ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 89–96
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 89–96

УДК 517.55

НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У БІКРУЗІ

Андрій КУРИЛЯК, Олег СКАСКІВ, Людмила ШАПОВАЛОВСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: kurylyak88@gmail.com, matstud@franko.lviv.ua, shap.ludmila@gmail.com

Доведено аналог нерівності Вімана для функцій, аналітичних у бікрузі $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Отримані нерівності є точними.

Ключові слова: максимум модуля, максимальний член, аналітична функція в бікрузі, нерівність типу Вімана.

1. Вступ. За теоремою Вімана-Валірона (див., наприклад, [1]-[4]) для кожної не тотожно сталої цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1}$$

і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subset [1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри ($\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$) така, що для всіх $r \in [1, +\infty) \setminus E$ виконується нерівність Вімана

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r).$$

Тут $M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n \colon n \geqslant 0\}$. З іншого боку, для кожної аналітичної в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z \colon |z| < 1\}$ функції f вигляду (1) і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subset [0, 1)$ скінченної логарифмічної міри на інтервалі $[0, 1)$ (тобто, $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$) така, що для всіх $r \in [0, 1) \setminus E$ виконується нерівність (див., наприклад, [5]-[9])

$$M_f(r) \leqslant \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\delta}} \ln^{1/2+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-r}.$$

У [6] зазначено, що для функції $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \exp\{n^\varepsilon\} z^n$, $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$\varliminf_{r \to 1-0} \frac{M_g(r)}{\frac{\mu_g(r)}{1-r} \ln^{1/2} \frac{\mu_g(r)}{1-r}} \geqslant C > 0.$$

У [10] доведено аналог нерівності Вімана для аналітичних в області $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z_1|<1, z_2\in\mathbb{C}\}$ функцій, степеневе розвинення яких у цій області набуває вигляду

$$f(z)=f(z_1,z_2)=\sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm}z_1^n z_2^m. \tag{2}$$

Ми розглянемо задачу доведення нерівностей типу Вімана в класі функцій аналітичних у бікрузі $\mathbb{D}^2=\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z_1|<1, |z_2|<1\}$, степеневе розвинення яких набуло вигляду (2).

Через $\mathcal{A}^2$ позначимо клас таких функцій.

2. Нерівність Вімана для аналітичних функцій у бікрузі. Для $r\in[0,1)^2$ і функції $f\in\mathcal{A}^2$ ми позначимо

$$\triangle_r=[r_1,1)\times[r_2,1),\quad \mathfrak{M}_f(r)=\sum_{n+m=0}^{+\infty}|a_n|r^n,$$
$$M_f(r)=\max\{|f(z)|\colon |z_1|\leqslant r_1,\ |z_2|\leqslant r_2\},\quad \mu_f(r)=\max\{|a_{nm}|r_1^n r_2^m\colon (n,m)\in\mathbb{Z}_+^2\}.$$

Нехай $D_f(r)$ – 2×2 матриця така, що

$$D_{ij}=r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big)=\partial_i\partial_j\ln\mathfrak{M}_f(r),\quad \partial_i=r_i\frac{\partial}{\partial r_i},\quad i,j\in\{1,2\}.$$

Наступне твердження доводиться практично дослівним повтором міркувань доведення теореми 3.1 з праці [11], зважаючи на це, опустимо її доведення.

Теорема 1. *Нехай $f\in\mathcal{A}^2$. Існує абсолютна стала C_0 така, що*

$$\mathfrak{M}_f(r)\leqslant C_0\mu_f(r)(\det(D_f(r)+I))^{1/2},$$

де I – 2×2 одинична матриця.

Будемо казати, що $E\in[0,1)^2$ – *множини асимптотичної скінченної логарифмічної міри на* $[0,1)^2$, якщо існує $r_0\in[0,1)^2$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E\cap\triangle_{r_0}):=\iint\limits_{E\cap\triangle_{r_0}}\frac{dr_1dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}<+\infty,$$

тобто множина $E\cap\triangle_{r_0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$.

Лема 1. *Нехай $\delta>0,\ h\colon\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+$ – зростаюча стосовно обидвох змінних функція така, що*

$$\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{du_1du_2}{h(u_1,u_2)}<+\infty.$$

Тоді існує множина $E \subset [0,1)^2$ *асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх* $r \in [0,1)^2 \setminus E$ *матимемо*

$$\det(D_f(r)+I) \leqslant \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot h\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r) \leqslant (\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta} \cdot \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)^{\delta}}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r) \leqslant (\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta} \cdot \frac{1}{(1-r_1)^{\delta}(1-r_2)}. \tag{5}$$

Доведення. Нехай $E_0 \subset [0,1)^2$ – множина, на якій не виконується нерівність (3). Доведемо, що E_0 є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри. Оскільки функція $r_j \frac{\partial}{\partial r_j}\ln \mathfrak{M}_f(r)$ є зростаючою за кожною змінною, тоді існує $r^0 \in [1/2,1)^2$ таке, що для довільного $j \in \{1,2\}$ і всіх $r \in \triangle_{r^0}$ отримаємо

$$r_j \frac{\partial}{\partial r_j}\ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_j > 1.$$

Тоді

$$\nu_{\ln}(E_0 \cap \triangle_{r^0}) = \iint\limits_{E_0 \cap \triangle_{r^0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{E_0 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\det(D_f(r)+I)(1-r_1)(1-r_1)}{h\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big)} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{E_0 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\det(D_f(r)+I) dr_1 dr_2}{h\Big(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r), r_2\frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big)} \leqslant \iint\limits_{E_0 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\det(D_f(r)+I) 2r_1 2r_2 dr_1 dr_2}{h\Big(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r), r_2\frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big)} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \iint\limits_{E_0 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\det(D_f(r)+I) r_1 r_2 dr_1 dr_2}{h\Big(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_1, r_2\frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_2\Big)}.$$

Нехай $U\colon [0,1)^2 \to \mathbb{R}^2_+$ – відображення таке, що $U = (u_1, u_2)$ і $u_j = r_j \frac{\partial}{\partial r_j}\ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_j,\ j \in \{1,2\}$. Якщо $i \neq j$, то

$$\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j \frac{\partial}{\partial r_i}\ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_j\Big) = \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j \frac{\partial}{\partial r_i}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big) = \frac{1}{r_i}\partial_i\partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r);$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_i \frac{\partial}{\partial r_i}\ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_i\Big) = \frac{1}{r_i}\partial_i\partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r) + \frac{1}{r_i}, \quad i,j \in \{1,2\}.$$

Якобіан матриці переходу

$$J_0 = \frac{D(u_1,u_2)}{D(r_1,r_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial r_1} & \frac{\partial u_1}{\partial r_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial r_2} & \frac{\partial u_2}{\partial r_2} \end{vmatrix} = r_1 r_2 \det(D_f(r)+I).$$

Тоді $E_0 \cap \triangle_{r^0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри

$$\nu_{\ln}(E_0 \cap \triangle_{r^0}) = 4 \iint\limits_{U^{-1}(E_0 \cap \triangle_{r^0})} \frac{du_1 du_2}{h(u_1,u_2)} < 4 \int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty} \frac{du_1 du_2}{h(u_1,u_2)} < +\infty.$$

Позначимо через $E_1 \subset [0,1)^2$ – множину, на якій нерівність (4) не виконується. Виберемо $r^0 \in [1/2,1)^2$ таке, що $r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) > 1$ для кожного $j \in \{1,2\}$

$$\nu_{\ln}(E_1 \cap \triangle_{r^0}) = \iint\limits_{E_1 \cap \triangle_{r^0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \leqslant \iint\limits_{E_1 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) \cdot (1-r_1)}{\frac{1}{(1-r_2)^\delta} \cdot \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Розглянемо відображення $V\colon [0,1)^2 \to [0,1) \times \mathbb{R}_+$, де $V = (v_1(r), v_2(r))$ і $v_1 = \ln \mathfrak{M}_f(r)$, $v_2 = r_2$

$$J_1 = \frac{D(v_1,v_2)}{D(r_1,r_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) & \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r).$$

Логарифмічна міра множини $E_1 \cap \triangle_{r^0}$ скінченна

$$\nu_{\ln}(E_1 \cap \triangle_{r^0}) = \iint\limits_{E_1 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r)}{\frac{1}{(1-r_2)^\delta} \cdot \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \frac{dr_2}{1-r_2} dr_1 =$$

$$= \iint\limits_{V^{-1}(E_1 \cap \triangle_{r^0})} \frac{1}{u_1^{1+\delta} \frac{1}{(1-u_2)^\delta}} \cdot \frac{du_2}{1-u_2} du_1 \leqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{du_1}{u_1^{1+\delta}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{du_2}{(1-u_2)^{1-\delta}} < +\infty.$$

Нехай $E_2 \subset [0,1)^2$ – множина, на якій не виконується нерівність (5). Аналогічно E_2 є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$.

Зауважимо, що $E = \cup_{j=0}^2 E_j$ є також множиною асимптотичної скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$. $\square$

Теорема 2. *Нехай $f \in \mathcal{A}^2$. Для кожного $\delta > 0$ існує множина $E = E(f,\delta) \subset [0,1)^2$ асимпточично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0,1)^2 \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r) \left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta}. \tag{6}$$

Доведення. Позначимо через E виняткову множину з леми 1. Тоді для $h(r) = (r_1 r_2)^{1+\delta}$ і всіх $r \in [0,1)^2 \setminus E$ отримаємо

$$\mathfrak{M}_f(r) \leqslant C_0 \mu_f(r) (\det(D_f(r) + I))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \mu_f(r) \left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot h\Big(\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \Big) \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_0\mu_f(r)\left(\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{1-r_i}\Big(\frac{\partial}{\partial r_i}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big)^{1+\delta}\right)^{1/2}\leqslant C_0\mu_f(r)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln^{2(1+\delta)^2}\mathfrak{M}_f(r)\Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\Big)^{(1+\delta)^2}\right)^{1/2}=C_0\mu_f(r)\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\Big)^{1+\delta+\delta^2/2}\ln^{(1+\delta)^2}\mathfrak{M}_f(r)<\mu_f(r)\Big(\frac{\ln\mathfrak{M}_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\Big)^{1+\delta_1}, \qquad (7)$$

де $\delta_1=2(\delta+\delta^2)$. З нерівності (7) випливає, що для всіх $r\in\triangle_{r^0}\setminus E$

$$\ln\mathfrak{M}_f(r)<\ln\mu_f(r)+(1+\delta_1)\Big(\ln\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}+\ln_2\mathfrak{M}_f(r)\Big),$$

$$\ln\mathfrak{M}_f(r)-(1+\delta_1)\ln_2\mathfrak{M}_f(r)<\ln\mu_f(r)+(1+\delta_1)\ln\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Тоді існує $r^1\in[0,1)^2$ таке, що для всіх $r\in\triangle_{r^1}\setminus E$ матимемо

$$\ln\mathfrak{M}_f(r)<2\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)},$$

$$M_f(r)\leqslant\mathfrak{M}_f(r)\leqslant\mu_f(r)\ \left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}2\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right)^{1+\delta_1}\leqslant$$

$$\leqslant\mu_f(r)\left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right)^{1+\delta_2},$$

де $\delta_2=2\delta_1$. □

3. Приклади на точність нерівності (6). З теореми 2 випливає, що для кожного $\delta>0$ множина

$$E=E(f,\delta)=\left\{r\in[0,1)^2:\ M_f(r)>\mu_f(r)\left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right)^{1+\delta}\right\}$$

є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$. Доведемо, що показник $1+\delta$ у нерівності (6) не можна замінити числом меншим за 1.

Розглянемо функцію

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{\sqrt{n}}z_1^n\cdot\sum_{m=1}^{+\infty}e^{\sqrt{m}}z_2^m.$$

Позначимо $f_0(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{\sqrt{n}}z^n$. Для функції $f(z)=f_0(z_1)f_0(z_2)$ отримаємо $M_f(r)=M_{f_0}(r_1)M_{f_0}(r_2),\ \mu_f(r)=\mu_{f_0}(r_1)\mu_{f_0}(r_2)$.

Як доведено в [6] для функції $f_0(z_1)$ існує стала $C_0\in(0,1)$ така, що

$$C_0\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}\leqslant\frac{M_{f_0}(r_1)}{\sqrt{\ln M_{f_0}(r_1)}}\leqslant\frac{1}{C_0}\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1},\quad r_1\to 1-0. \qquad (8)$$

З нерівності (8) випливає, що для $r_1 \geqslant r_1'$ існує стала $C_1 < C_0$ така, що

$$M_{f_0}(r_1) \geqslant C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \ln^{1/2} \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}. \tag{9}$$

Доведемо нерівність

$$g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > 1 - g^{-1}(3g(r_1)), \quad r_1 \to 1-0, \quad g(r_1) = \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}. \tag{10}$$

Функція $g(r_1) = \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}$ є додатною зростаючою на $(1/2, 1)$, і $\lim\limits_{r_1 \to 1-0} g(r_1) = +\infty$. Тоді існує зростаюча обернена до g функція $g^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to (1/2, 1)$.

Для фіксованого r розглянемо функцію $l(x) = \sqrt{x} - x \ln \frac{1}{r_1}$. $x_{\max} = \frac{1}{4 \ln^2 \frac{1}{r_1}}$ – єдина точка максимуму цієї функції. $l_{\max} = \frac{1}{4 \ln \frac{1}{r_1}}$. Тоді

$$g(r_1) = \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \sim \ln \mu_{f_0}(r_1) \sim \frac{1}{4 \ln \frac{1}{r_1}} \sim \frac{1}{4(1-r_1)}, \quad r_1 \to 1-0.$$

З останнього співвідношення випливає, що $g(r_1) < 3g(2r_1 - 1)$, $r_1 \to 1-0$. Отож,

$$g(2r_1 - 1) > \frac{g(r_1)}{3}, \quad 2r_1 - 1 > g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big), \quad r_1 - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > 1 - r_1$$

і використовуючи $g^{-1}(3g(r_1)) > g^{-1}(g(r_1)) = r_1$, одержимо при $r_1 \to 1-0$

$$g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > r_1 - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > 1 - r_1 > 1 - g^{-1}(3g(r_1)).$$

Нерівність (10) доведена.

З (9) отримаємо, що існує стала $C_1 \in (0,1)$ і $r^* \in (1/2, 1)$ такі, що для кожного $i \in \{1,2\}$ і всіх $z \in \{z\colon r^* < |z_j| < 1,\ j \in \{1,2\}\}$ виконуються нерівності

$$M_{f_0}(r_i) \geqslant C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i} \sqrt{\ln \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}}, \quad g^{-1}\Big(\frac{g(r^*)}{3}\Big) > r^0. \tag{11}$$

Отже, для всіх $z \in \{z\colon r^* < |z_j| < 1,\ j \in \{1,2\}\}$ отримаємо

$$\prod_{i=1}^{2} M_{f_0}(r_i) \geqslant \prod_{i=1}^{2} \left(C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i} \sqrt{\ln \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}} \right),$$

$$M_f(r) \geqslant C_1^2 \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \left(\ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \ln \frac{\mu_{f_0}(r_2)}{1-r_2} \right)^{1/2}. \tag{12}$$

Для $r_1 \in (r^*, 1)$ визначимо x і y так:

$$x = x(r_1) = g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big), \ y = y(r_1) = g^{-1}(3g(r_1)).$$

Позначимо $E^* = \{r \in [0,1)^2\colon r_1 \in (r^*, 1),\ r_2 \in (x, y)\}$. Зафіксуємо $r_1 \in (r^*, 1)$. Тоді x і y є також фіксованими і $g(x) = g(r_1)/3$, $g(y) = 3g(r_1)$, $g(y) = 9g(x)$, $r_2 \in (x, y)$. Оскільки $r_1 > x$, то для всіх $r \in E^*$ отримаємо

$$g(r_1)g(r_2) \geqslant g^2(x) = \frac{g^2(y)}{81} = \frac{1}{324}(g(y) + g(y))^2 \geqslant \frac{1}{324}(g(r_1) + g(r_2))^2.$$

Тоді з нерівності (12) отримаємо для всіх $r \in E^*$

$$M_f(r) \geqslant \frac{C_1^2}{324}\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\left(\ln\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}+\ln\frac{\mu_{f_0}(r_2)}{1-r_2}\right)=$$
$$=\frac{C_1^2}{324}\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Доведемо, що множина E^* є множиною асимптотично нескінченної логарифмічної міри. Оскільки $g^{-1}\left(\frac{g(r^*)}{3}\right)> r^0$, то $E^*\cap\triangle_{r^0}=E^*$. Використавши нерівність (10), отримаємо

$$\nu_{\ln}(E^*\cap\triangle_{r^0})=\nu_{\ln}(E^*)=\iint\limits_{E^*}\frac{dr_1dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}=$$
$$=\int\limits_{r^*}^{1}\int\limits_{x}^{y}\frac{dr_1dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}=\int\limits_{r^*}^{1}\left(\ln\frac{1}{1-y}-\ln\frac{1}{1-x}\right)\frac{dr_1}{1-r_1}=$$
$$=\int\limits_{r^*}^{1}\left(\ln\frac{1}{1-g^{-1}(3g(r_1))}-\ln\frac{1}{1-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}\right)\frac{dr_1}{1-r_1}=\int\limits_{r^*}^{1}\ln\frac{1-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}{1-g^{-1}(3g(r_1))}\frac{dr_1}{1-r_1}=$$
$$=\int\limits_{r^*}^{1}\ln\Bigl(1+\frac{g^{-1}(3g(r_1))-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}{1-g^{-1}(3g(r_1))}\Bigr)\frac{dr_1}{1-r_1}>\int\limits_{r^*}^{1}\ln 2\cdot\frac{dr_1}{1-r_1}=+\infty.$$

Список використаної літератури

1. *Valiron G.* Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere / *G. Valiron* // Ann Fac. Sci. Univ. Toulouse. – 1914. – Vol. 5. – P. 117-257.
2. *Wiman A.* Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliebe der zugehörigen Taylorischen Reiche / *A. Wiman* // Acta Math. – 1914. – Vol. 37. – P. 305-326.
3. *Valiron G.* Fonctions analytiques / *G. Valiron.* – Paris: Press. Univer. de France, 1954.
4. *Wittich H.* Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen / *H. Wittich.* – Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1955.
5. *Kővari T.* On the maximum modulus and maximal term of functions analytic in the unit disc / *T. Kővari* // J. London Math. Soc. – 1966. – Vol. 41. – P. 129-137.
6. *Сулейманов Н.В.* Оценка типу Вимана–Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность / *Н.В. Сулейманов* // Докл. Акад. наук СССР. – 1980. – Т. 253, №4. – С. 822-824.
7. *Куриляк А.О.* Нерівність типу Вімана для аналітичних в крузі функцій і категорії Бера / *А.О. Куриляк, О.Б. Скасків* // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Серія: математика. – 2011. – Т. 1, №4. – С. 73-79.
8. *Kuryliak A.O.* Baire categories and Wiman's inequality for analytic functions / *A.O. Kuryliak, O.B. Skaskiv, I.E. Chyzhykov* // Bull. Soc. Sc. et des letters de Lodz. – 2012. – Vol. 62, №3. – P. 17-33.

9. *Овчар І.Є.* Один аналог нерівності Вімана для інтегралів Лапласа, залежних від малого параметра / *І.Є. Овчар, О.Б. Скасків* // Карпатські мат. публ. – 2013. – Т. 5, №2. – С. 305-309.
10. *Kuryliak A.O.* Wiman's type inequality for some double power series / *A.O. Kuryliak, L.O. Shapovalovska, O.B. Skaskiv* // Mat. Stud. – 2013. – Vol. 39, №2. – P. 134–141.
11. *Gopala Krishna J.* Generalised inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in $\mathbb{C}^k$ / *J. Gopala Krishna, I.H. Nagaraja Rao* // Jour. of the Indian Math. Soc. – 1977. – Vol. 41. – P. 203-219.

Стаття: надійшла до редакції 31.01.2014
прийнята до друку 28.02.2014

WIMAN'S TYPE INEQUALITY FOR ANALYTIC FUNCTIONS IN THE BIDISC

Andriy KURYLIAK, Oleh SKASKIV, Ludmyla SHAPOVALOVSKA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: kurylyak88@gmail.com, matstud@franko.lviv.ua, shap.ludmila@gmail.com

In this paper we prove some analogue of Wiman's type inequality for analytic functions in the bidisc $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. The obtained inequality is sharp.

Key words: maximum modulus, maximal term, analytic functions in the polydisc, Wiman's type inequality.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ВИМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БИКРУГЕ

Андрей КУРИЛЯК, Олег СКАСКИВ, Людмила ШАПОВАЛОВСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: kurylyak88@gmail.com, matstud@franko.lviv.ua, shap.ludmila@gmail.com

Доказано аналог неравенства Вимана для функций, аналитических в бикруге $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Полученное неравенство является точным.

Ключевые слова: максимум модуля, максимальный член, аналитическая функция в бикруге, неравенство типа Вимана.