ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 42–51
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 42–51

УДК 512.536

НАПІВГРУПИ ТА ПОЛІГОНИ З АНУЛЯТОРНИМИ УМОВАМИ

Юрій ІЩУК, Ірина КОЗАЧОК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: yishchuk@lnu.edu.ua

Введено означення напівкомутативної напівгрупи і абелевого S-полігона за аналогією з означеннями напівкомутативних, абелевих модулів і кілець, які досліджували у працях [1]–[2]. Напівгрупу S називатимемо напівкомутативною, якщо для всіх $x, y \in S$, з рівності $xy = 0$ випливає $xSy = 0$. Правий S-полігон A_S називатимемо абелевим, якщо для всіх $a \in A_S$, $s \in S$, і всіх ідемпотентів $e \in S$, $ase = aes$.
Використовуючи поняття модулів з ануляторними умовами Бера [12], введено поняття S-полігона з умовою р.р.-Бера і доведено таке: якщо A_S — S-полігон з умовою р.р.-Бера, то умови редукованості, симетричності, напівкомутативності й абелевості для нього будуть еквівалентними.

Ключові слова: напівкомутативні, абелеві, редуковані, симетричні, з умовами Бера напівгрупи і S-полігони.

1. Вступ. Нехай S — напівгрупа з нулем 0. Зображення напівгрупи S перетвореннями множини визначає S-полігон (S-act) так само, як зображення кільця R ендоморфізмами абелевої групи визначає R-модуль.

Наша мета — дослідити властивості напівгруп і полігонів над ними, які близькі до комутативних структур або задовольняють ануляторні умови Бера. Ми використовували відомі методи досліджень кілець і модулів, тому багато прикладів, означень і властивостей за аналогією перенесено на напівгрупи і полігони з таких праць: [1]–[5], [7]– [12]. Позначення напівгруп, полігонів та їхні елементарні властивості ми почерпнули з підручників [6], [13]– [15].

Нагадаємо, що модуль M_R називають напівкомутативним модулем, якщо для будь-якого $m \in M$ і будь-якого $a \in R$, з умови $ma = 0$ випливає рівність $mRa = 0$ [1]. У другій частині опрацьовано властивості напівкомутативних полігонів і напівгруп. Також розглянуто напівгрупи, нульові добутки яких комутують. Для напівгрупи S з нулем $\mathbf{0}$ і $n \geqslant 2$ ми кажемо, що S задовольняє умову ZC_n, якщо виконується рівність $a_1 \cdots a_n = 0 \Rightarrow a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = 0$, для кожної перестановки $\sigma \in S_n$. У [3] доведено таке: якщо S задовольняє ZC_n для фіксованого $n \geqslant 3$, тоді S також задовольняє умову ZC_{n+1}, що напівгрупа без нульових нільпотентних елементів задовольняє умову ZC_n для всіх $n \geqslant 2$.

Нехай R — асоціативне кільце з одиницею, модуль M — унітарний правий R-модуль. Для непорожньої множини X кільця R використовуватимемо односторонні ідеали $r_R(X) = \{r \in R \mid Xr = 0\}$ та $l_R(X) = \{r \in R \mid rX = 0\}$, які називають правим анулятором X в R і лівим анулятором X в R, відповідно. Символом " $\leqslant$ " позначимо відношення бути підмодулем.

Нагадаємо, що кільце R називається редукованим, якщо R не має ненульових нільпотентних елементів. Зауважимо, що всі редуковані кільця — абелеві (тобто, всі ідемпотенти в них є центральними). У [8] Капланський ввів кільця Бера як кільця, в яких правий (лівий) анулятор будь-якої непорожньої підмножини обов'язково породжується ідемпотентом. Кільце R називається квазі-Беровим, якщо правий анулятор кожного правого ідеалу кільця R породжується (як правий ідеал) ідемпотентом. Обидва визначення ліво-право симетричні. Кільце R називається правим (відповідно, лівим) головним квазі-Беровим (або просто правим (відповідно, лівим) p.q.-Беровим кільцем, якщо правий (відповідно, лівий) анулятор головного правого (відповідно, лівого) ідеалу кільця R породжується ідемпотентом. Кільце R називається p.q.-Беровим кільцем, якщо воно є одночасно правим і лівим p.q.-Беровим.

Інше узагальнення кілець Бера становлять p.p.-кільця. Кільце R називається правим (відповідно, лівим) p.p.-кільцем, якщо правий (відповідно, лівий) анулятор елемента з R породжується ідемпотентом. Кільце R називається p.p.-кільцем, якщо воно є одночасно правим і лівим p.p.-кільцем. Кільце R називається напівкомутативним, якщо для кожного $a \in R$, $r_R(a)$ є ідеалом в R. (Те саме для будь-яких $a, b \in R$, з умови $ab = 0$ випливає, що $aRb = 0$). Ідемпотент $e \in R$ називається центральним, якщо $xe = ex$ для всіх $x \in R$. Ідемпотент $e^2 = e \in R$ називається лівим (відповідно, правим) напівцентральним ідемпотентом, якщо eR (відповідно, Re) є двостороннім ідеалом в R.

У [9] введено поняття Берових, квазі-Берових і p.p.-модулів так:

а) M_R називається Беровим модулем, якщо для будь-якої підмножини X з M, $r_R(X) = eR$, де $e^2 = e \in R$;

б) M_R називається квазі-Беровим модулем, якщо для будь-якого підмодуля N з M, $r_R(N) = eR$, де $e^2 = e \in R$;

в) M_R називається p.p.-модулем, якщо для будь-якого $m \in M$, $r_R(m) = eR$, де $e^2 = e \in R$.

У [4] модуль M_R називається p.q.-Беровим, якщо для будь-якого $m \in M$, $r_R(mR) = eR$, де $e^2 = e \in R$. Модуль M_R називають напівкомутативним модулем, якщо для будь-якого $m \in M$ і будь-якого $a \in R$, з умови $ma = 0$ випливає, що $mRa = 0$.

Нехай M — правий R-модуль і $S = End_R(M)$. Тоді M — лівий S-модуль, правий R-модуль і S-R-бімодуль. У праці [12] Різві і Роман називають M модулем Бера, якщо правий анулятор в M будь-якого лівого ідеалу в S породжується ідемпотентом з S (або, що еквівалентно, для всіх R-підмодулів N з M, $l_S(N) = Se$ з $e^2 = e \in S$); і M є квазі-Беровим модулем, якщо правий анулятор в M будь-якого ідеалу S породжується ідемпотентом з S (або, що еквівалентно, для всіх цілком характеристичних

R-підмодулів N з M, $l_s(N) = Se$ з $e^2 = e \in S$). Серед іншого, вони довели, що будь-яка пряма сума модулів Бера (відповідно квазі-Бера) є також Беровим (відповідно, квазі-Беровим) модулем, і кілець ендоморфізмів $S = End_R(M)$ Берових (відповідно, квазі-Берових) модулів M є Беровим (відповідно, квазі-Беровим) кільцем (див. теорему 4.1 в [12]).

В [2, твердження 2.7] доведено таке: якщо модуль M_R є напівкомутативним модулем, то M_R є модулем Бера тоді і тільки тоді, якщо він є модулем квазі-Бера, і M_R є p.p.-модулем, тоді і тільки тоді, якщо це p.q.-Беровий модуль. Для напівкомутативного кільця R доведено, що R є p.p.-кільцем тоді і лише тоді, коли $R[x]$ є p.p.-кільцем. Кільце R є Беровим, тоді і тільки тоді, коли $R[x]$ — кільце Бера, R є p.q.-Беровим кільцем, тоді і тільки тоді, коли $R[x]$ — p.q.-Берове кільце.

Нехай S — моноїд з одиницею $\mathbf{1}$.

Означення 1. *Непорожня множина A називається правим S-полігоном (або правим полігоном над моноїдом S), якщо існує таке відображення:*

$$\mu : A \times S \to A,$$
$$(a, s) \mapsto as = \mu(a, s),$$

де для всіх $s, t \in S$ і для всіх $a \in A$ виконуються умови:

1) $a \cdot 1 = a$;

2) $a(st) = (as)t$.

Інколи таке відображення називають структурованим відображенням.

Правий S-полігон A позначається через A_S. Аналогічно визначається лівий S-полігон, який позначається через ${}_SA$. Зазначимо, що сам моноїд S є правим S-полігоном, і одночасно лівим S-полігоном.

Якщо S — напівгрупа без одиниці, то перша умова в означенні полігона є зайвою. Тоді говоримо про полігон над напівгрупою.

Якщо S є комутативним моноїдом, то кожний лівий S-полігон можна розглядати і як правий S-полігон. Справді, якщо ${}_SA$ є лівим S-полігоном, то можна визначити множення справа на елемент з S: $a * s = sa$ для всіх $a \in A$ і $s \in S$. Тоді $a * 1 = 1a = a$ для всіх $a \in A$ і

$$a * (s_1 s_2) = a * (s_2 s_1) = (s_2 s_1)a =$$
$$= s_2(s_1 a) = s_2(a * s_1) = (a * s_1) * s_2.$$

У цьому випадку можна розглядати A над S як S-біполігон, оскільки для всіх $s_1, s_2 \in S$ і $a \in A$ виконується рівність

$(s_1 a) * s_2 = s_2(s_1 a) = (s_2 s_1)a = (s_1 s_2)a = s_1(s_2 a) = s_1(a * s_2)$.

У цій праці всі полігони A володіють нулем $\mathbf{0}$, тобто таким елементом, для якого виконується $\mathbf{0} \cdot s = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \in A$, $\forall s \in S$.

Означення 2. *Правий S-полігон A_S називається точним, якщо для всіх $s, t \in S$ і деякого $a \in A$ з рівності $as = at$ випливає, що $s = t$.*

Означення 3. *Правий S-полігон A_S називається строго точним, якщо для всіх $s, t \in S$ і всіх $a \in A$ з рівності $as = at$ випливає, що $s = t$.*

Очевидно, що кожний строго точний полігон є точним полігоном. Полігони S_S та ${}_SS$ є точними, оскільки $1 \in S$, і ці полігони строго точні, якщо S є скоротним зліва або справа.

З означення 2 випливає таке: якщо полігон містить точний полігон, то весь полігон також точний. Якщо ж $A_i, i \in I$ строго точні праві S-полігони, то їхнє об'єднання $\bigcup_{i \in I} A_i$ також є строго точним полігоном.

2. Напівкомутативні напівгрупи й абелеві полігони над ними.

Означення 4. *Напівгрупа S називається напівкомутативною, якщо для будь-яких $a, b \in S$, $ab = 0$ виконується, що $aSb = 0$.*

Твердження 1. *Такі умови для напівгрупи S еквівалентні.*

1. Напівгрупа S — напівкомутативна.

2. Правий анулятор будь-якого елемента є ідеалом в S.

3. Лівий анулятор будь-якого елемента є ідеалом в S.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Нехай S — напівкомутативна та $Ann_r(a) = \{s \in S,\ as = 0\}$ — правий анулятор елемента $a \in S$. Очевидно, що $Ann_r(a)$ — правий ідеал в S.

Тоді з умови (1) випливає, що $\forall s \in S, \forall b \in Ann_r(a)$ виконується $a(sb) = 0$.

Отже, $sb \in Ann_r(a)$ для всіх $s \in S$, тобто $Ann_r(a)$ є двобічним ідеалом в S.

(2) $\Rightarrow$ (1) Якщо $ab = 0$, де $a, b \in S$, то $b \in Ann_r(a)$. Оскільки за умовою (2) $\forall a \in S$, $Ann_r(a)$ — двобічний ідеал, то $\forall s \in S$, $b \in Ann_r(a)$ і $asb = 0$.

Звідси, $aSb = 0$, тобто S — напівгрупа.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) доводиться аналогічно, до еквівалентності (1) $\Leftrightarrow$ (2), розглянувши лівий анулятор $Ann_l(b)$ довільного елемента b напівгрупи S. $\square$

Означення 5. *Напівгрупа S називається редукованою, якщо вона не має ненульових нільпотентних елементів.*

Введемо означення абелевого полігону за аналогією з абелевим кільцем і модулем, проаналізуємо їхні властивості. У [1] введено таке означення абелевого модуля.

Означення 6. *Модуль M над кільцем R називається абелевим, якщо для будь-яких $m \in M$, $a \in R$ і $e^2 = e \in R$, $mae = mea$.*

Означення 7. *Полігон A над моноїдом S називатимемо абелевим, якщо для будь-яких $a \in A$ і $s \in S$ та будь-якого ідемпотента $e^2 = e \in S$ виконується рівність $ase = aes$.*

Лема 1. *1. Напівгрупа S є з центральними ідемпотентами тоді і тільки тоді, коли кожен S-полігон є абелевим.*

2. Напівгрупа S буде з центральними ідемпотентами тоді і тільки тоді, коли S — абелевий полігон над S.

Доведення. 1. Доведемо необхідність.

Нехай S — напівгрупа з центральними ідемпотентами. З означення 7 для будь-яких $e^2 = e \in S$, $s \in S$ виконується рівність $se = es$. Тоді $ase = aes$, для $a \in A$. Отже, полігон A над S — абелевий.

Доведемо достатність.

Нехай кожен полігон A над напівгрупою S — абелевий. Якщо $A = S^1$, тоді $se = a$ і виконується рівність $se = 1se = 1es = es$. Звідси, напівгрупа S з центральними ідемпотентами.

2. Необхідність доводиться аналогічно як в 1.

Доведемо достатність. Нехай полігон A — абелевий. Якщо $A = S^1$, то напівгрупа S з центральними ідемпотентами. Якщо A — без одиниці, то за відомою процедурою можна долучити одиницю й отримати напівгрупу з одиницею. Тоді $se = a$ і виконується рівність $se = 1se = 1es = es$. Тому напівгрупа S є з центральними ідемпотентами. □

З прикладу 1 випливає, що існують абелеві S-полігони навіть, якщо S не є напівгрупою з центральними ідемпотентами.

Приклад 1. Побудуємо абелевий S-полігон A, де S не є напівгрупою з центральними ідемпотентами.

1. Нехай P — будь-яке поле. Розглянемо напівгрупу верхніх трикутних 2×2 матриць $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \text{де } a, b, c \in P \right\}$ і полігон $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \text{де } d \in P \right\}$. Для будь-якого $a \in A$ і $s \in S$, якщо $e^2 = e \in S$, то виконується $ase = aes$.

Отже, S — абелевий правий S-полігон.

2. Для $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ та $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ очевидно, що S — абелева.

Нехай $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$. Тоді e — ідемпотент в S. Для $a = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S$ отримаємо $ae = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ та $ea = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Отже, S — напівгрупа з центральними ідемпотентами.

Нехай $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$. Тоді $ae = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$,

та $ea = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Тому ідемпотент e не є центральним.

Отже, S — не є напівгрупою з центральними ідемпотентами.

Твердження 2. *Клас абелевих полігонів є замкнутим щодо взяття підполігонів, добутків і гомоморфних образів. Тому абелеві полігони замкнуті щодо прямих сум.*

Доведення. 1. Нехай A — абелевий полігон і його підмножина $B \subset A$, $\forall b \in B$. Тоді $\forall s \in S$, $e^2 = e \in S$ виконується $bes = bse$, бо $b \in B \Rightarrow b \in A$. Отже, B — абелевий підполігон за означенням 7.

2. Нехай A, B — абелеві полігони над S. Тоді добуток полігонів $A \times B$ — також абелевий, бо $A \times B = \{(a, b) \in A \times B\}$ і $(a, b)es = (aes, bes) = (a, b)se$. Для будь-яких $e^2 = e, s \in S$, $a \in A$, $b \in B$.

3. Нехай $\varphi : A \to B$ — гомоморфізм полігону A в B. Тоді для будь-якого $b \in Im\varphi \subseteq B$ існує таке $a \in A$, що $\varphi(a) = b$, і $\forall s \in S$ $\varphi(as) = \varphi(a)s$. Отже, $bes = \varphi(a)es = \varphi(aes) = \varphi(ase) = \varphi(a)se = bse$ для будь-якого ідемпотента $e \in S$. Тому $\varphi(A)$ — абелевий полігон. □

Твердження 3. *Напівгрупа S буде напівгрупою з центральними ідемпотентами тоді і лише тоді, коли існує точний абелевий полігон над нею.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Якщо S напівгрупа з центральними ідемпотентами, то $se = es$ для будь-якого $e^2 = e, s \in S$. За лемою 1 S-полігон S_s є абелевим, отже, $ase = aes$ і $As = 0$. Для всіх $s, t \in S$ і деякого $a \in S_s$, отримаємо $As = At = 0$. Звідси, $s = t$. Отже, існує точний абелевий S-полігон.

($\Leftarrow$) Нехай існує точний абелевий S-полігон A такий, що для будь-яких $a \in A$ і $e^2 = e,\ s \in S$, тоді $aes = ase$. Звідси, з точності A над S виплиає, що $es = se$. Отже, S — напівгрупа з центральними ідемпотентами. □

Зі статті Д.Андерсена і В.Каміло [3] розглянемо таке означення і теореми.

Означення 8. *Нехай S — напівгрупа з нулем і $n \geqslant 2$. Тоді кажуть, що S задовольняє умову ZC_n, якщо для будь-яких $a_1, \dots, a_n \in S$ з того, що $a_1 \cdots a_n = 0$ випливає $a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = 0$ для всіх $\sigma \in S_n$.*

Теорема 1. *Будь-яка редукована напівгрупа S володіє властивістю ZC_2.*

Теорема 2. *Нехай S — напівгрупа з 0 і $n \geqslant 3$. Якщо S задовольняє умову ZC_n, тоді S задовольняє умову ZC_{n+1} також.*

Наслідок 1. *Якщо напівгрупа S задовольняє властивість ZC_3, то S задовольнятиме ZC_n для всіх $n \geqslant 3$.*

Теорема 3. *Нехай S редукована напівгрупа. Тоді S задовольняє ZC_n для всіх $n \geqslant 2$.*

Нехай S — напівгрупа з нулем. Якщо S має одиницю, тоді зрозуміло, що S задовольняє умову ZC_n, звідки випливає, що S задовольняє і умову ZC_{n-1} для $n \geqslant 3$. З наступного прикладу випливає таке: коли S не має одиниці, тоді не виконується $ZC_n \Rightarrow ZC_{n-1}$ для $n \geqslant 3$.

Приклад 2. Нехай $M_n = \{0\} \cup \{e_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, де $e_{ij}e_{lk} = e_{ik}$, якщо $j = l$ і 0 в іншому випадку. Будь-який добуток n елементів з M_n дорівнюватиме 0, отже, M_n задовольняє умову ZC_n (також задовольняє умову ZC_m для $m \geqslant n$).

Припустимо, що $2 \leqslant i < n$; тоді $e_{12}e_{23} \cdots e_{ii+1} = e_{1i+1} \neq 0$, і означає, що $e_{ii+1}e_{12} \cdots e_{i-1i} = 0$. Отже, M_n не задовольняє ZC_i.

Означення 9. *Регулярна напівгрупа S з центральними ідемпотентами називається Кліфордовою.*

Використовуючи теореми 1–3 і їхні наслідки, ми довели таке твердження.

Твердження 4. *Нехай S — Кліфордова напівгрупа. Якщо S задовольняє умову ZC_n для деякого $n \geqslant 2$, тоді S — редукована напівгрупа.*

Доведення. Припустимо, що $\exists x \neq 0,\ x \in S$ такий, що $x^m = 0$, де $m \geqslant 1$. І нехай $x = xbx$ для деякого $b \in S$. Тоді xb — центральний ідемпотент, тому $x = xbx = x^2b$. Отже, $x = xxb = x(x^2b)b = x^3b = \cdots = x^m b_{m-1} = 0$, а напівгрупа S — редукована. □

3. Полігони з умовами Бера.

Означення 10. *Полігон A над напівгрупою S називатимемо правим р.р.-Беровим, якщо для всіх $a \in A,\ Ann_S(a) = \{s \in S,\ as = \mathit{0}\} = eS$ — правий ідеал в S.*

Означення 11. *Полігон A над напівгрупою S називатимемо правим (лівим) p.q.-Беровим, якщо для всіх $a \in A$ правий анулятор $Ann_S(aS)$ кожного головного правого ідеалу напівгрупи S породжується (як правий ідеал) ідемпотентом.*

Означення 12. *Полігон A над напівгрупою S називається редукованим, якщо для всіх $a \in A$, $\forall s \in S$ виконується таке: $as = 0 \Rightarrow aS \cap As = 0$.*

Лема 2. *Будь-який редукований полігон є напівкомутативним.*

Доведення. Нехай полігон A — редукований, тоді для будь-якого $a \in A$ та $s \in S$ A не є напівкомутативним, тобто виконується $(as = 0) \Rightarrow aS \cap As = 0$. Доведення проведемо від супротивного.

Припустимо, що $as = 0$ *і* $aSs \neq 0$, тоді $\exists t \in S$ таке, що $ats \neq 0$. З рівності $a(ts) = (at)s$ отримаємо, що $a(ts) \in aS$, а $(at)s \in As$. Отже, $ats \in aS \cap As$. Це суперечить редукованості A. Тому A — напівкомутативний полігон. □

Лема 3. *Якщо S-полігон A — напівкомутативний, то він абелевий. Зворотне твердження буде правильним, якщо A полігон з умовою p.p.-Бера.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай e — ідемпотент в S і $a \in A$, $s \in S$. Оскільки A є напівкомутативним, то з $as = 0$ випливає, що $(as)e = 0$. З іншого боку, $aSs = 0 \Rightarrow aes = 0 \in S$. Тоді $ase = aes = 0$ для будь-якого $a \in A$ і $e^2 = e \in S$. Отже, A — абелевий полігон.

($\Leftarrow$) Тепер припустимо, що A — абелевий полігон з умовою p.p.-Бера. Нехай $a \in A$ і $s \in S$ і $as = 0$, тоді $s \in eS$ для деякого $e^2 = e \in S$. Тому $ae = 0$, бо $e^2 = e \in S$ і $s = es_1$. Отже, $aeS = 0$. За припущенням $aSe = 0$. Домноживши справа на s_1, отримаємо $aSes_1 = 0$. Оскільки $s = es_1$, $aSs = 0$. Тому A — напівкомутативний полігон. □

Лема 4. *Якщо A — редукований полігон, тоді A є абелевим. Зворотне твердження правильне для абелевих полігонів з умовою p.p.-Бера.*

Доведення. Нехай A — редукований. Оскільки будь-який редукований полігон є напівкомутативним (Лема 2) і будь-який напівкомутативний полігон є абелевим (Лема 3), то A — абелевий полігон.

Навпаки. Нехай A буде абелевим полігоном з умовою p.p.-Бера. Припустимо, що $as = 0$ для $a \in A$ і $s \in S$. Якщо $x \in aS \bigcap As$, то існує $a_1 \in A$ і $s_1 \in S$ такі, що $x = as_1 = a_1 s$. Оскільки A задовольняє умову p.p.-Бера і $as = 0$, то звідси $s \in Ann_S(a) = eS$ для деякого ідемпотента $e^2 = e \in S$. Тоді $s = et$ і $xe = as_1 e = a_1 se$, де $t \in S$. Позаяк A абелевий і $ae = 0$, то $as_1 e = aes_1 = a_1 se = a_1 es = a_1 e^2 t = a_1 et = a1s = 0$. Звідси $x = a_1 s = 0$ матимемо протиріччя, отже, $aS \bigcap As = 0$, тобто A — редукований полігон. □

Наступний приклад доводить, що існує полігон A з умовою p.q.-Бера такий, що не задовольняє умову p.p.-Бера і є абелевим полігоном, але не є редукованим. Отже, обернене твердження Леми 2 не є правильним.

Приклад 3. Існує абелевий полігон A з умовою p.q.-Бера, який не є редукованим і не задовольняє умову p.p.-Бера. Нехай $\mathbb{Z}$ — напівгрупа цілих чисел і $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ і 2×2 матриця над $\mathbb{Z}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a \equiv d \mod 2,\ b \equiv c \equiv 0 \mod 2 \right\}$$

і нехай A — правий S-полігон.

Означення 13. *Полігон A називається симетричним, якщо з рівності $ast = 0$ виплива, що $ats = 0$ для будь-яких $a \in A$ і $s, t \in S$.*

Лема 5. *Якщо A — симетричний полігон, тоді A — абелевий. Зворотне твердження правильне, якщо A є полігоном з умовою p.p.-Бера.*

Доведення. Припустимо, що A — симетричний полігон. Нехай $a \in A$ *і* $e^2 = e$, $s \in S$. Тоді $ase = 0$. З симетричності полігону A випливає, що $aes = 0$. Отже, $aes = aese$. З іншого боку, $ase = asee$. Звідси $ase = aes$. Тому полігон A — абелевий.

Навпаки. Припустимо, що A — полігон з умовою p.p.-Бера. Нехай $a \in A$, $s, t \in S$ *і* $ast = 0$. Оскільки A — полігон з умовою p.p.-Бера, то $t \in Ann_S(as) = eS$ для деякого ідемпотента $e \in S$. Тоді $t = et$ *і* $ase = 0$. За Лемою 3 отримаємо $aSs = 0$, зокрема, $atse = 0$. За умовою $ats = aets = atse = 0$. Отже, A — симетричний полігон. □

Теорема 4. *Нехай A — полігон з умовою p.p.-Бера. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) A — редукований;
2) A — симетричний;
3) A — напівкомутативний;
4) A — абелевий.

Доведення. (1) $\Leftrightarrow$ (4). Редукований полігон A буде абелевим за Лемою 4.

(2) $\Leftrightarrow$ (4). Симетричний полігон A буде абелевим, що випливає з Леми 5.

(3) $\Leftrightarrow$ (4). Доведення випливає з Леми 3. □

Лема 6. *Нехай A є абелевим полігоном з умовою p.p.-Бера. Тоді для будь-яких $a \in A$ виконується, $Ann_S(a) = Ann_S(aS)$.*

Доведення. Відомо, що $Ann_S(aS) \subset Ann_S(a)$.

Навпаки, кожен абелевий полігон з умовою p.p.-Бера є комутативним, тому з рівності $as = 0$ випливає $aSs = 0$. Отже, $Ann_S(a) \subset Ann_S(aS)$. Тому $Ann_S(a) = Ann_S(aS)$. □

Наслідок 2. *Нехай A — абелевий полігон з умовою p.p.-Бера. Тоді A буде полігоном з умовою p.q.-Бера.*

Доведення. Нехай полігон A буде абелевим полігоном з умовою p.p.-Бера. За Лемою 6 одержимо $Ann_S(a) = Ann_S(aS) = eS$ для будь-якого $a \in A$ та ідемпотента $e \in S$. Тому A — полігон з умовою p.q.-Бера. □

Література

1. *Agayev N.* On Semicommutative Modules and Rings / Nazim Agayev and Abdullah Harmanci // KYUNGPOOK Math. J. — 2007. — Vol. 47. — P. 21–30.
2. *Agayev N.* Abelian modules / N. Agayev, G. Güngöroğlu, A. Harmanci and S. Halicioğlu // Acta Math. Univ. Comenianae. — 2009. — Vol. 78, №2. — P. 235–244.
3. *Anderson D.D.* Semigroups and rings whose zero products commute / D.D. Anderson and Victor Camillo // Comm. Algebra. — 1999. — Vol. 27,(6). — P. 2847–2852.

4. *Birkenmeier G.F.* Principally Quasi-Baer Rings / G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim and J.K. Park // Comm. Algebra. — 2001. — Vol. 29. — P. 639–660.
5. *Buhphang A.M.* Semicommutative Modules and Armendariz Modules / A.M. Buhphang and M.B. Rege // Arab Journal of Mathematical Sciences. — June 2002. — Vol. 8. — P. 53–65.
6. *Higgins P.* Techniques of semigroup theory. — Oxford, 1992. — 258 p.
7. *Huh C.* Armendariz Rings and Semicommutative Rings. / C. Huh, Y. Lee and A. Smoktunowicz // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 751–761.
8. *Kaplansky I.* Rings of operators. — W. A. Benjamin, New York. — 1968. — 151 p.
9. *Kim N.K.* Armendariz Rings and Reduced Rings. / N.K. Kim and Y. Lee // J. Algebra. — 2000. — Vol. 223. — P. 477–488.
10. *Zhou Y.* Reduced Modules, Rings, modules, algebras and abelian groups. / T.K. Lee and Y. Zhou // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. New york: Dekker. — 2004. — Vol. 236. — P. 365–377.
11. *Rege M.B.* Armendariz rings. / M.B. Rege and S. Chhawchharia // Proc. Japan Acad. — 1997. — Vol. 73(A). — P. 14–17.
12. *Rizvi S.T.* Baer and Quasi-Baer Modules / Rizvi S.T. and Roman C.S.// Comm. Algebra. — 2004. — Vol. 32. — P. 103–123.
13. *Клиффорд А.* Алгебраическая теория полугрупп. Т.1. / Клиффорд А., Престон Г. М.:МИР. — 1972. — 285 с.
14. *Клиффорд А.* Алгебраическая теория полугрупп. Т.2. / Клиффорд А., Престон Г. М.:МИР. — 1972. — 422 с.
15. *Комарницький М.Я.* Елементи теорії груп і наполігонів: курс лекцій. / Комарницький М.Я., Зеліско Г.В. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2011. — 152 с.

Стаття: надійшла до редколегії 15.06.2015
прийнята до друку 11.11.2015

SEMIGROUPS AND S-POLYGONS WITH ANNIHILATION CONDITIONS

Yuriy ISHCHUK, Iryna KOZACHOK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: yishchuk@lnu.edu.ua

We introduce the notions of semicommutative semigroup and abelian S-polygon by analogy with the notions of semicommutative, abelian modules and rings investigated in [1]-[2]. We say that a semigroup S is a semicommutative semigroup if for any $x, y \in S$, $xy = 0$ implies $xSy = 0$. A right S-polygon A_S is called abelian if, for any $a \in A_S$ and any $s \in S$, any idempotent $e \in S$, $ase = aes$.

Using the notions of Baer's conditions for modules in [12] we introduce p.p.-Baer S-polygons and prove that if A_S is a p.p.-Baer S-polygon, then the conditions for A_S to be a reduced, symmetric, semicommutative and an abelian S-polygon are equivalent.

Key words: semicommutative, abelian, reduced, symmetric, p.p.-Baer semigroups and S-polygons.