ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 166–176
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 166–176

УДК 514.763.4

КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО-КЕЛЕРОВИХ МНОГОВИДІВ

Євген ЧЕРЕВКО

Одеський національний економічний університет,
вул. Преображенська, 8, Одеса, 65082
e-mail: cherevko@usa.com

Розглянуто конформні відображення локально конформно-келерових многовидів. Отримано інваріанти таких відображень. Також знайдено вирази тензора рімановою кривини та тензора Річчі конформно-плоских локально конформно-келерових многовидів.

Ключові слова: келерові многовиди, локально конформно-келерові многовиди, форма Лі(Lee form), конформні відображення, тензор рімановою кривини, тензор Річчі.

1. Вступ. Предметом вивчення у цій статті є локально конформно-келерові многовиди такі, що $dim(M) = n = 2m > 2$. Конформно-келеровим многовидам присвячено праці багатьох дослідників. Локально конформно-келерові многовиди розглядали [13], [2], [5]. Варто згадати енциклопедичну працю у цьому напрямі [11]. Геодезичні відображення локально конформно-келерових многовидів вивчали у [5], де виявили, що конформно-келерові многовиди не допускають нетривіальних геодезичних відображень на майже ермітові простори з умовою зберігання комплексної структури. З іншого боку, відомо, що конформна відповідність двох келерових многовидів, необхідно є гомотетією [14]. Мета нашої праці — дослідити проблеми конформних відображень локально конформно-келерових многовидів.

2. ЛКК-многовиди. Найперше подамо декілька необхідних означень [1].

Означення 1. *Майже комплексною структурою J називають такий афінор J^i_j, що:*

$$J^i_\alpha J^\alpha_j = -\delta^i_j. \tag{1}$$

Тут δ^i_j — символ Кронекера.

Означення 2. *Многовид, на якому задано майже комплексну структуру J, називають майже комплексним многовидом.*

Означення 3. *Майже комплексний многовид є майже ермітовим, якщо на ньому задана ермітова метрика*

$$J_i^\alpha J_j^\beta g_{\alpha\beta} = g_{ij}. \tag{2}$$

Майже ермітовий многовид позначаємо $\{M_n, J, g\}$.

Означення 4. *Майже ермітовий многовид* $\{M_n, J, g\}$ *є ермітовим, якщо майже комплексна структура є інтегровною* [1], [14].

Зауважимо таке: якщо майже комплексна структура J та многовид M_n будуть належати класу C^ω, достатньою умовою інтегровності майже комплексної структури є тотожна рівність нулю тензора Нейєнхейса

$$N_{ij}^k = J_i^\alpha \left(\partial_j J_\alpha^k - \partial_\alpha J_j^k\right) - J_j^\alpha \left(\partial_i J_\alpha^k - \partial_\alpha J_i^k\right) = 0, \tag{3}$$

або, що еквівалентно

$$J_{i,j}^k = J_i^\alpha J_j^\beta J_{\alpha,\beta}^k. \tag{4}$$

Комою ми позначаємо коваріантну похідну в зв'язності, узгодженій з рімановою метрикою g_{ij}.

Якщо ж на ермітовому многовиді $\{M_n, J, g\}$ справджується

$$J_{i,j}^k = 0, \tag{5}$$

то він є *келеровим.*

Означення 5. *Ермітовий многовид M_n має назву* локально конформно-келерового *(коротше, ЛКК-)* многовиду*, якщо існує відкрите покриття* $\mathfrak{U} = \left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ *многовиду M та система* $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$ *гладких функцій таких, що* $\left\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\right\}$ *— келерова структура для будь якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ має назву* локально конформного перетворення структури. *Функція σ називається* визначальною функцією *конформного перетворення* [2].

Відомо, що на ЛКК-многовиді, форма Лі (Lee form), компоненти якої визначають формулою [3]

$$\omega = \frac{1}{m-1}\delta\Omega \circ J \quad \text{або} \quad \omega_i = -\frac{2}{n-2} J_{\beta,\alpha}^\alpha J_i^\beta, \tag{6}$$

має бути замкненою

$$d\omega = 0.$$

Оскільки ми проводимо дослідження локально, якщо не обумовлено протилежне, то індекс, відповідний до карти многовиду, використовувати для зручності не будемо, як це і зроблено в останній формулі.

Означення 6. *Ріманові многовиди* $\{M_n, g\}$ *і* $\{\overline{M}_n, \overline{g}\}$ *перебувають у конформній відповідності, якщо їхні метрики пов'язані співвідношенням*

$$\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x), \tag{7}$$

де $\varphi(x)$ — деякий інваріант.

Для об'єктів зв'язності Γ_{ij}^k и $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ конформно відповідних просторів M_n, g та $\overline{M}_n, \overline{g}$ виконується
$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \varphi_j + \delta_j^k \varphi_i - \varphi^k g_{ij}, \tag{8}$$
де $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$.

3. Зв'зок форм Лі ЛКК-многовидів, які перебувають у конформній відповідності. Тепер з'ясуємо, як пов'язані між собою форми Лі двох ЛКК-многовидів $\{M_n, J, g\}$ і $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$, якщо вони перебувають у конформній відповідності. Передусім згадаємо, що коваріантні похідні майже комплексної структури у зв'язностях $\overline{\Gamma}$ і Γ задовольняють співвідношення
$$J_{i|j}^k = J_{i,j}^k + J_i^\alpha P_{\alpha j}^k - J_\alpha^k P_{ij}^\alpha. \tag{9}$$
Тут вертикальною рискою "|"позначена коваріантна похідна у зв'язності $\overline{\Gamma}$, узгодженій з метрикою $\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x)$ та
$$P_{ij}^k = \overline{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k = \delta_i^k \varphi_j + \delta_j^k \varphi_i - \varphi^k g_{ij}. \tag{10}$$
Підставимо (10) у (9)
$$\begin{aligned} J_{i|j}^k = J_{i,j}^k + J_i^\alpha(\delta_\alpha^k \varphi_j + \delta_j^k \varphi_\alpha - \varphi^k g_{\alpha j}) - J_\alpha^k(\delta_i^\alpha \varphi_j + \delta_j^\alpha \varphi_i - \varphi^\alpha g_{ij}) = \\ = J_{i,j}^k + \delta_j^k J_i^\alpha \varphi_\alpha - J_{ij}\varphi^k - J_j^k \varphi_i + J_\alpha^k \varphi^\alpha g_{ij}. \end{aligned} \tag{11}$$
Згортаючи (11) по індексах k та j, отримаємо
$$J_{i|\alpha}^\alpha = J_{i,\alpha}^\alpha + nJ_i^\alpha \varphi_\alpha - J_{i\alpha}\varphi^\alpha + J_{\alpha i}\varphi^\alpha = J_{i,\alpha}^\alpha + (n-2)J_i^\alpha \varphi_\alpha.$$
Враховуючи (1),
$$J_{\beta|\alpha}^\alpha J_i^\beta - J_{\beta,\alpha}^\alpha J_i^\beta = -(n-2)\varphi_i,$$
або (6)
$$\overline{\omega}_i - \omega_i = 2\varphi_i, \tag{12}$$
де $\overline{\omega}$ і ω — форми Лі, відповідно, многовидів $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$ і $\{M_n, J, g\}$. Отож, існує така теорема.

Теорема 1. *Якщо ЛКК-многовиди $\{M_n, J, g\}$ і $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$ пребувають у конформній відповідності так, що $\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x)$, то їхні форми Лі пов'язані так:*
$$\overline{\omega} - \omega = 2d\varphi.$$

4. Інваріанти конформних відображень ЛКК-многовидів. Перепишемо (12) у вигляді
$$\varphi_i = \frac{1}{2}\overline{\omega}_i - \frac{1}{2}\omega_i, \tag{13}$$
і продиференціюємо (13) коваріантно
$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{i,j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j}. \tag{14}$$
З іншого боку, враховуючи (13)
$$\overline{\omega}_{i|j} = \overline{\omega}_{i,j} - \overline{\omega}_\alpha P_{ij}^\alpha.$$
Тому

$$\overline{\omega}_{i,j} = \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_{\alpha}(\delta_i^{\alpha}\varphi_j + \delta_j^{\alpha}\varphi_i - \varphi^{\alpha}g_{ij}) = \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_i\varphi_j + \overline{\omega}_j\varphi_i - \overline{\omega}_{\alpha}\varphi^{\alpha}g_{ij} =$$
$$= \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_i\overline{\omega}_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_i\omega_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_j\omega_i - \overline{\omega}_{\alpha}\varphi^{\alpha}g_{ij}.$$

Водночас

$$\overline{\omega}_{\alpha}\varphi^{\alpha}g_{ij} = \overline{\omega}_{\alpha}g^{\alpha\beta}\varphi_{\beta}g_{ij} = \overline{\omega}_{\alpha}g^{\alpha\beta}e^{-2\varphi}\varphi_{\beta}e^{2\varphi}g_{ij} = \overline{\omega}_{\alpha}\overline{g}^{\alpha\beta}\varphi_{\beta}\overline{g}_{ij} = \overline{\omega}^{\alpha}\varphi_{\alpha}\overline{g}_{ij}.$$

Отримуємо

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_{i,j} &= \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_i\overline{\omega}_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_i\omega_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_j\omega_i - \overline{\omega}^{\alpha}\varphi_{\alpha}\overline{g}_{ij} = \\ &= \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_i\overline{\omega}_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_i\omega_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_j\omega_i - \frac{1}{2}\overline{\omega}^{\alpha}\overline{\omega}_{\alpha}\overline{g}_{ij} + \frac{1}{2}\overline{\omega}^{\alpha}\omega_{\alpha}\overline{g}_{ij}.\end{aligned} \tag{15}$$

Підставляючи (15) у (14), одержимо

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}_i\omega_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}_j\omega_i - \frac{1}{4}\overline{\omega}^{\alpha}\overline{\omega}_{\alpha}\overline{g}_{ij} + \frac{1}{4}\overline{\omega}^{\alpha}\omega_{\alpha}\overline{g}_{ij}. \tag{16}$$

Відомо [5], що при конформних відображеннях виконуються співвідношення

$$\varphi_{ij} + \frac{1}{2}\Delta_1\varphi g_{ij} = \overline{L}_{ij} - L_{ij}, \tag{17}$$

де $\varphi_{ij} = \varphi_{i,j} - \varphi_i\varphi_j$, далі $\Delta_1\varphi = ||\varphi||^2 = \varphi_i\varphi_j g^{ij}$ (перший параметр Бельтрамі), а $\overline{L}_{ij}$ і L_{ij} тензори Брінкмана, відповідно, многовидів $\overline{M}_n$ і M_n [9]. Для M_n він набуває вигляду

$$L_{ij} = \frac{1}{n-2}\big(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij}\big).$$

Тут R_{ij} — тензор Річчі і $R = R_{ij}g^{ij}$ — скалярна кривина M_n. У випадку многовиду $\overline{M}_n$ ці величин обчислюють аналогічно.

Використовуючи (16) і (13), отримаємо

$$\begin{aligned}\varphi_{ij} = \varphi_{i,j} - \varphi_i\varphi_j &= \frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}_i\omega_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}_j\omega_i - \\ &- \frac{1}{4}\overline{\omega}^{\alpha}\overline{\omega}_{\alpha}\overline{g}_{ij} + \frac{1}{4}\overline{\omega}^{\alpha}\omega_{\alpha}\overline{g}_{ij} - \frac{1}{4}(\overline{\omega}_i - \omega_i)(\overline{\omega}_j - \omega_j) = \\ &= \frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}^{\alpha}\overline{\omega}_{\alpha}\overline{g}_{ij} + \frac{1}{4}\overline{\omega}^{\alpha}\omega_{\alpha}\overline{g}_{ij}.\end{aligned} \tag{18}$$

Тепер знаходимо перший параметр Бельтрамі

$$\Delta_1\varphi = \varphi_i\varphi_j g^{ij} = \frac{1}{4}(\overline{\omega}_i - \omega_i)(\overline{\omega}_j - \omega_j)g^{ij} = \frac{1}{4}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j g^{ij} - \frac{1}{2}\overline{\omega}_i\omega^i + \frac{1}{4}\omega^i\omega_i. \tag{19}$$

Підставимо (18) і (19) у (17)

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}^{\alpha}\overline{\omega}_{\alpha}\overline{g}_{ij} + \frac{1}{4}\overline{\omega}^{\alpha}\omega_{\alpha}\overline{g}_{ij} +$$
$$+ \frac{1}{2}\big(\frac{1}{4}\overline{\omega}_{\alpha}\overline{\omega}_{\beta}g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overline{\omega}_{\alpha}\omega^{\alpha} + \frac{1}{4}\omega^{\alpha}\omega_{\alpha}\big)g_{ij} = \overline{L}_{ij} - L_{ij}.$$

Оскільки $g^{\alpha\beta}g_{ij}=\overline{g}^{\alpha\beta}\overline{g}_{ij}$ і $\overline{\omega}_\alpha\omega^\alpha g_{ij}=\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{ij}$, розкриваючи дужки і зводячи подібні, то отримуємо

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j}-\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j-\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{8}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{ij}+\frac{1}{8}\omega^\alpha\omega_\alpha g_{ij}=\overline{L}_{ij}-L_{ij}. \tag{20}$$

З (20) випливає, що

$$\overline{P}_{ij}=P_{ij},$$

де

$$P_{ij}\overset{\text{def}}{=}L_{ij}-\frac{1}{2}\omega_{i,j}-\frac{1}{4}\omega_i\omega_j+\frac{1}{8}\omega^\alpha\omega_\alpha g_{ij}. \tag{21}$$

Відомо також, що тензори кривини многовидів M_n і $\overline{M}_n$, що перебувають у конформній відповідності (7), пов'язані так:

$$\overline{R}^h_{ijk}=R^h_{ijk}+\delta^h_k\varphi_{ij}-\delta^h_j\varphi_{ik}+\varphi^h_k g_{ij}-\varphi^h_j g_{ik}+\big(\delta^h_k g_{ij}-\delta^h_j g_{ik}\big)\Delta_1\varphi, \tag{22}$$

де $\varphi^h_k=g^{h\alpha}\varphi_{\alpha k}$. Підставимо тепер (18) и (19) в (22):

$$\begin{aligned}\overline{R}^h_{ijk}=R^h_{ijk}&+\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j}-\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j-\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{ij}+\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{ij}\big)-\\&-\delta^h_j\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|k}-\frac{1}{2}\omega_{i,k}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k-\frac{1}{4}\omega_i\omega_k-\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{ik}+\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{ik}\big)+\\&+g^{h\beta}g_{ij}\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_{\beta|k}-\frac{1}{2}\omega_{\beta,k}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_\beta\overline{\omega}_k-\frac{1}{4}\omega_\beta\omega_k-\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{\beta k}+\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{\beta k}\big)-\\&-g^{h\beta}g_{ik}\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_{\beta|j}-\frac{1}{2}\omega_{\beta,j}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_\beta\overline{\omega}_j-\frac{1}{4}\omega_\beta\omega_j-\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{\beta j}+\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{\beta j}\big)+\\&+\big(\delta^h_k g_{ij}-\delta^h_j g_{ik}\big)\big(\frac{1}{4}\overline{\omega}_\alpha\overline{\omega}_\beta g^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\overline{\omega}_\alpha\omega^\alpha+\frac{1}{4}\omega^\alpha\omega_\alpha\big).\end{aligned}$$

Розкриваючи дужки та групуючи, отримаємо

$$\overline{Q}^h_{ijk}=Q^h_{ijk},$$

де

$$\begin{aligned}Q^h_{ijk}\overset{\text{def}}{=}R^h_{ijk}&+\delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_k-\frac{1}{4}||\omega||^2g_{ik}\big)-\\&-\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{4}||\omega||^2g_{ij}\big)+\\&+\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j}+\frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik}-\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k}+\frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij},\end{aligned} \tag{23}$$

причому $\omega^h=\omega_\alpha g^{\alpha h}$, а також $\omega^h{}_{,j}=\omega_{\alpha,j}g^{\alpha h}$ і, нарешті, $||\omega||^2=\omega_\alpha\omega_\beta g^{\alpha\beta}$.

Отримаємо ще один простий інваріант, що не є тензором. Для цього підставимо (13) в (8)

$$\overline{\Gamma}^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}+\delta^k_i\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_j-\frac{1}{2}\omega_j\big)+\delta^k_j\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_i-\frac{1}{2}\omega_i\big)-\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_\alpha g^{k\alpha}-\frac{1}{2}\omega^k\big)g_{ij},$$

розкриємо дужки, скористаємось інваріантністю добутку $g_{ij}g^{\alpha\beta}$ та перегрупуємо

$$\overline{\Gamma}^k_{ij}-\frac{1}{2}\delta^k_i\overline{\omega}_j-\frac{1}{2}\delta^k_j\overline{\omega}_i+\frac{1}{2}\overline{\omega}^k\overline{g}_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\frac{1}{2}\delta^k_i\omega_j-\frac{1}{2}\delta^k_j\omega_i+\frac{1}{2}\omega^k g_{ij}.$$

Отже, ми отримали інваріант

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\delta^k_i\omega_j - \frac{1}{2}\delta^k_j\omega_i + \frac{1}{2}\omega^k g_{ij}, \tag{24}$$

що не є тензором. Ми не випадково позначили його як $\hat{\Gamma}^k_{ij}$, оскільки параметр, який заданий (24), очевидно є об'єктом ріманової зв'язності певного келерового многовиду $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, конформного ЛКК-многовидам $\{M_n, J, g\}$ та $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$. Ми отримали теорему.

Теорема 2. *Якщо ЛКК-многовиди $\{M_n, J, g\}$ і $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$ перебувають у конформній відповідності так, що $\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)}g_{ij}(x)$, то тензори*

$$P_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j + \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ij};$$

$$\begin{aligned} Q^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big) - \\ -\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big) + \\ +\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik} - \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij} \end{aligned}$$

будуть інваріантними. Крім того, існує інваріантний об'єкт, який не є тензором

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\delta^k_i\omega_j - \frac{1}{2}\delta^k_j\omega_i + \frac{1}{2}\omega^k g_{ij}.$$

Це об'єкт ріманової зв'язності деякого келерового многовиду $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, що є конформним обом ЛКК-многовидам — $\{M_n, J, g\}$ і $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$.

Отримаємо ще декілька інваріантних об'єктів. Для початку згорнемо (23) по індексах h та k

$$Q_{ij} = R_{ij} - \big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)(n-2) - \frac{1}{2}\Delta_2\omega g_{ij}, \tag{25}$$

де $\Delta_2\omega = \omega_{\alpha,\beta}g^{\alpha\beta}$ (другий параметр Бельтрамі, [9]). Ми отримали ще один інваріантний тензор. Зрозуміло, що тензор $\frac{Q_{ij}}{n-2}$ — також є інваріантним. Віднімемо його з P_{ij}, який визначено у (21)

$$\begin{aligned} P_{ij} - \frac{Q_{ij}}{n-2} = \frac{1}{n-2}\big(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij}\big) - \frac{1}{2}\omega_{i,j} - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j + \frac{1}{8}\omega^\alpha\omega_\alpha g_{ij} - \\ -\frac{R_{ij}}{n-2} + \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij} + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2(n-2)} = \\ = -\frac{1}{2(n-1)(n-2)}Rg_{ij} - \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ij} + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2(n-2)}. \end{aligned}$$

Внаслідок цього ми отримали ще один тензор, який зберігається

$$S_{ij} \overset{\text{def}}{=} \big(\frac{R}{2(n-1)(n-2)} + \frac{1}{8}||\omega||^2 - \frac{\Delta_2\omega}{2(n-2)}\big)g_{ij}. \tag{26}$$

Віднімемо з Q_{ij}, який було визначено у (25) інваріант $\frac{2S_{ij}(n-1)(n-2)}{n}$

$$Q_{ij}-\frac{2S_{ij}(n-1)(n-2)}{n}=R_{ij}-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{4}||\omega||^2g_{ij}\big)(n-2)-$$
$$-\frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}-\frac{Rg_{ij}}{n}-\frac{2(n-1)(n-2)}{8n}||\omega||^2g_{ij}+\frac{(n-1)(n-2)\Delta_2\omega}{n(n-2)}g_{ij}=$$
$$=R_{ij}-\frac{Rg_{ij}}{n}-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\big(\frac{1}{4n}||\omega||^2-\frac{1}{2n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}\big)(n-2).$$

Отриманий інваріант

$$H_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}R_{ij}-\frac{Rg_{ij}}{n}-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\big(\frac{1}{4n}||\omega||^2-\frac{1}{2n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}\big)(n-2) \tag{27}$$

особливо цікавий у випадку, коли конформне відображення між ЛКК-многовидами $\{M_n,J,g\}$ і $\{\overline{M}_n,J,\overline{g}\}$ є конциркулярним, тобто, ковекторне градієнтне поле φ_i є конциркулярним.

5. Конциркулярні відображення ЛКК-многовидів.

Нагадаємо означення.

Означення 7. *Ковекторне поле ξ називають конциркулярним, якщо має слушність рівняння*

$$\xi_{i,j}=\rho g_{ij}+a_j\xi_i, \tag{28}$$

причому, $a_{i,j}-a_{j,i}=0$, тобто ковектор a_i локально градієнтний, а $\rho(x)$ — деякий скаляр.

Іншими словами, ξ є конциркулярним, якщо існує такий скалярний множник λ, що поле $\zeta=\lambda\xi$ задовольнятиме рівняння

$$\zeta_{i,j}=\overline{\rho}g_{ij}. \tag{29}$$

Очевидно, що у випадку, коли

$$\varphi_{i,j}=\varphi_i\varphi_j+\rho g_{ij},$$

поле φ_i також є конциркулярним ($\lambda=e^{-\varphi}$). Якщо конформне відображення конциркулярне, то тензор

$$E_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}R_{ij}-\frac{Rg_{ij}}{n}$$

буде зберігатися, як ми бачимо з доведеної у [10] теореми.

Теорема 3. [10] *Для того, щоб під час конформного відображення $f:\{M_n,g\}\to\{\overline{M}_n,\overline{g}\}$ зберігався тензор $E_{ij}=R_{ij}-\frac{Rg_{ij}}{n}$, необхідно та достатньо, щоб це відображення було конциркулярним.*

Звідси випливає теорема.

Теорема 4. *Якщо ЛКК-многовиди $\{M_n,J,g\}$ і $\{\overline{M}_n,J,\overline{g}\}$ перебувають у конформній конциркулярній відповідності так, що $\overline{g}_{ij}(x)=e^{2\varphi(x)}g_{ij}(x)$, та $\varphi_{i,j}=\varphi_i\varphi_j+\rho g_{ij}$, то тензор*

$$\overset{*}{H}_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\big(\frac{1}{4n}||\omega||^2-\frac{1}{2n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}\big)(n-2)$$

буде інваріантним.

6. Конформно-плоскі ЛКК-многовиди та узагальнені многовиди Хопфа. Відомо, що конформно-плоский келеровий многовид є плоским [14]. Тоді, очевидно, для будь-якого ЛКК-многовиду, якщо він є многовидом сталої кривини, буде виконуватись рівняння

$$-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \big(\frac{1}{4n}||\omega||^2 - \frac{1}{2n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}\big)(n-2) = 0. \tag{30}$$

Як видно з (30), у цьому випадку форма Лі ω є конциркулярним ковекторним полем ($\lambda = e^\sigma$, $\omega = 2d\sigma$). Крім того, відомо, що будь-який ейнштейновий ($E_{ij} = 0$) конформно-плоский многовид є многовидом сталої кривини. Звідси отримаємо таку теорему.

Теорема 5. [3] *Для того, щоб конформно-плоский ЛКК-многовид був многовидом сталої кривини, необхідно і достатньо, щоб його форма Лі була конциркулярним ковекторним полем, тобто задовольняла рівняння*

$$\omega_{i,j} = \big(\frac{1}{2n}||\omega||^2 - \frac{1}{n}\Delta_2\omega\big)g_{ij} - \frac{1}{2}\omega_i\omega_j. \tag{31}$$

Нагадаємо, що ЛКК-многовид має назву узагальненого многовиду Хопфа, якщо його форма Лі тотожно задовольняє умову

$$\omega_{i,j} = 0. \tag{32}$$

З (31) легко випливає теорема.

Теорема 6. [3]*ЛКК-многовид сталої кривини не може бути узагальненим многовидом Хопфа.*

Доведення. Справді, для ЛКК-многовиду сталої кривини, якщо він є узагальненим многовидом Хопфа внаслідок (31) і (32) має виконуватись

$$\big(\frac{1}{n}||\omega||^2 - \frac{2}{n}\Delta_2\omega\big)g_{ij} = \omega_i\omega_j. \tag{33}$$

Це неможливо при $\omega \neq 0$, оскільки ранг матриці g_{ij} дорівнює розмірності простору, а ранг $\omega_i\omega_j$ — тільки одиниці. □

Нехай $\{M_n, J, g\}$ — конформно-плоский ЛКК-многовид. Це означає, що існує келеровий многовид $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, по-перше, локально конформний $\{M_n, J, g\}$, а по-друге, цей келеровий многовид $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$ буде також конформно-плоским. Як ми вже зазначали, конформно-плоский келеровий многовид є плоским, тобто, для тензора кривини та тензора Річчі многовиду $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$ справджується $\hat{R}^h_{ijk} = 0$, $\hat{R}_{ij} = 0$. Внаслідок келеровості $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$ його форма Лі буде тривіальною $\hat{\omega} = 0$. З цих міркувань, (23), (25) отримаємо, що тензор кривини конформно-плоского ЛКК-многовиду набуває вигляду

$$\begin{aligned} R^h_{ijk} = \delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big) - \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big) + \\ + \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij} - \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik}. \end{aligned} \tag{34}$$

Відповідно тензор Річчі

$$R_{ij} = \big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)(n-2) + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}. \tag{35}$$

З (35) отримаємо значення скалярної кривини

$$\begin{aligned} R = R_{ij}g^{ij} = \big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}g^{ij} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j g^{ij} - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}g^{ij}\big)(n-2) + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}g^{ij} = \\ = (n-1)\Delta_2\omega - \frac{(n-1)(n-2)}{2}||\omega||^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Зрештою, з (21) наведені міркування дають підстави отримати тензор Брінкмана конформно-плоского ЛКК-многовиду

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{8}\omega^\alpha\omega_\alpha g_{ij}. \tag{37}$$

Нагадаємо, що тензор Вейля конформної кривини визначають так:

$$C^h_{ijk} \overset{\text{def}}{=} R^h_{ijk} + \delta^h_j L_{ik} - \delta^h_k L_{ij} + L^h_j g_{ik} - L^h_k g_{ij}. \tag{38}$$

Підставивши (34) і (37) в (38), матимемо, що тензор Вейля конформно-плоского ЛКК-многовиду обертається тотожно у нуль

$$C^h_{ijk} \equiv 0.$$

Нарешті, якщо ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$ є многовидом сталої кривини, то можна, враховуючи (36), виписати його тензор кривини та тензор Річчі в простішому вигляді

$$R^h_{ijk} = \frac{R}{n(n-1)}\big(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\big) = \frac{1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)\big(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\big). \tag{39}$$

$$R_{ij} = \frac{n-1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)g_{ij}. \tag{40}$$

Отримані результати можна підсумувати у вигляді такої теореми.

Теорема 7. *Якщо ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$ є конформно-плоским, то його тензор кривини, тензор Річчі та скалярна кривина задаються, відповідно, такими виразами*

$$\begin{aligned} R^h_{ijk} = \delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big) - \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big) + \\ + \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij} - \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik}, \end{aligned}$$

$$R_{ij} = \big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)(n-2) + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2},$$

$$R = (n-1)\Delta_2\omega - \frac{(n-1)(n-2)}{2}||\omega||^2.$$

Зокрема, якщо ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$ є многовидом сталої кривини, то тензор кривини та тензор Річчі набувають вигляду

$$R^h_{ijk} = \frac{1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)\big(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\big).$$

$$R_{ij} = \frac{n-1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)g_{ij}.$$

Література

1. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В.Ф. Кириченко — М.: МПГУ, 2003. — 495 с.
2. *Кириченко В.Ф.* Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны / В.Ф. Кириченко // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, №3. — С. 354-–363.
3. *Кириченко В.Ф.* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия / В.Ф. Кириченко // Матем. сб. — 1992. — Т. 51, №5. — С. 57—66.
4. *Кузаконь В.М.* Конформно-келерові простори та конформні перетворення тензору енергії-імпульсу /В.М. Кузаконь, Є.В. Черевко // Proc. Inter. Geom. Center. — 2011. — Vol.4, №3. — P. 23–39.
5. *Микеш Й.* Геодезические отображения конформно-келеровых пространств. /Й. Микеш, Ж. Радулович // Изв. вузов. Матем. — 1994. — №3. — С. 50-–52.
6. *Микеш Й.* О распределении порядков групп конформных преобразований римановых пространств /Й. Микеш, Д. Молдобаев// Изв. вузов. Матем. – 1991. – №12. – С. 24–29.
7. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности /А.З. Петров — М.: Наука, 1966. — 496 с.
8. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия /Л.П. Эйзенхарт — М.: ИЛ, 1948, — 316 с.
9. *Brinkmann H. W.* Riemann spaces conformal to Einstein spaces /H. W. Brinkmann // Mathematische Annalen. — 1924. — Vol. 91. — P. 269–278.
10. *Chepurna O.* Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor /O. Chepurna, V. Kiosak, J. Mikeš // J. Appl. Math. Aplimat. — 2010. — Vol. 3, №1. — P. 253-–258.
11. *Dragomir S.* Locally conformal Kähler geometry /S. Dragomir, L. Ornea –Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser — 1998. — 328 p.
12. *Mikeš J.* Geodesic mappings and some generalizations. /J. Mikeš, A. Vanžurovà, I. Hinterleitner –Olomouc: Palacky University Press, 2009. — 304 p.
13. *Vaisman I.* A geometric condition for an l.c.K. manifold to be Kähler /I. Vaisman // Geometriae Dedicata. — 1981. — №10. — C. 129–134.
14. *Yano K.* Differential geometry on complex and almost complex spaces /K. Yano –New York: Pergamon Press Book — 1965.— 326p.

Стаття: надійшла до редколегії 16.10.2013
доопрацьована 11.12.2013
прийнята до друку 11.11.2015

CONFORMAL MAPPINGS OF LOCALLY CONFORMAL KÄHLER MANIFOLDS

Yevhen CHEREVKO

Odesa National Economics University,
Preobrazhenska Str., 8, Odesa, 65082
e-mail: cherevko@usa.com

In this paper we study conformal mappings which does not change a complex structure of locally conformal Kähler manifolds. We have found expression for a Riemann tensor for conformally-flat locally conformal Kähler manifolds and for ones of constant curvature. Also we have found objects which are the same for the manifolds in conformal correspondence.

Key words: Kähler manifold, reduced branching processes, locally conformal Kähler manifolds, Lee form, conformal mappings, Riemann tensor, Ricci tensor.