсію $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$, де простір $\mathbb{E}^3$ віднесено до ортонормованого репера, а структурні псевдогрупи перетворень на $\mathbb{R}$ мають вигляд (33). Тоді псевдогрупа калібрувальних перетворень є тривіальною, а родина реперів у $\mathbb{E}^3$ та на $\mathbb{R}$ можна вибрати так, що форма ω^3 буде головною на $\mathbb{R}$, і на $\mathbb{R}$ існують репери першого, другого та інших порядків такі, що форми $\vartheta^1, \vartheta^1_1, \vartheta^1_{11}, \ldots$ можливо буде виразити за формулами (34), (37'), (41") та іншими, де ці рівняння є цілком інтегровними на многовиді $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$.*

Згаданий у теоремі репер назвемо *канонічним репером $\mathcal{R}_\infty$ субмерсії $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$*. Якщо виконано тільки рівняння (34), то вважатимемо, що проведено канонізацію першого порядку і позначати відповідні репери $\mathcal{R}_1$; якщо тільки (34) та $(37')$ — то проведено канонізацію другого порядку (репери $\mathcal{R}_2$) тощо.

З'ясуємо геометричний сенс канонізації. Нехай $\omega^1 = \omega^2 = 0$, тоді з першої серії рівнянь (30) отримуємо $dp = \omega^3 e_3$, а з (38) — $d\omega^3 = 0$, звідки $\omega^3 = ds$. Отже, точка p рухається уздовж кривої ℓ — ортогональної траєкторії двовимірного шару шарування Φ, а s — натуральний параметр на ℓ. З іншого боку, оскільки внаслідок $\omega^1 = \omega^2 = 0$ форми ϑ^1_1, $\vartheta^1_{11}, \ldots$ дорівнюють нулю, то рівняння (33) можна звести до одного рівняння $d\vartheta^1 = 0$ або $d\omega^3 = 0$. Отже, на $\mathbb{R}$ виникає структура одновимірного евклідового простору з канонічним параметром (декартовою координатою) s. *Отож, многовид $\mathbb{R}$ — база шарування Φ канонічно вкладається в $\mathbb{E}^3$ як ортогональна траєкторія цього шарування.*

3.3. Псевдогрупа перетворень у $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$.

Як вже було зазначено, субмерсію f або шарування Φ розглядають з точністю до перетворень псевдогрупи $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. У цьому випадку $\mathcal{P}$ є групою рухів D^3, її дія у термінах інваріантних форм ω^i і ω^i_j записують у вигляді (див. вище)

$$\tilde\omega^3 = \omega^3,\ \tilde\omega^a = p^a_b\omega^b,$$

де $a, b = 1, 2$ и (p^a_b) — ортогональна матриця. Ці рівняння можна спростити, якщо вибрати в кожній точці шару V єдиний (канонічний) репер, вектори e_1 і e_2 якого спрямовані по головних напрямах поверхні V. Тоді попередні рівняння набувають вигляду

$$\tilde\omega^i = \omega^i. \qquad (43)$$

Диференціюючи ці рівняння за допомогою структурних рівнянь (31), на підставі (43) отримаємо $\omega^j \wedge (\omega_j^i - \tilde{\omega}_j^i) = 0$. Звідси $\omega_j^i - \tilde{\omega}_j^i = c_{jk}^i \omega^k$, $c_{jk}^i = c_{kj}^i$. З іншого боку, на підставі (32) отримуємо співвідношення $c_{jk}^i = -c_{ik}^j$. Одержимо $c_{jk}^i = -c_{ik}^j = -c_{ki}^j = c_{ji}^k = c_{ij}^k = -c_{kj}^i = -c_{jk}^i$, звідки $c_{jk}^i = 0$, і отже, $\omega_j^i = \tilde{\omega}_j^i$. Інтегруючи ці рівняння разом з рівняннями (43), отримуємо, як відомо [2], дію групи рухів D^3 на собі.

Довільний дифеоморфізм $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з $\mathcal{Q}$ набуває вигляду (35) або

$$\tilde{\vartheta}^1 = \vartheta^1. \tag{44}$$

Диференціюючи це рівняння за допомогою (33) та застосувавши лему Картана, на підставі (37') одержуємо $\tilde{\vartheta}_1^1 = \vartheta_1^1 + k\omega^3$ або

$$\tilde{a}_1 \tilde{\omega}^1 + \tilde{a}_2 \tilde{\omega}^2 = a_1 \omega^1 + a_2 \omega^2 + k\omega^3.$$

Оскільки форми ω^1 і ω^2 допускають лише ортогональні перетворення вигляду $\tilde{\omega}^a = p_b^a \omega^b$ (див. п. 2.1), то $k = 0$ і ковектор $\tilde{\mathbf{a}}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ отримуємо з ковектора $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ зворотним ортогональним перетворенням, запишемо це у вигляді

$$\tilde{\mathbf{a}} = \Pi(\mathbf{a}). \tag{45}$$

Ця рівність еквівалентна попереднім, якщо $k = 0$

$$\tilde{\vartheta}_1^1 = \vartheta_1^1. \tag{46}$$

Продовжуючи рівність (46) і враховуючи (41"), прийдемо до аналогічного результату

$$\tilde{\mathbf{B}}_{11} = \Pi(\mathbf{B}_{11}), \tag{47}$$

де $\mathbf{B}_{11}$ — ковектор з координатами

$$(-b_{11} + 2a_1 a_{11} + 2a_2 a_{12},\ -b_{22} + 2a_1 a_{12} + 2a_2 a_{22}),$$

а ковектор $\tilde{\mathbf{B}_{11}}$ має такі самі координати, але з хвилькою.

Продовжуючи за індукцією, отримуємо послідовність ковекторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{111} \ldots$, які перетворюються за допомогою оператора Π в аналогічні величини, але такі, що обчислені в іншій точці. Доведемо теорему.

Теорема 4. *Нехай субмерсія $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$ з тривіальною псевдогрупою калібрувальних перетворень віднесена до канонічного репера $\mathcal{R}_\infty$. Тоді дія псевдогрупи перетворень на $\mathbb{R}$ є прямим добутком перетворення (35), що відображає шар V у шар $\tilde{V}$, та оператора Π, який відображає інваріантні ковектори з шару V на шар $\tilde{V}$ уздовж ортогональних траєкторій.*

3.4. Інваріанти шарування щодо дії групи D^3.

З рівняння (39) і (40) випливає, що, фіксуючи головні параметри ($\omega^i = 0$), величини a_{ab}, $a_a, a, b = 1, 2$, мають задовольняти рівняння

$$\delta a_{11} - 2a_{12}\pi_1^2 = 0,\ \delta a_{12} - a_{11}\pi_2^1 - a_{22}\pi_1^2 = 0,\ \delta a_{22} - 2a_{12}\pi_2^1 = 0, \tag{48}$$

де символи δ і π мають той самий сенс, що й вище (див. (26)). З рівнянь (48) випливають такі рівності:

$$\delta(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2) = 0, \quad \delta(a_{11} + a_{22}) = 0.$$

Їхній сенс полягає в тому, що величини $a_{11}a_{22}-(a_{12})^2$ та $a_{11}+a_{22}$ — інваріанти, тобто не змінюються під час допустимих перетворень репера (корепера).

Рівняння (48) можна записати у вигляді

$$\delta a_{ab}+a_{cb}\pi_a^c+a_{ac}\pi_b^c=0,\ \delta a_a+a_b\pi_a^b=0.$$

Такий вигляд рівнянь, які задовольняють величини a_{ab} і a_a, означає, що вони утворюють тензори стосовно допустимих перетворень репера. З'ясуємо їхній геометричний сенс.

Цілком інтегровне рівняння

$$\omega^3=0 \tag{49}$$

виокремлює шар шарування Φ — двовимірну поверхню V. На ній рівняння (36) набуде вигляду

$$\omega_1^3=a_{11}\omega^1+a_{12}\omega^2,\ \omega_2^3=a_{21}\omega^1+a_{22}\omega^2. \tag{36$'$}$$

З (30), користуючись (41) та (36'), знаходимо

$$dp=\omega^1e_1+\omega^2e_2,\quad d^2p=(...)e_1+(...)e_2+(a_{11}(\omega^1)^2+2a_{12}\omega^1\omega^2+a_{22}(\omega^2)^2)e_3.$$

Звідси ми бачимо, що тензор a_{uv} є асимптотичним тензором поверхні V, і її друга квадратична форма набуває вигляду $\varphi_2=a_{11}(\omega^1)^2+2a_{12}\omega^1\omega^2+a_{22}(\omega^2)^2$. У цьому випадку перша квадратична форма поверхні V набуде вигляду $(dp)^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$. Звідси легко знаходимо повну та середню кривину поверхні V

$$K=a_{11}a_{22}-(a_{12})^2,\quad 2H=a_{11}+a_{22}.$$

Розглянемо на поверхні V область неомбілічних точок та звузимо родину адаптованих реперів, вважаючи $a_{12}=0$. Отримаємо так званий канонічний репер поверхні. Тоді з (42) знаходимо $\delta a_{11}=\delta a_{22}=0$, тобто величини a_{11} і a_{22} стають інваріантами. Безпосередньо перевіряємо, що це — головні кривини поверхні V: $k_1=a_{11}, k_2=a_{22}$. Оскільки поверхня не є омбілічною, то $k_1\neq k_2$, і з другого рівняння (40) можна знайти форму ω_1^2, тобто виразити її через головні форми ω^i. У цьому випадку координатні напрями, які визначені базисними векторами e_1 та e_2 на поверхні V, є головними напрямами в кожній точці цієї поверхні.

Щоб з'ясувати геометричний сенс інваріантного ковектора a_u, розглянемо шарування $\Phi^\perp$ кривих, ортогональне шаруванню Φ. Воно виокремлюється рівняннями

$$\omega^1=\omega^2=0. \tag{50}$$

Нехай, як і вище, ℓ — довільна крива шарування $\Phi^\perp$, $p\in\ell$. На підставі (50) отримаємо $dp=\omega^3e_3$, $\omega^3=ds$, враховуючи (32) і (36),

$$\frac{dp}{ds}=e^3,\quad \frac{d^2p}{ds^2}=\frac{\omega_3^1e_1+\omega_3^2e_2}{\omega^3}=-a_1e_1-a_2e_2.$$

Як бачимо, вектор $-a_1e_1-a_2e_2$ є вектором кривини кривої ℓ. З ним пов'язані два інваріанти: кривина кривої $k=|-a_1e_1-a_2e_2|=((a_1)^2+(a_2)^2)^{\frac{1}{2}}$ та кут між цим вектором кривини та одним з головних напрямів поверхні V. У канонічному репері величини a_1 і a_2 є інваріантами — проекціями вектора кривини на головні напрями поверхні V.

Аналогічними міркуваннями можна з'ясувати геометричний сенс диференціальних інваріантів диференціальних околів третього, четвертого та вищих порядків, див. про це, наприклад, у [5].

3.5. Алгебра інваріантів шарування $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$.

Нехай репер у $\mathbb{E}^3$ є канонічним, тобто виконується рівність $a_{12} = 0$. Тоді усі функції, які входять до структурних рівнянь (36), (40) та наступні, отримані стандартним продовженням, будуть інваріантами стосовно дії групи $D^3 \times \mathcal{Q}$, де D^3 є групою рухів у $\mathbb{E}^3$, а $\mathcal{Q}$ — псевдогрупа локальних дифеоморфізмів прямої $\mathbb{R}$. У другому диференціальному околі існує чотири незалежних інваріанта a_{11}, a_{22}, a_1 і a_2.

Щоб знайти вигляд інваріантів третього диференціального околу, перепишемо рівняння (40), враховуючи (39) та умови канонізації $a_{12} = 0$. Після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}
da_{11} &= a_{111}\omega^1 + a_{112}\omega^2 + a_{113}\omega^3, \\
da_{22} &= a_{122}\omega^1 + a_{222}\omega^2 + a_{223}\omega^3, \\
da_1 &= (aa_2a_{112} - (a_1)^2 - (a_{11})^2 + a_{113})\omega^1 + \\
&\quad (aa_2a_{122} - a_1a_2 + a_{123})\omega^2 + \tilde{b}_{11}\omega^3, \\
da_2 &= (-aa_1a_{112} - a_1a_2 + a_{123})\omega^1 + \\
&\quad (-aa_1a_{122} - (a_2)^2 - (a_{22})^2 + a_{223})\omega^2 + \tilde{b}_{22}\omega^3.
\end{aligned} \tag{51}$$

де позначено

$$a = (a_{11} - a_{22})^{-1},\ \tilde{b}_{11} = aa_2a_{123} - a_1a_{11} + b_{11},\ \tilde{b}_{22} = -aa_1a_{123} - a_2a_{22} + b_{22}.$$

Коефіцієнти біля базисних форм у правих частинах рівнянь (51) є інваріантами третього диференціального околу. Вони з'являються як похідні від інваріантів при диференціюванні за інваріантними напрямами — уздовж головних напрямів поверхні V і в напрямі кривої ℓ.

Як видно з рівнянь (40), у третьому околі отримуємо дванадцять інваріантів. З них є дев'ять незалежних: $a_{111}, a_{112}, a_{113}, a_{122}, a_{222}, a_{223}, a_{123}, \tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{22}$, а інші три можна виразити через них. Через згадані дев'ять незалежних інваріантів також можна виразити інваріанти — координати ковекторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{111} \ldots$,, див. п. 2.3.

Так само можна отримувати й усі подальші інваріанти: шляхом диференціювання інваріантів попереднього диференціального околу уздовж інваріантних напрямів. У таких випадках кажуть, що алгебра інваріантів породжена інваріантами a_{11}, a_{22}, a_1 та a_2.

Роль інваріантів a_{11}, a_{22}, a_1 та a_2 пояснюється у такому твердженні.

Теорема 3 (про еквівалентність шарувань). *Нехай існує два шарування: $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$, яке визначене структурними рівняннями (31), (32), (36), (40), та шарування $\tilde{f} : \tilde{\mathbb{E}}^3 \to \tilde{\mathbb{R}}$, яке визначене структурними рівняннями такого самого вигляду, в яких форми ω^i_j та функції a_{11}, a_{22}, a_1, a_2 замінені на аналогічні з тильдою. Припустимо, що інваріанти другого диференціального околу у цих шарувань збігаються. Тоді шарування f і $\tilde{f}$ — еквівалентні, тобто існує рух, який шарування f переводить у шарування $\tilde{f}$.*

□ Для простоти обчислень вважатимемо, що структурні рівняння обох шарувань записані у канонічному репері ($a_{12} = \tilde{a}_{12} = 0$). Тоді умова рівності інваріантів набуває вигляду

$$a_{11} = \tilde{a}_{11}, a_{22} = \tilde{a}_{22}, a_1 = \tilde{a}_1, a_2 = \tilde{a}_2. \tag{52}$$

Розглянемо на прямому добутку $\tilde{\mathbb{E}}^3 \times \tilde{\mathbb{E}}^3$ рівняння

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i. \tag{53}$$

На підставі (52) і (53) з (36) отримуємо $\omega_1^3 = \tilde{\omega}_1^3, \omega_2^3 = \tilde{\omega}_2^3$, а з (40) — $a_{111} = \tilde{a}_{111}$, $a_{112} = \tilde{a}_{112}$ та ін. З цих рівностей випливає рівність $\omega_1^2 = \tilde{\omega}_1^2$.

Враховуючи ці рівності та попередні, знаходимо, що $d(\omega^i - \tilde{\omega}^i) = 0$. Отже, за теоремою Фробеніуса система (53) є цілком інтегровною. Її інтегральним многовидом буде графік відображення $\varphi : \tilde{\mathbb{E}}^3 \to \tilde{\mathbb{E}}^3$, яке визначається рівняннями (53), та при заданих початкових умовах однозначно визначене. Проте рівняння (53) збігається з рівнянням (43), яке, як було доведено у п. 2.3, визначає групу рухів. Як видно з рівнянь (53), φ відображає шари шарування Φ у шари шарування $\widetilde{\Phi}$. □

Література

1. *Алексеевский Д.В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. / Д.В. Алексеевский, А.М. Виноградов, В.В. Лычагин // Современные проблемы математики. Фудаментальные направления. Геометрия-1. Т.28. — М., 1988. — 289 с.
2. *Васильева М.В.* Группы Ли преобразований. / М.В. Васильева — М.: МПГУ 1969. — 175 с.
3. *Виноградов А.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. /А.В. Виноградов, И.С. Красильщик, В.В. Лычагин — М.: Наука, 1986. — 336 с.
4. *Евтушик Л.Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы. /Л.Е. Евтушик // Труды геометрического семинара. Т.2. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1969 — С. 119–150.
5. *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. /Э. Картан — М.: МГУ, 1962. — 237 с.
6. *Кузаконь В.М.* Инварианты расслоения локально-евклидовой поверхности. /В.М. Кузаконь, М.О. Рахула // Украинский геометрический сборник. — 1978. №21. — С. 44–50.
7. *Кузаконь В.М.* Інваріантні сім'ї поверхонь у евклідовому просторі / В.М. Кузаконь // Вісник Київського ун-ту. Математика і механіка. — 1979. — Вип. 21. — С. 58–61.
8. *Кузаконь В.М.* Тензорные инварианты сечний субмерсий с дополнительными структурами. / В.М. Кузаконь // Математичні Студії. — 2002. Т.17, №2. — С. 199–210.
9. *Кузаконь В.М.* Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств. / В.М. Кузаконь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. Т.48, №4. — С. 95–99.
10. *Кузаконь В.М.* Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости. / В.М. Кузаконь // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. Т.3, №3. — С. 201–212.
11. *Кузаконь В.М.* Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Минковского. / В.М. Кузаконь, И.С. Стрельцова // Мат. методы та фіз.-мех. поля. — 2007. Т.43, №1. — С. 49–54.
12. *Кузаконь В.М.* Дифференциальные инварианты слоений. / В.М. Кузаконь // Докл. НАН Украины. — 2009. — №4. — С. 25–27.
13. *Кузаконь В.М.* Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Лобачевского. / В.М. Кузаконь // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — Т. 6, №2. — С. 82–90.

14. *Кузаконь В.М.* Диференціальні інварианті розшарування кривих на площині відносно $\mathbb{R}$-конформно-метричної групи. /В.М. Кузаконь // Прикл. проблеми мех. и мат. —- 2008. — Вип. 6. -— С. 61—-65.
15. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. /Г.Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. Т.1. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1966. — С. 139–189.
16. *Лаптев Г.Ф.* Структурные уравнения главного расслоенного многообразия. /Г.Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. — Т.2. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1969. — С. 161–178.
17. *Лаптев Г.Ф.* Инвариантная аналитическая теория дифференцируемых отображений. Труды геометрического семинара. /Г.Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. — Т.6. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1974. — С. 37–42.
18. *Лумисте Ю.Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-кореперов. /Ю.Г. Лумисте // Труды геометрического семинара. — Т.5. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1974. — С. 239–257.
19. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. /С. Стернберг – М.: Мир, 1970.

Стаття: надійшла до редколегії 16.10.2013
прийнята до друку 11.11.2015

THE DIFFERENTIAL-GEOMETRIC STRUCTURE OF A SMOOTH SUBMERSION

Viktor KUZAKON[1], Alexander SHELEKHOV[2]

[1] *Odesa National Academy of Food Technologies,*
Kanatna str., 112, Odesa, 65039
e-mail: kuzakon_v@ukr.net
[2] *Tver State University*
Zhelyabova str., 33, Tver, 170100
e-mail: amshelekhov@rambler.ru

We study the geometry foliation generated by a smooth submersion. The canonical form of the structural equations of smooth submersion has been obtained. As an example, a foliation of two-dimensional surfaces in three-dimensional Euclidean space is researched in details. Its invariants are described.

Key words: smooth manifold, differential forms, orthogonal frame , smooth foliation, principal fibre bundle, invariants, smooth submersion.