*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 61–67*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 61–67*

УДК 512.536

# ПРО КЛАСИЧНІ ДУОПОЛІГОНИ ТА ДЕЯКІ ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ

**Микола КОМАРНИЦЬКИЙ, Галина ЗЕЛІСКО**

*Львівский національний університет імені Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1 , Львів, 79000*
*e-mail: nick.komarnytsky@yandex.ua*

Введено поняття двостороннього підполігону центрованого полігону над моноїдом з нулем, яке природно узагальнює двосторонні ідеали моноїда. Воно ґрунтується на відомій властивості вставки множника (IFP), яку вивчали Грунвальд і Ссеввіірі. Двосторонні підполігони застосовують до побудови основ теорії класичних дуополігонів і класично первинних підполігонів. Характеризуються класичні дуополігони засобами мови ануляторних ідеалів. Досліджено класичні топ-дуополігони.

*Ключові слова:* первинний підполігон, класично первинний полігон, двосторонній підполігон, класичний дуополігон, класичний топ-дуополігон.

**1. Вступ.** Мета нашої праці – дослідити можливість побудови теорії дуополігонів за класичною схемою, на відміну від технологій, які застосовують ідею цілком інваріантних підполігонів, див., наприклад, працю Роуетана і Ершада [14]. Зауважимо, що клас дуополігонів, який досліджується в цій праці, не є замкненим стосовно переходу до прямих добутків сімей полігонів, що сильно контрастує з класичним розумінням дуокілець та дуомодулів, а отже, і дуополігонів. Ми вводимо двосторонні, і зокрема, двосторонні класично первинні підполігони, які якраз і є точками класичного спектра Като цього полігону. Конкретні приклади засвідчують, що навіть над комутативними моноїдами з нулем існують класично первинні підполігони, які не зобов'язані бути первинними. Назва "класично первинний" для спектра походить від нового терміна "класично первинний підмодуль". Цей тип модулів вперше використали Бехбооді і Кохі в праці [6] (за назвою "слабко первинні"). В [5] дослідження таких модулів продовжено вже під назвою класично первинних модулів. Досліджуватимемо класично первинний спектр Като полігону за схемою, яку започаткували названі автори для модулів. Користуватимемось введеним терміном "двосторонній підполігон", який узагальнює (в деякому сенсі) поняття двостороннього ідеалу кільця (моноїда) і допомагає виділити цікавий клас полігонів, природно названий класом класичних дуополігонів. Використовуватимемо техніку підмодулів з "властивістю вкладення множника" ($IFP$) (див., наприклад, [10]) та ідею двостороннього підмодуля з [2]. Визначимо найпростіші властивості таких підполігонів. Вводимо поняття класично первинного підполігону і класичного спектра Като мультиплікаційного класичного дуополігону. З'ясуємо властивості таких полігонів та продемонструємо, що класичний спектр Като поводиться подібно як звичайний спектр Като моноїда. Класичні дуополігони охарактеризовані мовою ануляторних правих ідеалів. Результат нагадує твердження Ломпа і Де ла Пен'ї доведений для модулів [13].

**2. Попередні дані.**

Всюди через $S$ позначатимемо моноїд з нулем $0$ і ненульовою одиницею $1$, але не обов'язково комутативний. Непорожня множина $A$ називатиметься правим $S$-полігоном і позначається через $A_S$, якщо існує така дія $(a, s) \mapsto as$ з $A \times S$ в $A$, що i) $a(st) = (as)t$ для всіх $a \in A$ і $s, t \in S$, ii) $a1 = 1$ для кожного $a \in A$.

Підмножина $B$ полігону $A_S$ називається підполігоном, якщо $bs \in B$ для всіх $b \in B$ і $s \in S$. Символічно записуємо цю ситуацію так: $B \leqslant A$. Тому підполігон $S$-полігону $S_S$(відповідно ${}_SS$) є правим (відповідно лівим) ідеалом моноїда $S$. Елемент $0 \in A_S$ називається нерухомим елементом полігону $A$, якщо для всіх $s \in S$, $0s = 0$. Всі полігони $A_S$ в цій статті мають єдиний нерухомий елемент, який позначається через $0$ і такий, що для всіх $a \in A$ і $s \in S$, $0s = 0$ і $a0 = 0$; $0$ називатимемо нулем полігону $A$. Полігони з зазначеною властивістю зазвичай називають центрованими. Якщо $I$ деякий ідеал в $S$, то рісів фактор моноїда $S$ за модулем $I$ позначатимемо через $S/I$; добре відомо, що класами еквівалентності в $S/I$ є $I$ (нуль для $S/I$) і всі одноелементні множини $\{a\}$, де $a \in S \setminus I$. Надалі вираз "$S$-полігон" означатиме центрований "унітарний правий $S$-полігон". Категорію всіх центрованих унітарних правих полігонів позначаємо через $CActs - S$.

Словосполучення "ідеал моноїда" $S$ означатиме "двосторонній ідеал моноїда". Ідеал $I$ в $S$ називаємо первинним, якщо для будь-яких $a, b \in S$, з включення $aSb \subseteq I$ випливає, що або $a \in I$ або $b \in I$. Отже, $I$ є первинним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких правих ідеалів $J$ і $K$ моноїда $S$, з включення $JK \subseteq I$ випливає, що $J \subseteq I$ або $K \subseteq I$.

Підполігон $B$ полігона $A$ називається первинним підполігоном, якщо для кожного $a \in A$ і кожного $r \in S$, з включення $aSr \subseteq B$ випливає, що або $a \in B$ або $Ar \subseteq B$. Сам полігон $A$ з $CActs - S$ називається первинним, якщо підполігон $(0)$ полігону $A$ є первинним (Див. [3]).

Назвемо власний підполігон $P$ полігону $A$ класично первинним підполігоном, якщо для кожного підполігону $C$ полігону $A$ і будь-яких ідеалів $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ моноїда $S$ з включення $C\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq B$ випливає, що або $C\mathcal{A} \subseteq P$ або $C\mathcal{B} \subseteq P$.

Очевидно, над простим моноїдом з нулем всі власні підполігони довільного ненульового полігону будуть класично первинними. Зауважимо, що класично первинні модулі різні автори визначають по-різному, але еквівалентними способами. Означення класично первинного підполігону отримується з означення класично первинного підмодуля з праці [10] заміною відповідних модульних термінів їхніми полігонними відповідниками. Класично первинні полігони мають ту властивість, що праві анулятори ненульових їхніх підполігонів є первинними ідеалами моноїда. Правда, такі первинні анулятори можуть бути різними для різних підполігонів, тоді як у первинних полігонах вони рівні між собою. Для детальнішого знайомства з класично первинними модулями рекомендуємо вже згадану працю [6].

Моноїд $S$ називається дуомоноїдом, якщо кожний односторонній ідеал у ньому двосторонній, тобто для кожного $x \in S$, $xS = Sx$. Додаткову інформацію про це можна почерпнути з [4].

Якщо для кожного підполігону $B$ полігону $A$ існує такий ідеал $I$ моноїда $S$, що $B = AI$, то $S$-полігон $A$ називатимемо мультиплікаційним $S$-полігоном. Такі полігони досліджували в працях [9], [12]. Заданий $S$-полігон $A$ є мультиплікаційним тоді і тільки тоді, коли для кожного $a \in A$ існує такий ідеал $I$ моноїда $S$, що $aS = AI$. Очевидно, що для підполігону $B$ мультиплікаційного $S$-полігону $A$ виконується рівність $B = A(B : A)$, де $(B : A) = \{s \in S : As \subseteq B\}$. Повна підкатегорія категорії $CActs - S$, класом обєктів якої є клас мультиплікаційних полігонів, називається категорією мультиплікаційних полігонів і позначається через $MCActs - S$. За додатковою інформацією щодо теорії полігонів відсилаємо читача до праці [11].

**3. Полігони з властивістю (IFP) і двосторонні підполігони.**

Нагадаємо, що класичний підхід до дуокілець ґрунтується на понятті двостороннього ідеалу. У випадку модулів, а тим паче полігонів поняття двосторонності ніхто і не намагався ввести у зв'язку з їхньою природно апріорною односторонністю.

Проте скрупульозний аналіз виявив, що деякі підполігони все ж мають властивості, які з великою ймовірністю нагадують двосторонні структури.

Введемо формальне означення підполігону з властивістю вставки множника (В.В.М), або в англійському варіанті (IFP), яке використано в праці Грунвальда і Ссеввіірі [10], в контексті теорії модулів. У вужчій ситуації це поняття вперше сформулював Белл в [7], досліджуючи майже-кільця.

Підполігон $B$ правого полігону $A$ називається підполігоном з властивістю вставки множника (IFP), якщо з умови $sa \in B$ для $s \in S$ і $a \in A$ випливає включення $sSa \subseteq B$. Кажуть, що полігон $A$ має властивість (IFP), якщо його нульовий підполігон має властивість (IFP).

У випадку правих ідеалів моноїда з нулем властивість (IFP) для кожного правого підідеалу $K$ правого ідеалу $I$ еквівалентна двосторонності ідеалу $I$. Тому надалі підполігони полігону $A$, всі праві підполігони яких володіють властивістю (IFP), називатимемо двосторонніми підполігонами. Серед прикладів відзначимо, що весь полігон є підполігоном з властивістю (IFP) як підполігон самого себе, а нульовий підполігон є двостороннім у кожному полігоні над дуомоноїдом з нулем. Над комутативним моноїдом всі підполігони довільного полігону є двосторонніми, що свідчить про природність цього поняття.

Нагадаємо деякі означення з праці [1], що стосуються правихануляторних ідеалів елементів полігону.

Для елемента $a \in A$ визначимо правий анулятор формулою $Ann_r(a) := \{(s,t) \in S \times S : as = at\}$. Це права конгруенція на полігоні $A$. Нуль-компонента цієї конгруенції називається правимануляторним ідеалом елемента $a \in A$ і позначається через $ann_r(a)$.

**Твердження 1.** *Нехай $S$ — моноїд з нулем і $A$ — полігон з категорії $CActs - S$. Тоді перелічені нижче властивості полігону $A$ еквівалентні:*

*1) кожний підполігон полігону $A$ має властивість (IFP);*

*2) кожний скінченно породжений підполігон полігону $A$ має властивість (IFP);*

*3) кожний циклічний підполігон полігону $A$ має властивість (IFP);*

*4) для кожного підполігону $B$ полігону $A$ фактор полігон Ріса $A/B$ володіє властивістю: правий ануляторний ідеал кожного елемента полігону $A/B$ є двостороннім ідеалом в $S$.*

*Доведення.* Імплікації 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) очевидні. Доведемо імплікацію 3) $\Rightarrow$ 4). Нехай $B$ — підполігон полігону $A$ і $\overline{a} \in A/B$. Потрібно довести, що правий ідеал $Ann_r(\overline{a})$ також є і лівим ідеалом. Припустимо, що $t \in Ann_r\overline{a}$. Тоді $\overline{a}t = \overline{0}$, звідки $\overline{at} = \overline{0}$, а отже, $at \in B$. Завдяки умові (IFP) отримаємо $aut \in B$ для кожного $u \in S$. Тепер бачимо, що $\overline{aut} = \overline{0}$. Далі $\overline{a}ut = \overline{0}$, звідки випливає, що $ut \in Ann_r(\overline{a})$ за будь-якого $u \in S$. Тому $Ann_r(\overline{a})$ є двостороннім ідеалом моноїда $S$. Для завершення доведення достатньо перевірити істинність імплікації 4) $\Rightarrow$ 1). Нехай $as \in B$ для фіксованого підполігону $B$ полігону $A$, де $a \in A$ і $s \in S$. Перейшовши до класів еквівалентності рісового фактора $A/B$, матимемо $s \in Ann_r(\overline{a})$. Врахувавши двосторонність правого анулятора елемента $\overline{a}$ з $A/B$ бачимо, що $us \in Ann_r(\overline{a})$, а це означає виконання умови $aus \in B$ для кожного $u \in S$. Отже, умова (IFP) для підполігону $B$ виконується і доведення твердження завершене. $\square$

Отже, можна назвати полігон $A$ двостороннім, якщо він задовольняє еквівалентні умови Твердження 1.

З означення випливає, що підполігон двостороннього полігону є двостороннім. Зокрема правильна така лема.

**Твердження 2.** *Нехай $A, B, C \in CActs - S$. Якщо $C$ — двосторонній підполігон полігону $B$ і $B$ — двосторонній підполігон полігону $A$, то $C$ — двосторонній підполігон полігону $A$.*

**Твердження 3.** *Двосторонні підполігони довільного полігону утворюють повну ґратку, а двосторонні підполігони з єдиними доповненнями — повну булеву ґратку.*

Доведення цього твердження проводиться безпосередньою преревіркою необхідних властивостей. Це рутинні стандартні перевірки, які може виконати зацікавлений читач.

**4. Класичні праві дуополігони та строгі праві дуополігони.**

Вводимо класичні аналоги правих дуополігонів і правих строгих дуополігонів. Для цього нам треба нагадати необхідні факти з праці [14].

Спочатку введемо поняття класичного дуополігону. Правий полігон називатимемо класичним правим дуополігоном, якщо в ньому всі праві підполігони — двосторонні. Аналогічно формулюється означення класичного лівого дуополігону.

Очевидно, що кожний підполігон правого полігону над правим дуомоноїдом з нулем є двостороннім. Тому всі праві полігони над правим дуомоноїдом з нулем є класичними дуополігонами.

Назвемо $B$ цілком інваріантним підполігоном полігону $A$, якщо $f(B) \subseteq B$ для кожного ендоморфізму $f$ полігону $A$ і $A$ називається дуополігоном, якщо кожний підполігон полігону $A$ є цілком інваріантним.

Правий $S$ — полігон $A$ називається строгим дуополігоном, якщо для кожного підполігону $B$ полігону $A$ слід $tr(B,A) = \bigcup_{f\in Hom(B,A)} f(B)$ полігону $B$ в $A$ дорівнює $B$.

Зауважимо, що розглянуті вище поняття дуополігону та строго дуополігону слабко узгоджуються з класичним підходом до дуопонять. Наприклад, навіть над комутативним моноїдом можуть існувати полігони, які не є строгими дуополігонами. З іншого боку, прямий добуток будь-якої сім'ї класичних правих дуополігонів знову є класичним правим дуополігоном.

**Твердження 4.** *Нехай $S$ — моноїд з ненульовою одиницею $A \in CActs - S$ класичний правий дуополігон. Тоді еквівалентні такі твердження:*

*1) $A$ є строгим дуополігоном;*

*2) кожний підполігон полігону $A$ є строгим дуополігоном;*

*3) якщо $ann_r(a) \subseteq ann_r(b)$, то $b \in aS$ для будь-яких $a, b \in A$;*

*4) правіануляторні ідеали елементів кожного гомоморфного образу полігону $A$ є двосторонніми ідеалами моноїда $S$;*

*5) правіануляторні ідеали елементів кожного рісового фактор-полігону полігону $A$ є двосторонніми ідеалами моноїда $S$.*

*Доведення.* Еквівалентність тверджень 1)–3) визначена в [14]. Еквівалентність тверджень 3) і 5) випливає з твердження 1. Еквівалентність 4) і 5) є наслідком властивості вставки множника, переформульованої для конгруенцій. □

**5. Класично первинні підполігони і класичний спектр Като класичного дуополігону.**

Як ілюстрацію корисності ідеї розгляду двосторонніх підполігонів та класичних дуополігонів пропонуємо одну з можливих технологій перенесення топології Зариського зі спектра Като комутативного моноїда на класичний спектр Като класичного дуополігону.

Надалі, нехай $S$ — дуомоноїд з нулем і нехай $A$ — деякий $S$-полігон. Як ми вже згадували, кожний правий полігон над $S$ є класичним дуополігоном, тому всі його підполігони є двосторонніми. Класично первинним спектром $CKSpec(A)$ довільного полігону $A$ над моноїдом називається множина всіх двосторонніх підполігонів полігону $A$, які є класично первинними. Задамо топологію на $CKSpec(A)$, яка узагальнює топологію Зариського з модулів над комутативними кільцями на класичні дуополігони над дуомоноїдами. Називатимемо цю топологію топологією майже-Зариського на полігоні $A$. Для цього виберемо довільний підполігон $B$ ненульового класичного дуополігону $A$ і визначимо класичний многовид над $B$, який позначаємо $V(B)$, як множину всіх таких класично-первинних підполігонів $P$ полігону $A$, для яких $N \subseteq P$. Як добре відомо: $V(N) = \emptyset$; $V(0) = CKSpec(A)$; $\bigcap_{i\in I} V(N_i) = V(\sum_{i\in I} N_i)$ для довільної множини індексів $I$; $V(N) \cup V(L) \subseteq V(N \cap L)$, де $N, L, N_i \leqslant M$.

Сім'ю всіх підмножин $V(N)$ множини $CKSpec(A)$ позначимо через $C(A)$. Тоді $C(A)$ містить порожню множину і $CKSpec(A)$, але, як і у випадку модулів, $C(A)$ не зобов'язана бути замкненою стосовно скінченних об'єднань.

За аналогією з модулями, назвемо $S$-полігон $A$ *класичним топ-полігоном*, якщо множина $C(A)$ замкнена стосовно скінченних об'єднань, тобто для довільних підполігонів $N$ та $L$ полігону $A$ існує такий підполігон $K$ полігону $A$, що $V(N) \cup V(L) = V(K)$. Очевидно, тоді $C(A)$ задовольняє аксіоми для замкнених підмножин топологічного простору. Зрозуміло також, що усі скінченні перетини доповнень до множин з $C(A)$ утворюють базу відкритих підмножин шуканого простору $CKSpec(A)$.

Зауважимо, що топологія майже-Зариського на моноїді $S$ і звичайна топологія Зариського моноїда $S$ збігаються.

Сформулюємо аналог результату праці [15], який виявився правильним і у випадку класичного спектра Като топ-дуополігону.

**Твердження 5.** *Топологічний простір $X$ є гомеоморфний до $CKSpec(A)$ для деякого топ-дуополігона $A$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі три властивості:*

*1) $X$ є $T_0$ — простором;*

*2) множина відкритих латок простору $X$ є базою в $X$, що містить $X$ і є замкненою стосовно скінченних перетинів;*

*3) довільний перетин незвідних закритих підмножин простору $X$ є замиканням единої точки і $X$ задовольняє умову: якщо $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda \subset U\}$, то існують такі елементи $\lambda_1, .., \lambda_n \in \Lambda$, що $\bigcap_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} \subset U$.*

Доведення теореми є модифікацією відповідного доведення з праці [15] із врахуванням фактів, доведених в праці [8].

## Література


1. *Комарницький М.Я., Зеліско Г.В.* Елементи теорії напівгруп та полігонів: Курс лекцій. – Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2011. — 152 с.
2. *Малоїд-Глебова М.* Про класично-первинний спектр цілком-гільбертових мультиплікаційних модулів // Вісник Львів. уні-ту. Сер. мех.-мат. — 2014. — Вип. 79. – С. 185–195.
3. *Ahsan J., Zhongkui L.* Prime and semiprime acts over monoids with zero // Math. J., Ibaraki Univ. — 2001. — Vol. 33. — P. 9–15.
4. *Anjaneyulu A.* Structure and ideal theory of duo semigroups // Semigroup Forum. — 1981. — Vol. 22. — No 1, — P. 257–276.
5. *Behboodi M. R.* Classical prime submodules, // Ph.D Thesis, Chamran University Ahvaz Iran — 2004.
6. *Behboodi M. R., Koohy H.* Weakly prime modules // Vietnam J. Math. — 2004. — Vol. 32. — № 2. — P.185–195.
7. *Bell H.E.* Near-rings in which each element is a power of itself // Bull. Austral. Math. Soc. — 1970. — Vol. 2. — № 1. — P. 363–368.
8. *A.A. Estaji, A.As. Estaji* Some results on noetherian semigroups // Journal of Algebra and Related Topics. — 2014. — Vol. 2, No 1. — P. 43–53.
9. *Estaji A.A., Shabani, M.* A note on multiplication $S$-act, // Far East J. Mash. Sci. — Vol. 36, No 2. — 2010. — P. 133–150.
10. *Groenewald N.J., Ssevviiri D.* Completely prime submodules, //International Electronic Journal of Algebra. — 2013. — Vol. 13. — No. 1. — P. 1–14.
11. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.* Monoids, Acts and Categories, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2000.

12. *Komarnitskiy M., Oliynyk R.,* Preradical and kernel functors over categories of S-acts // Algebra and Discrete Mathematics. — 2010. — Vol. 10. — No. 1. — P. 57–66.
13. *Lomp C., Peña P.* A note on prime modules // Divalgaciones Matematicas. — 2000. — Vol. 8. — No 1. — P. 31–42.
14. *Roueentan M., Ershad M.* Strongly duo and duo right S-acts // Italian J.P.A.M. — 2014. Vol. 32, — P. 143–154.
15. *Vale R.* A topological description of the space of prime ideals of a monoid // arXiv:1006. 5687v2 [math.GN] 1 Jul 2010.

*Стаття: надійшла до редколегії 02.07.2015*
*доопрацьована 04.11.2015*
*прийнята до друку 11.11.2015*

## CLASSICAL DUO-ACTS AND SOME THEIR APPLICATIONS

**Mykola Komarnitskij, Galyna Zelisko**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000*
*e-mail: nick.komarnytsky@yandex.ua*

A notion of a two-sided subact of centered act over a monoid with zero is introduced. Properties of these acts are described and, on their basis, the theory of classical duo-acts is constructed, as opposed to the theory of duo-acts based on the technique of completely invariant subacts. The acts with various annihilator conditions are considered. The two-sided subacts are applied for construction of backgrounds of the theory of classical duo-acts and prime subacts. The classical duo-acts are characterized by means of language of annihilator ideals. The classical duo top-acts are described.

*Key words:* act, classical duo-act, classical prime act, two-sided subact, classical duo-act, classical duo top-act