ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 69–79
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 69–79

УДК 517.537.2

ПРО МОДИФІКОВАНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ПОРЯДКИ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Любов КУЛЯВЕЦЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com

Для ряду Діріхле $F(s) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ з нульовою абсцисою абсолютної збіжності у термінах модифікованих узагальнених порядків знайдено зв'язок між зростанням $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і поводженням коефіцієнтів a_n. Отримані результати застосовано до вивчення зростання аналітичних у крузі характеристичних функцій імовірнісних законів.

Ключові слова: ряд Діріхле, імовірнісний закон, характеристична функція, узагальнений порядок.

1. Вступ. Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, $\lambda_0 = 0$, а ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a \in (-\infty, +\infty]$. Для $\sigma < \sigma_a$ приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ – максимальний член ряду (1), а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$ – його центральний індекс.

2. Основна частина. Через L позначимо клас неперервних на $(-\infty; +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $-\infty < x \leqslant x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ для $x_0 \leqslant x \to +\infty$. Будемо говорити: що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{ПЗ}} \subset L^0$.

Якщо $\sigma_a = +\infty$, тобто ряд Діріхле (1) є цілим, то для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненим порядком $\varrho_{\alpha\beta}[F]$ і нижнім порядком $\lambda_{\alpha\beta}[F]$ цього ряду називаються [1] величини

$$\varrho_{\alpha\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}, \quad \lambda_{\alpha\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)},$$

а в [1] за певних умов на $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ та показники λ_n зазначено формули для знаходження цих величин через коефіцієнти a_n. У [2-3] доведемо, що ряд умов на $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ можна усунути, якщо замість узагальнених порядку та нижнього порядку розглянути модифіковані узагальнені порядок $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і нижній порядок $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F]$, означені рівностями

$$\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right), \quad \overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right).$$

Отримані формули для знаходження $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F]$ і $\overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F]$ через коефіцієнти і показники ряду (1) застосованого в [3] до дослідження зростання цілих характеристичних функцій одного класу ймовірносних законів.

Припустимо тепер, що $\sigma_a = 0$, і будемо вважати, що $\mu(\sigma,F) \uparrow +\infty$ при $\sigma \uparrow 0$, а для цього необхідно і достатньо, щоб

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n| = +\infty. \tag{2}$$

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненими порядком $\varrho^o_{\alpha,\beta}[F]$ і нижнім порядком $\lambda^0_{\alpha,\beta}[F]$ ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності називаються величини

$$\varrho^o_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)}, \quad \lambda^0_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)}.$$

Приймемо $\varkappa_n(F) = \dfrac{\ln|a_n| - \ln|a_n+1|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$ і припустимо, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|a_n|} = h < +\infty. \tag{3}$$

Відома [4] така теорема.

Теорема A. Нехай $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L_{\text{ПЗ}}$, $\dfrac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))} \uparrow +\infty$ і $\alpha\left(\dfrac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x_0(c) \leqslant x \to +\infty$ для кожного $c \in (0;+\infty)$. Тоді, якщо або виконується умова (3), або $\alpha(\lambda_n) = o\left(\beta\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln n}\right)\right)$ при $n\to\infty$, то

$$\varrho^o_{\alpha,\beta}[F] = k^o_{\alpha,\beta}[F] =: \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n/\ln|a_n|)}.$$

Якщо ж, крім того, послідовність $(\varkappa_n[F])$ неспадна і $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n\to\infty$, то

$$\lambda^0_{\alpha,\beta}[F] = \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F] =: \varliminf_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n/\ln|a_n|)}.$$

Як і у випадку цілих рядів Діріхле, умови на функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ можна дещо послабити, якщо замість узагальнених порядку та нижнього порядку розглянути модифіковані узагальнені порядок $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F]$ і нижній порядок $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F]$, які означимо формулами

$$\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right), \quad \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right).$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ такі, що $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0;+\infty)$. Припустимо, що виконується одна з умов:*

1) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L_{\text{ПЗ}}$, *а послідовність (λ_n) задовольняє умову*
$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \gamma(\lambda_n)} = h_o < +\infty, \tag{4}$$
де γ – додатна неперервна спадна до 0 на $[0;+\infty)$ функція така, що функція $t\gamma(t) \uparrow +\infty \quad (t \to +\infty)$ і $\alpha(x) = o(\beta(1/\gamma(x)))$ при $x \to +\infty$;
2) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L^0, \quad \ln n = o(\lambda_n\gamma(\lambda_n))$ *при $n \to \infty$, де функція γ така, як в умові 1);*
3) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L_{\text{ПЗ}}$ *і коефіцієнти задовольняють умову (3);*
4) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L^0$ *і $\ln n = o(\ln|a_n|)$ при $n \to \infty$.*

Тоді $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] = k^0_{\alpha,\beta}[F]$. Якщо ж, крім того, послідовність $(\varkappa_n[F])$ неспадна і $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] = \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F]$.

Для доведення цієї теореми, крім нерівності Коші $\mu(\sigma,F) \leqslant M(\sigma,F)$ для всіх $\sigma < 0$, нам будуть потрібні такі результати.

Лема 1 ([5]). *Нехай $\sigma_a = 0$, а послідовність (λ_n) задовольняє умову (4), де γ – додатна неперервна спадна до 0 на $[0;+\infty)$ функція така, що функція $t\gamma(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $K(\varepsilon) > 0$ така, що для всіх $\sigma < 0$*
$$M(\sigma,F) \leqslant \mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F\right)\left(\exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right\} + K(\varepsilon)\right). \tag{5}$$

Лема 2 ([6], [7, с. 33]). *Якщо $\sigma_a = 0$ і виконується умова (3), то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \in (\sigma_0(\varepsilon);0)$*
$$M(\sigma,F) \leqslant \mu\left(\frac{\sigma}{h+1+\varepsilon}, F\right)^{h+1+\varepsilon}. \tag{6}$$

Лема 3 ([8, с. 184], [7, с. 21]). *Для $\varsigma_0 \leqslant \sigma < 0$ правильна рівність*
$$\ln\mu(\sigma,F) - \ln\mu(\sigma_0,F) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t,F)}dt. \tag{7}$$

Лема 4 ([7, с. 21]). *Якщо послідовність $(\varkappa_n[F])$ неспадна, то $\mu(\varkappa_n,F) = |a_n|\exp(\varkappa_n[F]\lambda_n)$ для всіх n. Якщо, крім того, $\varkappa_{n-1}[F] < \varkappa_n[F]$ для деякого $n \geqslant 1$, то $\nu(\sigma,F) = n$ і $\mu(\sigma,F) = |a_n|\exp(\sigma\lambda_n)$ для всіх $\sigma \in [\varkappa_{n-1}[F];\varkappa_n[F])$ і цього n.*

Доведення теореми 1 проведемо в два етапи. Спочатку у термінах модифікованих узагальнених порядку та нижнього порядку знайдемо зв'язок між зростанням максимуму модуля та максимального члена, а потім такий зв'язок доведемо між зростанням максимального члена і коефіцієнтів.

Лема 5. *Для того, щоб для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності правильними були формули*
$$\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] =: \varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{|\sigma|}\right),$$

і

$$\overline{\lambda}^{0}_{\alpha,\beta}[F]=\overline{\lambda}^{0}_{\alpha,\beta}[\ln\mu]=:\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{|\sigma|}\right),$$

достатньо, щоб виконувалась одна з таких умов:

1) $\alpha\in L_{\text{ПЗ}},\beta\in L_{\text{ПЗ}}$*, послідовність* (λ_n) *задовольняє умову (4), де функція* γ *задовольняє умови леми 1, і* $\alpha(x)=o(\beta(1/\gamma(x)))$ *при* $x\to+\infty$*;*

2) $\alpha\in L_{\text{ПЗ}},\beta\in L^0,\quad \ln n=o(\lambda_n\gamma(\lambda_n))$ *при* $n\to\infty$*, де функція* γ *задовольняє умови леми 1, і* $\alpha(x)=o(\beta(1/\gamma(x)))$ *при* $x\to+\infty$*.*

Доведення. Оскільки $t\gamma(t)\uparrow+\infty\quad(t\to+\infty)$, то $|\sigma|\gamma^{-1}(|\sigma|)\uparrow+\infty$ при $\sigma\uparrow 0$. Тому з огляду на лему 1 отримаємо

$$M(\sigma,F)\leqslant(1+o(1))\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)\exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right\},\quad \sigma\uparrow 0,$$

звідки

$$\ln M(\sigma,F)\leqslant\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)+o(1)+\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)=$$
$$=\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)+(1+o(1))\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)+|\sigma|\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right),\quad \sigma\uparrow 0,$$

тобто, для всіх досить близьких до 0 значень $\sigma<0$

$$\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\leqslant\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)+\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\max\left\{\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right),\quad \gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right\}. \tag{8}$$

Припустимо, що виконується умова 1). Тоді $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$ і з (8) при $\sigma\uparrow 0$ отримуємо

$$\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right)\leqslant(1+o(1))\alpha\left(\max\left\{\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right),\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right\}\right)=$$
$$=(1+o(1))\max\left\{\alpha\left(\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)\right),\quad \alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant(1+o(1))\left(\alpha\left(\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)\right)+\alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right)\right). \tag{9}$$

З огляду на умови $\beta\in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha(x)=o(\beta(1/\gamma(x)))$ при $x\to+\infty$ одержуємо

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right)}{\beta(1/|\sigma|)}=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)\gamma(x)}\right)}=0.$$

Тому з (9) з огляду на умови $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta\in L_{\text{ПЗ}}$ отримуємо

$$\frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right)\leqslant\frac{(1+o(1))}{\beta((1+\varepsilon)/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{(1+\varepsilon)\ln\mu\left(\sigma/(1+\varepsilon),F\right)}{|\sigma|(1+\varepsilon)}\right)=$$

$$= \frac{(1+o(1))}{\beta((1+\varepsilon)/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln\mu\,(\sigma/(1+\varepsilon),F)}{|\sigma|/(1+\varepsilon)}\right), \tag{10}$$

звідки випливає, що $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ і $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$. Обернені нерівності випливають з нерівності $\mu(\sigma,F) \leqslant M(\sigma,F)$. Твердження леми 5 за умови 1) доведено.

Якщо $\ln n = o(\lambda_n\gamma(\lambda_n))$ при $n\to\infty$, то $h_0 = 0$ і з (5) замість (9) отримуємо

$$\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right) \leqslant (1+o(1))\left(\alpha\left(\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)\right)+\alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2\varepsilon}\right)\right)\right),$$

$\sigma\uparrow 0$, а з огляду на довільність ε

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}\frac{\alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2\varepsilon}\right)\right)}{\beta(1/|\sigma|)} = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2\varepsilon\gamma(x)}\right)} \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(1/\gamma(x)\right)} = 0.$$

Тому, як у доведенні (10),

$$\frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right) \leqslant \frac{(1+o(1))}{\beta((1+\varepsilon)/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln\mu\,(\sigma/(1+\varepsilon),F)}{|\sigma|/(1+\varepsilon)}\right)\frac{\beta((1+\varepsilon)/|\sigma|)}{\beta(1/|\sigma|)},$$

$\sigma\uparrow 0$. Звідси випливає, що $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant B(\varepsilon)\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ і $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant B(\varepsilon)\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$, де $B(\varepsilon) = \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\beta((1+\varepsilon)x)}{\beta(x)}$. Оскільки $\beta\in L^0$, то [9] $B(\varepsilon)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$, і отже, з огляду на довільність $\varepsilon>0$ правильні нерівності $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ і $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$. Завдяки нерівності Коші $\mu(\sigma,F)\leqslant M(\sigma,F)$ лему 5 доведено. □

Лема 6. *За умови (3) рівності* $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$, $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ *є правильними, якщо* $\alpha\in L$ *і або* $\beta\in L_{\Pi З}$, *або* $h=0$ *і* $\beta\in L^0$.

Справді, за лемою 2

$$\frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right) \leqslant \frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{h+1+\varepsilon}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{h+1+\varepsilon},F\right)\right),$$

звідки звично отримуємо висновок леми 6.

Наступна лема свідчить про зв'язок між зростанням максимального члена і коефіцієнтів.

Лема 7. *Нехай або* $\alpha\in L_{\Pi З}$ *і* $\beta\in L^0$, *або* $\beta\in L_{\Pi З}$ *і* $\alpha\in L^0$. *Тоді, якщо*

$$\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x) \quad \textit{при} \quad x\to+\infty$$

для кожного $c\in(0;+\infty)$, *то* $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] = k^0_{\alpha,\beta}[F]$. *Якщо ж, крім того, послідовність* $(\varkappa_n[F])$ *неспадна і* $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ *при* $n\to\infty$, *то*
$\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] = \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F]$.

Доведення. Припустимо, що $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] < +\infty$. Тоді $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant|\sigma|\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|))$ для кожного $\varrho > \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ і всіх $\sigma\in(\sigma_0(\varrho);0)$. Тому

$$\ln|a_n| \leqslant \ln\mu(\sigma,F)-\sigma\lambda_n \leqslant |\sigma|(\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|))+\lambda_n)$$

для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in (\sigma_0(\varrho); 0)$. Виберемо $\sigma_n = \dfrac{-1}{\beta^{-1}(\alpha(\varepsilon\lambda_n)/\varrho)}$, де $\varepsilon > 0$ – довільне число. Тоді $\sigma_n \geqslant \sigma_0(\varrho)$ для $n \geqslant n_0$, і для таких n одержимо $\ln|a_n| \leqslant \dfrac{(1+\varepsilon)\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\varepsilon\lambda_n)/\varrho)}$, тобто $\dfrac{\alpha(\varepsilon\lambda_n)}{\beta\left((1+\varepsilon)\lambda_n/\ln|a_n|\right)} \leqslant \varrho$. Якщо $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, то вибравши $\varepsilon = 1$, при $n \to \infty$ отримуємо нерівність $\dfrac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\lambda_n/\ln|a_n|\right)} \leqslant (1+o(1))\varrho, \quad n \to \infty$. З огляду на наведений вище результат з [9] така ж нерівність є правильною і у випадку, коли $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$. Звідси випливає, що $k^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \varrho$, тобто з огляду на довільність ϱ правильна нерівність $k^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$, яка є очевидною, коли $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] = +\infty$.

Обернену нерівність доводимо від супротивного. Припустимо, що $k^0_{\alpha,\beta}[F] < \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$. Тоді для кожного $\varrho \in (k^0_{\alpha,\beta}[F]; \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu])$ і всіх $n \geqslant n_0 = n_0(\varrho)$ правильна нерівність $\ln|a_n| \leqslant \dfrac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)}$. Тому

$$\ln\mu(\sigma,F) = \max\left\{\max_{n\leqslant n_0}(\ln|a_n| + \sigma\lambda_n), \quad \max_{n\geqslant n_0}\left(\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)} + \sigma\lambda_n\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{n\geqslant n_0}\left\{\lambda_n\left(\frac{1}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)} - |\sigma|\right)\right\} + \text{const}\,.$$

Оскільки $\ln\mu(\sigma,F) \uparrow +\infty$ при $\sigma \uparrow 0$, то звідси випливає, що $\frac{1}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{\nu(\sigma,F)})/\varrho)} - |\sigma| \geqslant 0$ для всіх $\sigma \in (\sigma_0; 0)$, тобто $\lambda_{\nu(\sigma,F)} \leqslant \alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|))$. Тому, вважаючи $\sigma_0 > -1$, за лемою 3 отримаємо

$$\ln\mu(\sigma,F) - \ln\mu(\sigma_0,F) \leqslant \int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|x|))dx \leqslant (|\sigma_0| - |\sigma|)\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|)) <$$

$$< \alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|)).$$

Оскільки $\alpha \in L^0$, то звідси отримуємо

$$\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{|\sigma|}\right) \leqslant (1+o(1))\alpha\left(\frac{\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|))}{|\sigma|}\right)$$

при $\sigma \uparrow 0$, звідки, використовуючи умову $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$, одержуємо нерівність $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] \leqslant \varrho$, що неможливо. Першу частину леми 7 доведено.

Нехай тепер $\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F] > 0$. Тоді для будь-якого $\varrho \in (0; \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F])$ і всіх достатньо великих n правильна нерівність $\ln|a_n| \geqslant \dfrac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)}$, тобто

$$\ln\mu(\sigma,F) \geqslant \lambda_n\left(\frac{1}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)} - |\sigma|\right)$$

для всіх $\sigma < 0$, близьких до 0. Виберемо $\sigma = \sigma_n = \dfrac{-1}{(1+\varepsilon)\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)}$, де $\varepsilon \in (0; 1)$. Тоді отримаємо $\ln\mu(\sigma_n,F) \geqslant \dfrac{\varepsilon\lambda_n}{(1+\varepsilon)\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)}$. Тому $\dfrac{\ln\mu(\sigma_n,F)}{|\sigma_n|} \geqslant \varepsilon\lambda_n$ і, якщо

$\sigma_n \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{n+1}$, то

$$\frac{\alpha\left(\dfrac{\ln\mu(\sigma,F)}{|\sigma|}\right)}{\beta(1/|\sigma|)} \geqslant \frac{\alpha\left(\dfrac{\ln\mu(\sigma_n,F)}{|\sigma_n|}\right)}{\beta(1/|\sigma_{n+1}|)} = \frac{\alpha(\varepsilon\lambda_n)}{\beta((1+\varepsilon)\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{n+1})/\varrho))}.$$

Звідси за умов $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, або $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha \in L^0$, завдяки довільності ε та умові $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, одержуємо $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] \geqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha(\lambda_{n+1})/\varrho} = \varrho$, тобто з огляду на довільність ϱ правильна нерівність $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] \geqslant \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F]$, яка є очевидною, якщо $\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F] = 0$.

Обернену нерівність доводимо від супротивного. Припустимо, що $\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F] < \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$. Тоді для будь-якого $\varrho \in (\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F]; \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu])$ існує зростаюча послідовність (n_j) натуральних чисел така, що $\ln|a_{n_j}| \leqslant \dfrac{\lambda_{n_j}}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{n_j})/\varrho)}$. Оскільки послідовність $(\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F])$ неспадна, то за лемою 4 для $\sigma_j = \varkappa_{n_j}[F]$ одержимо

$$\ln\mu(\sigma_j,F) = \ln|a_{n_j}| + \sigma_j\lambda_{n_j} \leqslant \frac{\lambda_{n_j}}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{n_j})/\varrho)} + \sigma_j\lambda_{n_j} \leqslant \max_{n\geqslant 0}\left\{\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)} + \sigma_j\lambda_n\right\}.$$

Оцінюючи останній максимум, як у доведенні нерівності $k^0_{\alpha,\beta}[F] \geqslant \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$, отримуємо $\alpha\left(\dfrac{\ln\mu(\sigma_j,F)}{|\sigma_j|}\right) \leqslant (1+o(1))\alpha\left(\dfrac{\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma_j|))}{|\sigma_j|}\right)$ при $j \to \infty$, звідки, використовуючи умову $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$, отримуємо нерівність $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] \leqslant \varrho$, що неможливо. Лему 7 повністю доведено. □

Доведення теореми 1 легко отримати з лем 5-7.

3. Наслідки. Припустимо тепер, що абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (1) $\sigma_a = A \in (-\infty; +\infty)$, і розглянемо ряд Діріхле

$$F^*(s^*) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{A\lambda_n}\exp(s^*\lambda_n), \quad s^* = \sigma^* + it^*. \tag{11}$$

Для $s^* = s - A$ отримаємо $F^*(s^*) \equiv F(s^* + A)$. Тому абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (11) $\sigma_a = 0$, тобто до цього ряду можна застосувати результати, отримані вище. Оскільки

$$M(\sigma^*, F^*) = \sup\{|F^*(\sigma^* + it^*)| : t^* \in \mathbb{R}\} = \sup\{|F(\sigma^* + A + it)| : t \in \mathbb{R}\} = M(\sigma^* + A, F)$$

і $-\sigma^* = A - \sigma$, то припускаючи, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n| e^{A\lambda_n} = +\infty, \tag{12}$$

з теореми 1 легко отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (1) дорівнює $A \in (-\infty; +\infty)$, а функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ такі, що $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$. Припустимо, що виконується одна з умов:*

1) *$\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, послідовність (λ_n) задовольняє умову (4), де функція γ задовольняє умову 1) теореми 1;*

2) $\alpha \in L_{\Pi З}$, $\beta \in L^0$, $\ln n = o(\lambda_n \gamma(\lambda_n))$ *при* $n \to \infty$, *де функція* γ *задовольняє умову 1) теореми 1;*
3) $\alpha \in L_{\Pi З}$, $\beta \in L_{\Pi З}$ *і* $\ln n = O(\ln(|a_n| e^{A\lambda_n}))$ *при* $n \to \infty$;
4) $\alpha \in L_{\Pi З}$, $\beta \in L^0$ *і* $\ln n = o(\ln(|a_n| e^{A\lambda_n}))$ *при* $n \to \infty$.

Тоді

$$\overline{\lim_{\sigma \uparrow A}} \frac{1}{\beta(1/(A-\sigma))} \alpha\left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{A-\sigma}\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n / \ln(|a_n| e^{A\lambda_n}))}.$$

Якщо ж, крім того, послідовність $(\varkappa_n[F])$ *неспадна і* $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\underline{\lim_{\sigma \uparrow A}} \frac{1}{\beta(1/(A-\sigma))} \alpha\left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{A-\sigma}\right) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n / \ln(|a_n| e^{A\lambda_n}))}.$$

Наслідок 2. *Застосуємо тепер наслідок 1 до дослідження зростання аналітичних у крузі* $\mathbb{D}_{\mathbb{R}} = \{z : |z| < R\}$ *характеристичних функцій* φ *ймовірнісних законів. Нехай* $X = (x_k)-$ *така послідовність, що* $0 = x_0 < x_n \uparrow +\infty \quad (n \to \infty)$, *і, як в [3],* $\prod(X)-$ *клас ймовірнісних законів* F *таких, що* $F(x) \equiv 0$ *для* $x \leqslant 0$, $F(x) = F(x_{k+1})$ *для* $x_k < x \leqslant x_{k+1}$ *і* $F(x_k) \uparrow 1$ *при* $k \to \infty$, *тобто клас зрізаних зліва східчастих ймовірнісних законів.*

Приймемо $M_\varphi(r) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$ *для* $r \in [0, R)$ *і* $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$ *для* $x \geqslant 0$. *Тоді, якщо* $F \in \prod(X)$, *то* $W_F(x) = 1 - F(x_k)$, $W_F(x) = F(x_{k+1})$ *для* $x_k < x \leqslant x_{k+1}$ *і, як доведено в [3],*

$$M_\varphi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) e^{r x_k}. \tag{13}$$

Відомо [10, с. 37-38], що φ *є аналітичною в* $\mathbb{D}_{\mathbb{R}}$ *характеристичною функцією ймовірнісного закону* F *тоді і тільки тоді, коли* $W_F(x) = O(e^{-rx})$ *при* $x \to +\infty$ *для кожного* $r \in [0, R)$. *Звідки випливає, що* $R = \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_{F(x)}}$. *Зрозуміло, що якщо* $F \in \prod(X)$, *то*

$$R = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{x_{k+1}} \ln \frac{1}{1 - F(x_{k+1})}.$$

Звідси випливає, що якщо $R = +\infty$, *то [3] абсциса збіжності ряду Діріхле (13) також дорівнює* $+\infty$. *Ситуація дещо інша, якщо* $R < \infty$. *Використовуючи теорему 2 з [11], для абсциси* A *збіжності ряду (13) правильна формула*

$$A = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{x_k} \ln \frac{1}{F(x_{k+1}) - F(x_k)}, \tag{14}$$

якщо тільки або $\ln k = o(x_k)$, *або* $\ln k = o(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k)))$ *при* $k \to \infty$. *Тому для того, щоб застосувати наслідок 1 до ряду Діріхле (13), потрібно припустити, що* $A = R$, *а з огляду на (12), що*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) \exp R x_k = +\infty. \tag{15}$$

Зауваживши ще, що з умови (4) випливає співвідношення $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$, *у підсумку приходимо до такого наслідку.*

Наслідок 3. *Нехай функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ такі, що $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0;+\infty)$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_{\mathbb{R}}$ характеристична функція ймовірнісного закону $F \in \prod(X)$. Припустимо, що виконується умова (15) і $A = R$, де A задається рівністю (14). Тоді, якщо виконується одна з таких умов:*

1) *$\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, послідовність (x_k) задовольняє умову (4), де функція γ задовольняє умову 1) теореми 1;*
2) *$\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L^0$, $\ln k = o(x_k\gamma(x_k))$ при $k \to \infty$, де функція γ задовольняє умову 1) теореми 1;*
3) *$\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\ln k = o(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k)))$ і $\ln k = O(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k))e^{Rx_k})$ при $k \to \infty$;*
4) *$\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L^0$, $\ln k = o(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k)))$ і $\ln k = o(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k))e^{Rx_k})$ при $k \to \infty$, то*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{1}{\beta\left(\dfrac{1}{R-r}\right)}\alpha\left(\frac{\ln M_{\varphi}(r)}{R-r}\right) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\alpha(x_k)}{\beta\left(\dfrac{x_k}{\ln(F(x_{k+1}) - F(x))e^{Rx_k}}\right)}.$$

Якщо, крім того, $\alpha(x_{k+1}) = (1 + o(1))\alpha(x_k)$ при $k \to \infty$ і послідовність

$$\left(\frac{1}{x_{k+1} - x_k} \ln \frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{F(x_{k+2}) - F(x_{k+1})}\right)$$

неспадна, то

$$\varliminf_{r\uparrow R} \frac{1}{\beta\left(\dfrac{1}{R-r}\right)}\alpha\left(\frac{\ln M_{\varphi}(r)}{R-r}\right) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha(x_k)}{\beta\left(\dfrac{x_k}{\ln(F(x_{k+1}) - F(x))e^{Rx_k}}\right)}.$$

Автор висловлює подяку Шереметі М.М. за слушні зауваження.

Список використаної літератури

1. *Пьяныло Я.Д.* О росте целых функций, представленных рядами Дирихле / *Я.Д. Пьяныло, М.Н. Шеремета* // Изв. вузов, Матем. – 1975. – №10. – С. 91-93.
2. *Заліско М.М.* Модифікація узагальненого порядку цілого ряду Діріхле та її застосування / *М.М. Заліско* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 66. – С. 147-152.
3. *Кулявець Л.В.* Про модифіковані узагальнені порядки цілих рядів Діріхле і характеристичні функції ймовірносних законів / *Л.В. Кулявець, М.М. Шеремета* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 124-131.
4. *Галь Ю.М.* О росте аналитических функций, заданных абсолютно сходящимися в полуплоскости рядами Дирихле / *Ю.М. Галь* // Дрогобыч, 1980. – 40 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, N 4080-80 Деп.
5. *Мулява О.М.* Про класи збіжності рядів Діріхле / *О.М. Мулява* // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 1485-1494.
6. *Шеремета М.М.* Зростання рядів Діріхле / *М.М. Шеремета, Я.Я. Притула, С.І. Фединяк* // Львів: Науково-учбовий центр матем. моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 1995. – Препрінт 18-95. – 30 с.
7. *Шеремета М.М.* Ряди Діріхле: текст лекцій / *М.М. Шеремета, О.М. Мулява* – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2001.
8. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент / *А.Ф. Леонтьев.* – М.: Наука, 1976.

9. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristics of entire functions / *M.M. Sheremeta* // Matem. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1. – P. 73-82.
10. *Линник Ю.В.* Разложение случайных величин и векторов / *Ю.В. Линник, И.В. Островский.* – М.:Наука, 1972.
11. *Мулява О.М.* Про абсцису збіжності ряду Діріхле / *О.М. Мулява* // Матем. студії. – 1998. – Т. 9, №2. – С. 171-176.

Стаття: надійшла до редакції 29.05.2013
прийнята до друку 11.12.2013

ON MODIFIED GENERALIZED ORDERS OF DIRICHLET SERIES WHICH ABSOLUTELY CONVERGE IN HALF-PLANE

Lyubov KULYAVEC'

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com

We study the Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with the null abscissa of absolute convergence. The connection between the growth of $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and behaviour of the coefficients a_n is established in the terms of modified generalized orders. The obtained results were applied to investigation of the growth of analytic in a disk characteristic functions of probability laws.

Key words: Dirichlet series, probability law, characteristic function, generalized order.

О МОДИФИЦИРОВАННЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПОРЯДКАХ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Любовь КУЛЯВЕЦ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com

Для ряда Дирихле $F(s) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ с нулевой абсциссой абсолютной сходимости в терминах модифицированных обобщённых порядков установлена связь между ростом $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ и поведением коэффициентов a_n. Полученные результаты применены к изучению роста аналитических в круге характеристических функций вероятностных законов.

Ключевые слова: ряд Дирихле, вероятностный закон, характеристическая функция, обобщённый порядок.