ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 68–72
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 68–72

УДК 519.213.2+517.53

ПРО БАГАТОЧЛЕННУ АСИМПТОТИКУ АНАЛІТИЧНИХ У КРУЗІ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЙМОВІРНОСНИХ ЗАКОНІВ

Любов КУЛЯВЕЦЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: lubov.kulyavets@gmail.com

Для аналітичної в крузі $\{z : |z| < R\}$ характеристичної функції φ ймовірнісного закону F одержано умови на $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$, $x > 0$, при виконанні яких для її максимуму модуля $M_\varphi(r)$ правильна асимптотична рівність $\ln M_\varphi(r) = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \dfrac{\tau + o(1)}{(R-r)^p}$ при $r \uparrow R$.

Ключові слова: ряд Діріхле, ймовірнісний закон, характеристична функція.

Неспадна неперервна зліва на $(-\infty, +\infty)$ функція F називається [1, с. 10] ймовірнісним законом, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, а визначена для дійсних значень z функція $\varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dF(x)$ називається [1, с. 12] характеристичною функцією цього закону. Якщо φ допускає аналітичне продовження на круг $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \le +\infty$, то φ називається аналітичною в $\mathbb{D}_R$ характеристичною функцією. Вважаємо, що $\mathbb{D}_R$ є максимальним кругом аналітичності функції φ. Відомо [1, с. 37-38], що φ є аналітичною в $\mathbb{D}_R$ характеристичною функцією ймовірнісного закону F тоді і тільки тоді, коли $W_F(x) =: 1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx})$ при $x \to +\infty$ для кожного $r \ge 0$. Звідси випливає, що

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)} = R. \tag{1}$$

Для $0 \le r < R$ приймемо $M_\varphi(r) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$. В [2] досліджено умови, за яких для цілої ($R = +\infty$) характеристичної функції правильне співвідношення

$$\ln M_\varphi(r) = \sum_{j=1}^{m} T_j r^{\varrho_j} + (\tau + o(1)) r^{\varrho}, \quad r \to +\infty, \tag{2}$$

де $\varrho_1 > 1$, $0 < \varrho < \varrho_m < \cdots < \varrho_2 < \varrho_1$ for $m \geq 2$, $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ for $2 \leq j \leq m$ і $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Доведено, що (2) є правильним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконувалась асимптотична нерівність

$$\ln W_F(t) \leq -T_1(p_1-1)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1-1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1-1)}, \quad t \geq t_0(\varepsilon),$$

та існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_k) додатних чисел така, що

$$\ln W_F(t_k) \geq -T_1(p_1-1)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_j/p_1-1)} +$$

$$+(\tau-\varepsilon)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p/p_1-1}$$

і $t_{k+1} - t_k = o(t_k^{(p_1+p-2)/2(p_1-1)})$ при $k \to \infty$.

Ми припустимо, що φ — аналітична в крузі $\{z : |z| < R\}$ ймовірнісного закону F і визначимо умови на W_F, за яких

$$\ln M_\varphi(r) = \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r \uparrow R, \tag{3}$$

де $0 < p < p_m < \cdots < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ для $2 \leq j \leq m$ і $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Для цього приймемо $\mu_\varphi(r) = \sup\{W_F(x)e^{rx} : x \geq 0\}$ і доведемо спочатку, що асимптотична рівність (3) рівносильна асимптотичній рівності

$$\ln \mu_\varphi(r) = \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r \uparrow R. \tag{4}$$

Оскільки [1, с. 55] $\mu_\varphi(r) \leq 2M_\varphi(r)$, то з нерівності

$$\ln M_\varphi(r) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r \uparrow R \tag{5}$$

випливає нерівність

$$\ln \mu_\varphi(r) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r \uparrow R. \tag{6}$$

З іншого боку [1, с. 52],

$$M_\varphi(r) \leq I_\varphi(r) + 1 + W_F(0), \quad I_\varphi(r) = \int_0^\infty W_F(x)e^{rx}dx + 1 + W_F(0)$$

для всіх $r \in (0, R)$. Для $I_\varphi(r)$ отримаємо

$$I_\varphi(r-(R-r)^{p_1-p+2}) = \int\limits_0^\infty W_F(x)e^{(r-(R-r)^{p_1-p+2})x}dx \leq$$

$$\le \mu_\varphi(r)\int\limits_0^\infty e^{-(R-r)^{p_1-p+2}x}dx = \frac{\mu_\varphi(r)}{(R-r)^{p_1-p+2}}.$$

Тому

$$\ln M_\varphi(r-(R-r)^{p_1-p+2}) \le \sum_{j=1}^m \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r\uparrow R. \tag{7}$$

Позначимо $t = r-(R-r)^{p_1-p+2}$. Тоді неважко довести таке: $r = t-(1+o(1))(R-t)^{p_1-p+2}$ при $t\uparrow R$. Тому для кожного $1\le j\le m$

$$\frac{1}{(R-r)^{p_j}} = \frac{1}{(R-t)^{p_j}}\left(1-(1+o(1))p_j(R-t)^{p_1-p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{(R-t)^{p_j}} - \frac{(1+o(1))p_j}{(R-t)^{p_j-p_1+p-1}} = \frac{1}{(R-t)^{p_j}} + o\left(\frac{1}{(R-t)^p}\right)$$

при $t\uparrow R$. Тому з (7) випливає, що

$$\ln M_\varphi(t) \le \sum_{j=1}^m \frac{T_j}{(R-t)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-t)^p}, \quad t\uparrow R,$$

тобто нерівності (5) і (6) еквівалентні.

Якщо тепер виконується (4), то з еквівалентності нерівностей (5) і (6) випливає (3). Якщо ж (4) не виконується, то з огляду на нерівності (3) і $\mu_\varphi(r)\le 2M_\varphi(r)$ правильна нерівність

$$\ln \mu_\varphi(r_k) \le \sum_{j=1}^m \frac{T_j}{(R-r_k)^{p_j}} + \frac{\tau_1+o(1)}{(R-r_k)^p}, \quad k\to\infty,$$

для деякої послідовності $(r_k)\uparrow R$, де $\tau_1<\tau$. Тоді для цієї послідовності $(r_k)\uparrow R$ правильна нерівність (7) з τ_1 замість τ, і повторюючи наведені раніше міркування, отримуємо оцінку (3) з τ_1 замість τ для деякої послідовності $(t_k)\uparrow R$, що неможливо.

Отже, асимптотичні рівності (3) і (4) є рівносильними, і нам залишилось визначити умови на W_F, за яких правильна асимптотична рівність (4). Для цього можемо використати такий отриманий в [2] результат.

Лема 1. *Нехай функції $P(t)$ і $Q(\sigma)=\sup\{P(t)+\sigma t: t\ge 0\}$ спряжені за Юнгом, а $0<p<p_m<\dots<p_2<p_1$, $T_1>0$, $T_j\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ для $2\le j\le m$, $\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ і $p_1+p>2p_2$. Тоді для того*

$$Q(\sigma = \sum_{j=1}^m \frac{T_j}{|\sigma|} + \frac{\tau+o(1)}{|\sigma|^p}, \quad \sigma\uparrow 0, \tag{8}$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) була правильною нерівність

$$P(t) \le T_1(p_1+1)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1+1)} + \sum_{j=2}^m T_j\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1+1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1+1)}, \quad t\ge t_0(\varepsilon);$$

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_k) додатних чисел така, що

$$P(t_k) \geq T_1(p_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1+1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1+1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1+1)}$$

і

$$t_{k+1}-t_k = o(t_k^{(p_1+p+2)(2(p_1+1)}),\quad k\to\infty.$$

Якщо приймемо $\sigma = r - R$, то, оскільки

$$\ln \mu_\varphi(r) = \sup\{\ln W_F(x) + rx : x \geq 0\} =$$

$$= \sup\{\ln (W_F(x)e^{Rx}) + (r-R)x : x\geq 0\} = Q(r-R) = Q(\sigma),$$

де $P(t) = \ln (W_F(t)e^{Rt})$. Тому згідно з лемою правильне таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $p_1 + p > 2p_2$. Тоді для того, щоб асимптотична рівність (4) була правильною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*

1) була правильною нерівність

$$\ln (W_F(t)e^{Rt}) \leq T_1(p_1+1)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1+1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1+1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1+1)},\quad t\geq t_0(\varepsilon);$$

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_k) додатних чисел така, що

$$\ln (W_F(t_k)e^{Rt_k} \geq T_1(p_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1+1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1+1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1+1)}$$

і

$$t_{k+1}-t_k = o(t_k^{(p_1+p+2)(2(p_1+1)}),\quad k\to\infty.$$

Зрештою, оскільки асимптотичні рівності (3) і (4) є рівносильними, приходимо до такої основної теореми.

Теорема 1. *Нехай $p_1 + p > 2p_2$. Тоді для того, щоб асимптотична рівність (3) була правильною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконувались умови 1) і 2) раніше доведеного твердження.*

Автор висловлює подяку Шереметі М.М. за слушні зауваження.

Література

1. *Линник Ю.В.* Разложения случайных величин и векторов / Ю.В. Линник, И.В. Островский // M: Nauka, 1972. — 479 с.

2. *Стець Ю.В.* Багаточленна степенева асимптотика логарифма максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле / Ю.В. Стець, М.М. Шеремета // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2015. — Вип. 80. — С. 145–160.

Стаття: надійшла до редколегії 01.07.2015
прийнята до друку 11.11.2015

ON MANY-TERMED ASYMPTOTIC OF ANALYTIC IN A DISK CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PROBABILITY LAWS

Lyubov KULYAVEC'

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: lubov.kulyavets@gmail.com

For an analytic in a disk $\{z : |z| < R\}$ characteristic function φ of the probability law F, there are indicated conditions on $W_F(x) = 1-F(x)+F(-x)$, $x > 0$, under which for its maximum modulus $M_\varphi(r)$ the asymtotical equality $\ln M_\varphi(r) = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \dfrac{\tau + o(1)}{(R-r)^{p}}$ as $r \uparrow R$ holds.

Key words: Dirichlet series, probability law, characteristic function.