ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 48–68
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 48–68

УДК 519.63

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ЛІ-АЛГЕБРИЧНИХ ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ

Аркадій КІНДИБАЛЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Доведено апроксимаційні властивості та умови збіжності обчислювальної схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для розв'язування задачі Коші з двовимірним рівнянням адвекції. Зведення задачі Коші для рівняння адвекції до системи лінійних алгебричних рівнянь забезпечує степеневу збіжність за усіма змінними, які входять до рівняння.

Ключові слова: узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, апроксимаційна схема, дискретизація, рівняння адвекції, степенева збіжність.

1. Вступ. Багато важливих явищ природознавства, задач техніки та фізики описують диференціальними рівняннями, в тім числі диференціальними рівняннями у частинних похідних (ДРЧП). Незважаючи на потужний математичний апарат, багато з таких рівнянь ми не можемо розв'язати точно. Тому є потреба у застосуванні наближених методів або аналітично-числових методів. Одним з таких підходів є метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій [2, 5, 6, 9, 11-17, 19-24].

Основною задачею дослідження у [6], [13], [2] є задача Коші для системи еволюційних рівнянь із частинними похідними

$$\begin{cases} u_t = K(t,x,\partial)u + f(t,x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^q, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi \in B, \end{cases} \tag{1}$$

де B – деякий простір Банаха.

Шляхом побудови квазізображення диференціального оператора K у просторі лінійних операторів над $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{Z}_+$ задачу (1) зводять до задачі Коші для системи ЗДР

$$\begin{cases} du_{(n)}/dt = K_{(n)}(t)u_{(n)} + f_{(n)}(t), \\ u_{(n)}|_{t=0} = \varphi_{(n)} \in B_{(n)}, \end{cases} \tag{2}$$

де $B_{(n)}$ – скінченновимірний простір ізоморфний $\mathbb{R}^N, N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_q$. Подібно до методу Калоджеро, редукція (2) задачі (1) на простір $B_{(n)}$ отримана шляхом q-вимірної алгебричної інтерполяції на q-вимірному кубі $D \supset \Omega$.

У [3] запропоновано узагальнений метод розв'язування задачі Коші для ДРЧП (1) та зредукованої задачі для системи ЗДР (2) шляхом зведення задач до системи лінійних алгебричних рівнянь.

З цією метою введено додатково тривимірну алгебру Лі $\mathcal{G}_t := \{t, \partial/\partial t, 1\}$, для якої побудовано скінченновимірні квазізображення $X_t^{(n)}, Z_t^{(n)}, I_t^{(n)}$. Оскільки оператор K є лінійним оператором, то розв'язок задач (1) і (2) можна отримати як розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь. Якщо коефіцієнти диференціального оператора не змінюються зі зміною обчислювального експерименту, а змінюються початкові умови чи функція вільного члена, то зберігаючи у пам'яті обернену матрицю, розв'язування задачі Коші зводиться до перемножування оберненої матриці на вектор [3].

Мета нашої праці – застосувати такий підхід для двовимірного рівняння адвекції, а також з'ясування питання збіжності обчислювальної схеми та доведення ознак збіжності.

У другому пункті сформульовано модельну задачу Коші для рівняння адвекції, у третьому пункті на підставі введеної алгебри Лі та побудованих квазізображень елементів алгебри Лі побудовано схему наближеного відшукання розв'язку задачі. Досліджено ранг скінченновимірного квазізображення задачі, а в четвертому пункті наведені оцінки такого квазізображення. У п'ятому пункті доведено збіжність побудованої схеми. Порівняння чисельних схем наведено у шостому пункті.

2. Формулювання задачі. Введемо область $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (0,1) \times (0,1)$, часову межу $T < +\infty$, циліндр $Q_T = \Omega \times (0, T]$, простори Банаха у вигляді $V = C^{1,1,1}_{x,y,t}(Q_T) \cap C\left(\overline{Q_T}\right)$ та $C = C(Q_T)$, причому $V \subset L^2(Q_T), C \subset L^2(Q_T)$. Формулюємо задачу Коші для двовимірного рівняння адвеції

$$\begin{cases} \textit{задано коефіцієнти адвекційного переносу } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ \textit{початковий розподіл шуканої величини } \varphi = \varphi(x,y) \in C^{1,1}_{x,y}(\Omega) \\ \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \in V \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + c_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \forall (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi. \end{cases} \tag{3}$$

Здійснивши підстановку $u(x,y,t) = v(x,y,t) + \varphi(x,y)$ у (3), отримаємо задачу Коші для функції $v(x,y,t)$ з однорідною початковою умовою

$$\begin{cases} \textit{задано коефіцієнти адвекційного переносу } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ \textit{знайти функцію } v = v(x,y,t) \in V \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + c_1 \dfrac{\partial v}{\partial x} + c_2 \dfrac{\partial v}{\partial y} = -c_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \forall (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язок задачі (4) шукаємо у просторі функцій, які в початковий момент часу набувають нульового значення, тобто у просторі $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$. Ввівши для задачі (4) позначення

$$A := \frac{\partial}{\partial t} + c_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad f := -c_1\frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2\frac{\partial \varphi}{\partial y} \in C(Q_T), \tag{5}$$

отримаємо задачу для операторного рівняння

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{задано оператор } A : B \to C \textit{ та елемент } f \in C, \\ \textit{знайти елемент } v \in B \textit{ такий, що } Av = f. \end{array} \right. \tag{6}$$

Задачу Коші зведено до задачі для операторного рівняння, яку розв'яжемо узагальненим методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

3. Побудова обчислювальної схеми. Введемо алгебру Гайзенберга-Вейля

$$\mathcal{G} := \{x, \partial/\partial x, 1\} \oplus \{y, \partial/\partial y, 1\} \oplus \{t, \partial/\partial t, 1\},$$

яка є алгеброю Лі. Оскільки оператор A належить до універсальної огортуючої алгебри $U(\mathcal{G})$, алгебри $\mathcal{G}$, то він є лінійною комбінацією елементів алгебри Гайзенберга-Вейля. Квазізображення A_h оператора A побудуємо як лінійну комбінацію скінченновимірних квазіпредставлень алгебри $\mathcal{G}$. Для цього зафіксуємо три натуральні числа n_x, n_y та n_t, де n_x – кількість вузлів за змінною x, n_y – кількість вузлів за змінною y, n_t – кількість вузлів за змінною t. Згідно з теоремою Вейєрштрасса [4], [10] множина всіх поліномів з дійсними коефіцієнтами є щільною множиною в просторі $C(Q_T)$, тому розв'язок (6) шукатимемо у вигляді інтерполяційного полінома.

Для кожного вузла за змінною x асоційовано поліном Лагранжа $l_j(x)$, який задовольняє умови $l_j(x_i) = \delta_{ij}$, де

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{array} \right.$$

Для кожного вузла за змінною y асоційовано поліном Лагранжа $l_j(y)$ такий, що $l_j(y_i) = \delta_{ij}$. Для кожного вузла за змінною t асоційовано поліном Лагранжа $l_j(t)$ такий, що $l_j(t_i) = \delta_{ij}$.

Нехай $M_j = (x_{jx}, y_{jy}, t_{jt})$ – вузли області Q_T, де j_x – номер вузла на осі x, j_y – номер вузла на осі y, j_t – номер вузла на осі t. Набір таких вузлів позначимо:

$$Q_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{n_x} \times \{y_j\}_{j=1}^{n_y} \times \{t_k\}_{k=1}^{n_t}.$$

Вузли занумеруємо у спосіб $j = (j_t - 1)n_x n_y + (j_y - 1)n_x + j_x$, тоді поліном Лагранжа асоційований з вузлом M_j набуває вигляду $l_j(x, y, t) = l_{jx}(x)l_{jy}(y)l_{jt}(t)$. Апроксимація розв'язку (6) набуде вигляду

$$v_h(x,t) = \sum_{j_t=1}^{n_t}\sum_{j_y=1}^{n_y}\sum_{j_x=1}^{n_x} v_j l_{j_x}(x) l_{j_y}(y) l_{j_t}(t) = \overline{v}\left(l(t) \otimes l(y) \otimes l(x)\right), \tag{7}$$

де $\overline{v} = \{v_j\}_{j=1}^{n_x n_y n_t}$ – відповідний вектор значень апроксимації, символ $\otimes$ позначає тензорний добуток. $l(x) = \{l_1(x), l_2(x), ..., l_{n_x}(x)\}^\top$, $l(y) = \left\{l_1(y), l_2(y), ..., l_{n_y}(y)\right\}^\top$, $l(t) = \{l_1(t), l_2(t), ..., l_{n_t}(t)\}^\top$ – відповідні набори поліномів Лагранжа за змінними x, y, t, $\top$– знак траспонування.

Для побудови обчислювальної схеми розв'язування задачі (4), підставимо (7) у операторне рівняння (6), отримаємо

$$\overline{v}\left(l'(t)\otimes l(y)\otimes l(x)+c_1 l(t)\otimes l(y)\otimes l'(x)+c_2 l(t)\otimes l'(y)\otimes l(x)\right)=f(x,y,t).$$

Якщо послідовно для кожної змінної x,y,t вибрати $i_x,j_x=\overline{1,n_x}$, $i_y,j_y=\overline{1,n_y}$, $i_t,j_t=\overline{1,n_t}$, то отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) вигляду $A_{1,h}v_h=F_h$, де

$$A_{1,h}:=Z_t\otimes I_y\otimes I_x+c_1 I_t\otimes I_y\otimes Z_x+c_2 I_t\otimes Z_y\otimes I_x,\quad F_h=\{f(x_{i_x},y_{i_y},t_{j_t})\}_{i_x=1,j_y=1,k_t=1}^{n_x,n_y,n_t}.$$

Скінченновимірні квазізображення Z_x,Z_y,Z_t,I_x,I_y,I_t, побудовані за такими правилами:

$$Z_{x,ij}=l'_j(x_i),\quad i,j=\overline{1,n_x},\quad Z_{y,ij}=l'_j(y_i),\quad i,j=\overline{1,n_y},\quad Z_{t,ij}=l'_j(t_i),\quad i,j=\overline{1,n_t},$$
$$I_{x,ij}=l_j(x_i)=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{1,n_x},\quad I_{y,ij}=l_j(y_i)=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{1,n_y},$$
$$I_{t,ij}=l_j(t_i)=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{1,n_t}.$$

На підставі теореми про ранг скінченновимірного зображення [14] ранги відповідних квазіпредставлень набувають значень

$$rank(I_t)=n_t,\quad rank(Z_t)=n_t-1,\quad rank(I_x)=n_x,$$
$$rank(Z_x)=n_x-1,\quad rank(I_y)=n_y,\quad rank(Z_y)=n_y-1.$$

Лема 1. *Нехай A,B,C – квадратні матриці, тоді*

$$rank\,(A\otimes B\otimes C)=rank(A)rank(B)rank(C).$$

Доведення. Позначимо матрицю $D=B\otimes C$, тоді на підставі властивості тензорних добутків [18]

$$rank(D)=rank\,(B\otimes C)=rank(B)rank(C).$$

Визначимо ранг матриці $A\otimes D$, тоді

$$rank\,(A\otimes D)=rank(A)rank(D)=rank(A)rank(B)rank(C),$$

тобто

$$rank\,(A\otimes B\otimes C)=rank(A)rank(B)rank(C).$$

□

Ранги матриць $Z_t\otimes I_y\otimes I_x$, $I_t\otimes I_y\otimes Z_x$, $I_t\otimes Z_y\otimes I_x$ на підставі леми 1 набудуть значень

$$rank\,(Z_t\otimes I_y\otimes I_x)=n_xn_y(n_t-1),\quad rank\,(I_t\otimes I_y\otimes Z_x)=(n_x-1)n_yn_t,$$
$$rank\,(I_t\otimes Z_y\otimes I_x)=n_x(n_y-1)n_t.$$

Позаяк для побудови матриці $A_{1,h}$ ми врахували усі вузли, то кількість рядків цієї матриці становить $n_xn_yn_t$.

Оскільки початкові умови відомі й однорідні, то вважатимемо, що базисом простору апроксимації є множина поліномів Лагранжа, без поліномів асоційованих з початковим моментом часу. Множина поліномів Лагранжа для часової змінної є

$$\tilde{l}(t)=\{l_2(t),l_3(t),...,l_{n_t}(t)\}\,,$$

причому

$$\forall l_i \in \tilde{l}(t): \quad l_i|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall l_i \in \tilde{l}(t): \quad l_i \in B, \quad i = \overline{2, n_t}.$$

Розмірність $\dim \tilde{l}(t) = n_t - 1$. Оскільки система функцій $l_x \otimes l_y \otimes \tilde{l}_t \in B$ лінійно незалежна, то вважатимемо, що ці функції є базисом простору апроксимацій B_h.

Вилучивши вузли асоційовані з початковим моментом часу, отримаємо нову систему вузлів

$$\tilde{Q}_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{n_x} \times \{y_i\}_{i=1}^{n_y} \times \{t_j\}_{j=2}^{n_t}.$$

Отже, скінченновимірні квазізображення в просторі B_h набувають вигляду

$$Z_{x,ij} = l_j'(x_i), \quad i,j = \overline{1, n_x}, \quad Z_{y,ij} = l_j'(y_i), \quad i,j = \overline{1, n_y}, \quad \tilde{Z}_{t,ij} = l_j'(t_i), \quad i,j = \overline{2, n_t},$$

$$I_{x,ij} = l_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1, n_x}, \quad I_{y,ij} = l_j(y_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1, n_y},$$

$$\tilde{I}_{t,ij} = l_j(t_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{2, n_t}.$$

Ранги скінченновимірних квазізображень $Z_t \otimes I_y \otimes I_x$, $I_t \otimes I_y \otimes Z_x$, $I_t \otimes Z_y \otimes I_x$ на підставі леми 1 набули значень

$$rank\left(\tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x\right) = n_x n_y (n_t - 1),$$

$$rank\left(\tilde{I}_t \otimes I_y \otimes Z_x\right) = (n_x - 1) n_y (n_t - 1),$$

$$rank\left(\tilde{I}_t \otimes Z_y \otimes I_x\right) = n_x (n_y - 1)(n_t - 1),$$

а скінченновимірне квазізображення оператора задачі (6) набуде вигляду

$$A_h = \tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x + c_1 \tilde{I}_t \otimes I_y \otimes Z_x + \tilde{I}_t \otimes Z_y \otimes I_x. \tag{8}$$

Кількість рядків у матриці (8) становить $n_x n_y (n_t - 1)$.

Лема 2. *Нехай A, B – квадратні матриці, тоді для довільного натурального числа k правильне співвідношення*

$$(A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k.$$

Доведення. При $k = 1$ отримаємо очевидну рівність $A \otimes B = A \otimes B$. З властивості $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ [18] при $k = 2$ одержуємо

$$(A \otimes B)(A \otimes B) = A^2 \otimes B^2.$$

Припустимо, що справджується співвідношення для $k - 1$

$$(A \otimes B)^{k-1} = A^{k-1} \otimes B^{k-1}.$$

Доведемо за індукцією, що воно правильне за довільного k

$$(A \otimes B)^k = (A \otimes B)(A \otimes B)^{k-1} = (A \otimes B)\left(A^{k-1} \otimes B^{k-1}\right) = A^k \otimes B^k.$$

□

Лема 3. *Нехай A, B, C – квадратні матриці, тоді для довільного натурального числа k правильне співвідношення*

$$(A \otimes B \otimes C)^k = A^k \otimes B^k \otimes C^k.$$

Доведення. Позначимо матрицю $D = B \otimes C$. На підставі леми 3 отримуємо, що

$$(A \otimes D)^k = A^k \otimes D^k.$$

Скориставшись лемою 3 для матриці D одержуємо $D^k = (B \otimes C)^k = B^k \otimes C^k$, звідки

$$(A \otimes D)^k = A^k \otimes D^k = A^k \otimes B^k \otimes C^k.$$

□

Лема 4. *Нехай A, B – переставні нільпотентні матриці, тоді їхня лінійна комбінація $\alpha A + \beta B$ є нільпотентою матрицею, де α, β – довільні числа.*

Доведення. Нехай k – найменше натуральне число, за якого одночасно виконується $A^k = 0, B^k = 0$. Оскільки $AB = BA$, то

$$(\alpha A + \beta B)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i \alpha^i \beta^{2k-i} A^i B^{2k-i},$$

де C_{2k}^i– біноміальні коефіцієнти.

Розглянемо випадок, коли $i \leqslant k$, тоді $2k - i \geqslant k$ набуло значення $2k - i = k + m$, де $m \geqslant 0$– деяке число

$$B^{2k-i} = B^{k+m} = 0, \quad A^i B^{2k-i} = A^i \cdot 0 = 0.$$

Нехай $i \geqslant k$ набуло значення $i = k + m$, тоді $A^{k+m} B^{k-m} = 0 \cdot B^{k-m} = 0$. Отже,

$$(\alpha A + \beta B)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i \alpha^i \beta^{2k-i} A^i B^{2k-i} = 0.$$

□

Лема 5. *Матриці $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right)$, $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)$ переставні та нільпотентні.*

Доведення. Ланцюжок перетворень доводить те, що матриці $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right)$ та $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)$ переставні. Справді,

$$\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right) \cdot \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right) = \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes Z_x\right),$$
$$\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right) \cdot \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right) = \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes Z_x\right).$$

Доведемо, що матриця $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right)$ – нільпотентна. На підставі теореми про ранг скінченновимірного квазізображення [14] знаходимо $Z_x^{n_x} = 0$, а з леми 3 отримуємо

$$\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right)^{n_x} = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^{n_x} \otimes I_y \otimes Z_x^{n_x} = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^{n_x} \otimes I_y \otimes 0 = 0.$$

Оскільки $Z_y^{n_y} = 0$, то отримуємо

$$\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)^{n_y} = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^{n_y} \otimes Z_y^{n_y} \otimes I_y = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^{n_x} \otimes 0 \otimes I_x = 0.$$

□

Лема 6. *Матриця* $c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x$ *нільпотетна.*

Доведення. Матриці $\left(\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x\right)$, $\left(\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x\right)$ згідно з лемою 5 переставні та нільпотентні.

Оскільки матриця $c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x$ є лінійною комбінацією переставних нільпотентних матриць, то на підставі леми 4 матриця $c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x$ також нільпотетна. □

Позначимо I^N одиничну матрицю $\tilde{I}_t\otimes I_y\otimes I_x$.

Лема 7. *Матриця* $I^N+c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x$ *має обернену матрицю і її ранг є* $n_xn_y(n_t-1)$.

Доведення. Запишемо обернену матрицю

$$\left(I^N+c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x\right)^{-1}$$

у вигляді формального ряду

$$\left(I^N+c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x\right)^{-1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x\right)^k.$$

Оскільки на підставі леми 6 матриця $c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x$ є нільпотентною, то

$$\left(I^N+c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x\right)^{-1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\max\{n_x,n_y\}}(-1)^k\left(c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x\right)^k. \qquad (9)$$

Оскільки ряд (9) скінченний, то матриця

$$I^N+c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x$$

має обернену матрицю і її ранг дорівнює кількості рядків у матриці, тобто

$$rank\left(I^N+c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x\right)=n_xn_y\left(n_t-1\right),$$

що доводить лему. □

Теорема 1. *Про ранг скінченновимірного квазізображення оператора задачі Коші з двовимірним рівнянням адвекції.*

Ранг скінченновимірного квазізображення A_h *становить*

$$n_xn_y(n_t-1).$$

Доведення. Запишемо матрицю (8) у вигляді

$$A_h=\tilde{Z}_t\otimes I_y\otimes I_x\left(I^N+\left(\tilde{Z}_t\otimes I_y\otimes I_x\right)^{-1}\left(\tilde{I}_t\otimes\left(c_1I_y\otimes Z_x+c_2Z_y\otimes I_x\right)\right)\right)=$$
$$=\left(\tilde{Z}_t\otimes I_y\otimes I_x\right)\left(I^N+c_1\tilde{Z}_t^{-1}\otimes I_y\otimes Z_x+c_2\tilde{Z}_t^{-1}\otimes Z_y\otimes I_x\right).$$

У лемі 7 з'ясовано, що

$$rank\left(I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right) = n_x n_y \left(n_t - 1\right),$$

а згідно з лемою 1 отримаємо $rank\left(\tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x\right) = n_x n_y \left(n_t - 1\right)$.

Оскільки для двох матриць A, B виконується властивість

$$rank(AB) = \min\left\{rank(A),\, rank(B)\right\},$$

то ранг скінченновимірного зображення набув значення

$$rank(A_h) = rank\left(\left(\tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x\right)\left(I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)\right) =$$
$$= \min\left\{n_x n_y \left(n_t - 1\right), n_x n_y \left(n_t - 1\right)\right\} = n_x n_y \left(n_t - 1\right),$$

що доводить теорему. □

Апроксимацію розв'язку (7) подамо у вигляді

$$v_h(x,y,t) = \sum_{j=n_x Ny}^{n_x n_y n_t} v_j l_j(x,y,t), \quad \forall\,(x,y,t) \in Q_T,$$

або

$$v_h(M) = \sum_{j=n_x n_y}^{n_x n_y n_t} v_j l_j(M), \quad \forall M \in Q_T, \tag{10}$$

де l_j – відповідний поліном Лагранжа, асоційований з вузлом $M_j \in \tilde{Q}_{T,h}$.

Зазначимо, таке: оскільки $v_h|_{t=0} = 0$, то $v_h \in B_h \subset B$.

Підставивши (10) у операторне рівняння (6), отримаємо рівняння

$$\sum_{j=n_x n_y}^{n_x n_y n_t} v_j A\left(l_j(M)\right) = f(M), \quad \forall M \in Q_T.$$

Вибравши послідновно $M := M_i \in \tilde{Q}_{T,h} \subset Q_T$, отримаємо СЛАР:

$$\sum_{j=n_x n_y}^{n_x n_t} v_j A\left(l_j(M)\right)|_{M=M_i} = f(M_i), \quad i = \overline{n_x n_y, n_x n_y n_t} \tag{11}$$

для визначення невідомих компонент вектора $\overline{v}$. Введемо позначення

$$A_{h,ij} = A\left(l_j(M)\right)|_{M=M_i}, \quad f_{h,i} = f(M_i) \quad i,j = \overline{n_x n_y, n_x n_y n_t}.$$

Зазначимо, що знайдена матриця A_h збігається з скінченновимірним квазізображенням (8). Отже, ми отримали дискретне формулювання операторного рівняння

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A_h : B_h \to C_h \textit{ та елемент } f_h \in C_h, \\ \textit{знайти елемент } v_h \in B_h \textit{ такий, що } A_h v_h = f_h. \end{cases} \tag{12}$$

4. Апроксимаційні властивості схеми. Нехай N – розмірність просторів B_h, C_h, тоді введемо циліндичну норму [10] в просторах B_h, C_h

$$\|v\|_{B_h} = \|v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j^2} \tag{13}$$

причому

$$\lim_{N\to\infty} \|v\|^2_{B_h} = \int\limits_{Q_t} v^2\,dx\,dy\,dt.$$

Нехай функція v така, що

$$v \in W^{n_x n_y n_t,\infty} = \{v : Q_t \to \mathbb{R} \;\;:\;\; D^\alpha v \in L^\infty(Q_t),\;\; \forall|\alpha| \leqslant n_x n_y n_t\},$$

тобто функція v разом зі своїми всіма можливими похідними до $n_x n_y n_t$ порядку належить до простору $L^\infty(Q_t)$.

Запишемо залишковий член [1] інтерполяційного полінома Лагранжа v_I

$$v(x,t)-v_I(x,t) \approx \frac{\omega_{n_x}(x)}{(n_x)!}\frac{\partial^{n_x} v(\xi_1,y,t)}{\partial x^{n_x}} + \frac{\omega_{n_y}(y)}{(n_y)!}\frac{\partial^{n_y} v(x,\xi_2,t)}{\partial y^{n_y}} + \frac{\omega_{n_t}(t)}{(n_t)!}\frac{\partial^{n_t} v(x,\eta)}{\partial t^{n_t}}, \quad (14)$$

де $\omega_{n_x}(x) = \prod\limits_{i=1}^{n_x}(x-x_i)$, $\omega_{n_t}(t) = \prod\limits_{i=1}^{n_t}(t-t_i)$, $(\xi_1,\xi_2) \in \Omega, \eta \in (0,T]$.

Позначимо $\Delta x = \frac{1}{(n_x-1)}$, $\Delta y = \frac{1}{(n_y-1)}$ – крок дискретизації за змінними x та y, $\Delta t = \frac{1}{(n_t-1)}$ – крок дискретизації за часовою змінною.

Теорема 2. *Про апроксимаційні властивості обчислювальної схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з двовимірним рівнянням адвекції.*

Скінченновимірне квазізображення A_h апроксимує оператор A на елементі $v \in B\cap W^{n_x n_t,\infty}(Q_t)$, причому похибка апроксимації в нормі простору C_h у випадку рівновіддалених вузлів характеризується оцінкою

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leqslant \ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_{t-1}} \left\|\frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty +$$

$$+|c_1|\ln(n_x)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_{x-1}} \left\|\frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + |c_2|\ln(n_y)\left(\frac{1}{n_y-1}\right)^{n_{y-1}} \left\|\frac{\partial^{n_y} v}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty. \quad (15)$$

Доведення. Позаяк норма простору C_h є векторною, то подамо різницю

$$Av - A_h v, \quad \forall v \in B$$

у вигляді вектора.

Для виразу $Av \in C$ отримаємо вектор $\{Av(M_i)\}_{i=1}^N$, де $M_i \in \tilde{Q}_{T,h}$, а для елемента $v \in B$ знаходимо вектор-стовпець $\{v(M_j)\}_{j=1}^N$, де $M_j \in \tilde{Q}_{T,h}$. Розглянемо i-ту компоненту вектора $A_h v$

$$(A_h v)_i = (A(l_1)(M_i), ..., A(l_N)(M_i))\,.\,(v(M_1), ..., v(M_N)))^\top =$$

$$= \sum_{j=1}^N v(M_j) A\,(l_j)\,(M_i) = (Av_I)(M_i).$$

Врахувавши отримане співвідношення $(A_h v)_i = (Av_I)(M_i)$, у підсумку отримаємо

$$(Av - A_h v)_i = (Av(M) - Av_I(M))\,|_{M=M_i}.$$

Розглянемо $\|Av - A_h v\|_{C_h}$

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left(Av(M) - Av_I(M)\right)|_{M=M_i}\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sup_{M\in Q_T}|A\left(v(M) - v_I(M)\right)|\right)^2} \leqslant \|A\left(v - v_I\right)\|_\infty.$$

Отже, ми знайшли оцінку вигляду

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leqslant \|A\left(v - v_I\right)\|_\infty. \tag{16}$$

Діючи оператором $A = \partial/\partial t + c_1\partial/\partial x + c_2\partial/\partial y$ на залишковий член інтерполяційного полінома Лагранжа (14), отримаємо таке наближення:

$$A\left(v - v_I\right) \approx c_1\frac{\omega'_{n_x}(x)}{(n_x)!}\frac{\partial^{n_x}v(\xi_1, y, t)}{\partial x^{n_x}} + c_2\frac{\omega'_{n_y}(y)}{(n_y)!}\frac{\partial^{n_y}v(x, \xi_2, t)}{\partial y^{n_y}} + \frac{\omega'_{n_t}(t)}{(n_t)!}\frac{\partial^{n_t}v(x,\eta)}{\partial t^{n_t}}.$$

Врахувавши, що $v \in W^{n_x n_t,\infty}$, одержимо оцінку

$$\|A\left(v - v_I\right)\|_\infty \leqslant \frac{|\omega'_{n_t}(t)|}{(n_t)!}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty +$$

$$+|c_1|\frac{|\omega'_{n_x}(x)|}{(n_x)!}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + |c_2|\frac{|\omega'_{n_y}(y)|}{(n_y)!}\left\|\frac{\partial^{n_y}v}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty.$$

Оскільки значення полінома $\omega'_{n_x}(x)$ залежить від положення вузлів, тоді у випадку рівновіддалених вузлів отримаємо, що $|\omega'_{n_x}(x)| \leqslant (n_x)!\ln(n_x)\left(\frac{1}{(n_x-1)}\right)^{n_x-1}$.

Аналогічну оцінку одержуємо для $\omega'_{n_y}(y)$ і $\omega'_{n_t}(t)$, тобто

$$|\omega'_{n_y}(y)| \leqslant (n_y)!\ln(n_y)\left(\frac{1}{(n_y-1)}\right)^{n_y-1}, \qquad |\omega'_{n_t}(t)| \leqslant (n_t)!\ln(n_t)\left(\frac{1}{(n_t-1)}\right)^{n_t-1}.$$

Отже,

$$\|A(v - v_I)\|_\infty \leqslant \ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t - 1}\right)^{n_{t-1}}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty +$$

$$+|c_1|\ln(n_x)\left(\frac{1}{n_x - 1}\right)^{n_{x-1}}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + |c_2|\ln(n_y)\left(\frac{1}{n_y - 1}\right)^{n_{y-1}}\left\|\frac{\partial^{n_y}v}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty. \tag{17}$$

Врахувавши (16) та (17), приходимо до оцінки (15), що доводить теорему. □

5. Збіжність обчислювальної схеми. Для доведення збіжності апроксимаційної схеми нам потрібно довести, що схема Лі-алгебричних дискретних апроксимацій задовольняє умови **теореми Канторовича** (*про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми*) та теореми *про ознаку обмеженого оберненого оператора* [4].

Згідно з теоремою Канторовича [7] про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми, співвідношення $\lim\limits_{h\to 0}\|v - v_h\|_B = 0$ правильне, якщо виконується:

1) $\forall f \in C\ \exists! v \in B : Av = f$;
2) $\forall A_h\ \exists A_h^{-1} : \|A_h^{-1}\| \leqslant M < +\infty$;
3) $\forall v \in D(A) \subset B : \lim\limits_{h\to 0}\|Av - A_h v\|_C = 0$.

Згідно з теоремою про ознаку обмеженого оберненого оператора [4], якщо лінійний оператор $A : B \to C$ такий, що

$$\exists \alpha = const > 0 \quad \text{таке, що} \quad \|Av\|_C \geqslant \alpha \|v\|_B \quad \forall v \in D(A), \tag{18}$$

тоді існує лінійний обмежений обернений оператор.

Зрозуміло, що знаходження константи $\alpha > 0$ є нетривіальною задачею. Крім того, послідовність операторів A_h є нескінченною послідовністю. Проте для практичного застосування методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій потрібно визначити якісь додаткові або еквівалентні ознаки існування обмеженого оператора. З огляду на важливість сформульованої проблеми доведемо теорему.

Теорема 3. *Про існування обмеженого оберненого оператора для квазізображення диференціального оператора двовимірного рівняння адвекції.*

Якщо ранг скінченновимірного матричного квазізображення диференціального оператора двовимірного рівняння адвекції A_h оператора A дорівнює розмірності простору апроксимації, тобто

$$rank A_h = dim B_h,$$

тоді існує лінійний обмежений обернений оператор A_h^{-1}, причому

$$\forall A_h \quad \exists M > 0 \quad \exists A_h^{-1} : \quad \|A_h^{-1}\| \leqslant M < +\infty. \tag{19}$$

Доведення. Оскільки норма задовольняє властивості невід'ємності та невиродженості, тобто

$$\|A_h v\|_{C_h} \geqslant 0, \quad \forall v \in D(A_h),$$

причому

$$\|A_h v\|_{C_h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0_{B_h},$$

то

$$\forall v \in D(A_h) \backslash \{0_{B_h}\} : \quad \|A_h v\|_{C_h} > 0.$$

Справді, нехай $\|A_h v\|_{C_h} = 0$. Оскільки норма задовольняє аксіому невиродженості, то такий випадок можливий лише тоді, коли $A_h v = 0_{C_h}$. Для ненульового елемента $v \in B_h$ це можливо лише тоді, коли $det A_h = 0$, тобто $rank A_h < dim B_h$. Оскільки оператор A_h такий, що $rank A_h = dim B_h, det A_h \neq 0$, тоді $\|A_h v\|_{C_h} = 0$ можливе тоді і тільки тоді, коли $v = 0_{B_h}$.

Величини $\|A_h v\|_{C_h}$ і $\|v\|_{B_h}$ строго додатні для $\forall v \in D(A_h) \backslash \{0_{B_h}\}$. Це означає, що існує стала $\alpha > 0$, для якої виконується

$$\|A_h v\|_{C_h} \geqslant \alpha \|v\|_{B_h}.$$

З того, що оператор A_h має обернений оператор, можемо довести, [4], що

$$\|A_h^{-1}\| \leqslant M < +\infty.$$

□

Теорема 4. *Про збіжність схеми методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з двовимірним рівнянням адвекції.*

Послідовність u_h визначена схемою (12) відшукання наближеного розв'язку задачі (6) збігається до точного розв'язку задачі (3), причому норма похибки характеризується величиною

$$\|u-u_h\|_{B_h} \leqslant M \left(\ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_{t-1}} \left\|\frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + |c_1|\ln(n_x)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_{x-1}} \left\|\frac{\partial^{n_x}(u-\varphi)}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + \right.$$
$$\left. + |c_2|\ln(n_y)\left(\frac{1}{n_y-1}\right)^{n_{y-1}} \left\|\frac{\partial^{n_y}(u-\varphi)}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty \right), \tag{20}$$

де число $M>0$: таке, що $\forall A_h : \|A_h^{-1}\| \leqslant M$.

Доведення. Для розв'язування задачі (3) ми ввели заміну $u = v + \varphi$ та $u_h = v_h + \varphi_h$. Тоді похибка апроксимації розв'язку задачі (3) набула вигляду

$$\|u-u_h\|_B = \|v - v_h + \varphi - \varphi_h\|_B \leqslant \|v-v_h\|_B + \|\varphi - \varphi_h\|_B,$$

де $\|v-v_h\|_B$– норма похибки апроксимації розв'язку задачі (4), а $\|\varphi-\varphi_h\|_B$ – норма похибки інтерполювання початкової умови, яку характеризує така апріорна оцінка:

$$\|\varphi-\varphi_h\|_{B_h} \leqslant \left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\left\|\frac{\partial^{n_x}\varphi}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\left\|\frac{\partial^{n_y}\varphi}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty,$$

тобто $\|\varphi-\varphi_h\|_{B_h} \leqslant O\left(\left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x} + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\right)$.

Похибку інтерполювання функції правого члена $\|f-f_h\|_B$ характеризує така апріорна оцінка:

$$\|f-f_h\|_{B_h} \leqslant \left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\left\|\frac{\partial^{n_x} f}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\left\|\frac{\partial^{n_y} f}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty,$$

тобто $\|f-f_h\|_{B_h} \leqslant O\left(\left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x} + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\right)$.

Розглянемо $\|v-v_h\|_{B_h}$

$$\|v-v_h\|_{B_h} = \|A_h^{-1}A_h(v-v_h)\|_{B_h} \leqslant \|A_h^{-1}\|\|A_h(v-v_h)\|_{C_h} =$$
$$= \|A_h^{-1}\|\|A_h(v-v_h) + Av - Av\|_{C_h} = \|A_h^{-1}\|\|(A_h v - Av) + (Av - A_h v_h)\|_{B_h} \leqslant$$
$$\leqslant \|A_h^{-1}\|\left(\|Av - A_h v\|_{C_h} + \|f-f_h\|_{C_h}\right).$$

Згідно з умовою теореми виконуються (19), тоді

$$\|v-v_h\|_{B_h} \leqslant M\left(\|Av - A_h v\|_{C_h} + \|f-f_h\|_{C_h}\right).$$

Врахувавши оцінку похибки апроксимації оператора і нехтуючи доданками порядку $O(\frac{1}{n_x!} + \frac{1}{n_y!})$, отримуємо

$$\|v-v_h\|_{B_h} \leqslant M \left(\ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_{t-1}} \left\|\frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + \right.$$
$$\left. + |c_1|\ln(n_x)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_{x-1}} \left\|\frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + |c_2|\ln(n_y)\left(\frac{1}{n_y-1}\right)^{n_{y-1}} \left\|\frac{\partial^{n_y} v}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty \right).$$

Оскільки $v = u - \varphi$ та $\|\varphi-\varphi_h\|_{B_h} \leqslant O\left(\left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x} + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\right)$, нехтуючи величинами порядку $O\left(\left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x} + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\right)$, то у підсумку приходимо до оцінки 20. □

6. Оцінки швидкості збіжності. Для проведення числових експериментів вважатимемо, що область $Q_T := [0,1] \times [0,1] \times (0,1]$, тобто $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$, $t \in (0,1]$. Норму похибки апроксимації точного розв'язку $u - u_h = u(x,y,t) - u_h(x,y,t)$ у просторі $L^2(Q_T)$ обчислюємо за формулою

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} (u - u_h)^2 \, dxdydt,$$

у просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})} = \sup_{(x,y,t) \in Q_{T,h}} |u(x,y,t) - u_h(x,y,t)|,$$

а в просторі Соболєва $W^{1,2}(Q_T)$ [4]

$$\|u - u_h\|^2_{W^{1,2}(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} \left[(u - u_h)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_h}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t} \right)^2 \right] dQ_T.$$

Порядок збіжності у нормі простору $L^2(Q_T)$ визначається формулою

$$p_{h,L^2(Q_T)} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{L^2(Q_T)}}{\|u - u_{h/2}\|_{L^2(Q_T)}} \right),$$

порядок збіжності у нормі простору $L^\infty(Q_{T,h})$

$$p_{h,L^\infty(Q_{T,h})} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})}}{\|u - u_{h/2}\|_{L^\infty(Q_{T,h})}} \right),$$

а порядок збіжності у нормі простору $W^{1,2}(Q_T)$

$$p_{h,W^{1,2}(Q_T)} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{W^{1,2}(Q_T)}}{\|u - u_{h/2}\|_{W^{1,2}(Q_T)}} \right).$$

Якщо $\|u - u_h\| = 0$ і $\|u - u_{h/2}\| = 0$, то невизначеність $0/0$ подаємо у таблицях як NaN (*not a number*).

Модельні задачі для рівняння адвекції ми досліджували з використанням методу скінченних різниць (МСР), методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій (МЛАДА) та узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій (УМЛАДА). Зазначимо, що у випадку застосування методу МЛАДА, розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь виконано з використанням вбудованих функцій пакета символьного обчислення Mathematica.

Позначимо $\Delta x = \frac{1}{(n_x - 1)}$, $\Delta y = \frac{1}{(n_y - 1)}$ – крок дискретизації за змінними x та y, $\Delta t = \frac{1}{(n_t - 1)}$ – крок дискретизації за часовою змінною. Якщо крок дискретизації за просторовими та часовою змінними вибрані однаковими, то $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$. У випадку методу МЛАДА h позначає крок дискретизації тільки за просторовими змінними, оскільки при розв'язуванні задачі Коші для системи ЗДР пакетом Mathematica, кількість вузлів за часовою змінною вибирається пакетом Mathematica автоматично.

Приклад 1. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x,y,t) \text{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \forall (x,y,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = x^8 + y^8 \end{cases} \tag{21}$$

отримано числові результати, які наведені у табл. 1-4.

Точний розв'язок задачі (21) набув вигляду $u(x,y,t) = (x-t)^8 + (y-t)^8$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (21) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } v = v(x,y,t) \text{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = -8x^7 - 8y^7, \quad \forall (x,y,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,y,t)$ задачі (22), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,y,t)$ задачі (21) так:

$$u_h(x,y,t) = x^8 + y^8 + v_h(x,y,t),$$

де $x^8 + y^8$ – початкова умова задачі (21).

Таблиця 1

Значення норми похибок у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.304255	1.05925	2.57967
$h = 1/4$	0.0925091	4.4985	5.63376
$h = 1/8$	0.0246464	$9.39717 \cdot 10^{-7}$	0

Таблиця 2

Значення норми похибок у просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	3.9375	17.625
$h = 1/4$	0	38.1445	65.695
$h = 1/8$	0	$3.52385 \cdot 10^{-5}$	0

Таблиця 3

Значення норми похибок у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.53108	3.92108	14.2869
$h = 1/4$	0.885425	23.6889	38.8586
$h = 1/8$	0.449537	$6.47009 \cdot 10^{-5}$	0

Таблиця 4

Значення порядків збіжності у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.71762	-2.0864	-1.12691
$h = 1/4$	1.90822	22.1907	$+\infty$

Таблиця 5

Значення порядків збіжності у просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	NaN	-3.27612	-1.44355
$h = 1/4$	NaN	20.0459	$+\infty$

Таблиця 6

Значення порядків збіжності у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.79011	-2.59489	-1.44355
$h = 1/4$	0.977932	18.482	$+\infty$

Зростання похибок у МЛАДА зумовлено тим, що ДРЧП зведене до системи ЗДР, яка є жорсткою і потребує великої кількості вузлів за часовою змінною для коректного розв'язання задачі.

Приклад 2. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x,y,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \forall (x,y,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \sin x + \sin y \end{cases} \tag{23}$$

отримано числові результати, які наведені у таблицях 5-8.

Точний розв'язок задачі (23) набув вигляду $u(x,t) = \sin(x-t) + \sin(y-t)$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (23) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } v = v(x,y,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\cos x - \cos y, \quad \forall (x,y,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,y,t)$ задачі (24), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,y,t)$ задачі (23) так:

$$u_h(x,y,t) = \sin x + \sin y + v_h(x,y,t),$$

де $\sin x + \sin y-$ початкова умова задачі (23).

Таблиця 7

Значення норми похибок у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0262521	0.146494	0.0790902
$h = 1/4$	0.00702414	0.0103649	0.000986107
$h = 1/8$	0.00178397	$6.76182 \cdot 10^{-5}$	$4.52829 \cdot 10^{-7}$

Таблиця 8

Значення норми похибок у просторі $L^{\infty}(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	0.939041	0.13217
$h = 1/4$	$1.91513 \cdot 10^{-15}$	0.102836	0.0074445
$h = 1/8$	$2.85993 \cdot 10^{-13}$	0.00634505	$8.4915 \cdot 10^{-6}$

Таблиця 9

Значення норми похибок у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.12938	0.62467	0.177763
$h = 1/4$	0.062476	0.0612636	0.00439856
$h = 1/8$	0.0309284	0.00145537	$4.67135 \cdot 10^{-6}$

Таблиця 10

Значення порядків збіжності у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.90204	3.82106	6.32561
$h = 1/4$	1.97723	7.26008	11.0886

Таблиця 11

Значення порядків збіжності у просторі $L^{\infty}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$-\infty$	3.19085	4.15005
$h = 1/4$	-7.22239	4.01856	9.77594

Таблиця 12

Значення порядків збіжності у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.05024	3.34999	5.33678
$h = 1/4$	1.01437	5.39557	9.87898

Розглянемо задачу Коші для рівняння адвекції, коли коефіцієнт швидкості адвекційного переміщення набув значення $c_1 = c_2 = 10^7$. Особливістю задач з таким коефіцієнтом є те, що для коректного розв'язання методом скінченних різниць потрібно, щоб крок дискретизації за часовою змінною був менший, ніж $\min\{10^{-7} \cdot \Delta x, 10^{-7} \cdot \Delta y\}$. У прикладі 3 подано обчислення з однаковими кроками дискретизації.

Приклад 3. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + 10^7 \dfrac{\partial u}{\partial x} + 10^7 \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \forall (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = x^8 + y^8 \end{cases} \tag{25}$$

отримано числові результати, які наведені у табл. 13-18. Точний розв'язок задачі (25) набув вигляду $u(x,y,t) = (x - 10^7 t)^8 + (y - 10^7 t)^8$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (25) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } v = v(x,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 10^7 \dfrac{\partial v}{\partial x} + 10^7 \dfrac{\partial v}{\partial y} = -8 \cdot 10^7 x^7 - 8 \cdot 10^7 y^7, \quad \forall (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,y,t)$ задачі (26), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,y,t)$ задачі (25) так:

$$u_h(x,y,t) = x^8 + y^8 + v_h(x,y,t),$$

де $x^8 + y^8-$ початкова умова задачі (25).

Таблиця 13

Значення норми похибок у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$4.85071 \cdot 10^{55}$	$1.61351 \cdot 10^{75}$	$4.85071 \cdot 10^{55}$
$h = 1/4$	$4.85071 \cdot 10^{55}$	$1.55743 \cdot 10^{205}$	$4.85071 \cdot 10^{55}$
$h = 1/8$	$4.84167 \cdot 10^{55}$	$5.60339 \cdot 10^{237}$	0

Таблиця 14

Значення норми похибок у просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$2 \cdot 10^{56}$	$4.29501 \cdot 10^{75}$	$2 \cdot 10^{56}$
$h = 1/4$	$2 \cdot 10^{56}$	$4.45614 \cdot 10^{205}$	$2 \cdot 10^{56}$
$h = 1/8$	$1.99519 \cdot 10^{56}$	$1.88994 \cdot 10^{238}$	0

Таблиця 15

Значення норми похибок у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$4.15956 \cdot 10^{56}$	$6.01048 \cdot 10^{75}$	$4.15956 \cdot 10^{56}$
$h = 1/4$	$4.15956 \cdot 10^{56}$	$5.74797 \cdot 10^{205}$	$4.15956 \cdot 10^{56}$
$h = 1/8$	$4.14732 \cdot 10^{56}$	$2.13783 \cdot 10^{238}$	0

Таблиця 16

Значення порядків збіжності у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	-431.8	0
$h = 1/4$	0.00269021	-108.148	$+\infty$

Таблиця 17

Значення порядків збіжності у просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	-431.904	0
$h = 1/4$	0.00347135	-108.386	$+\infty$

Таблиця 18

Значення порядків збіжності у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	-431.786	0
$h = 1/4$	0.00425044	-108.196	$+\infty$

Наведені розрахунки виявили, що для УМЛАДА достатньо вибрати крок $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t = 1/8$, щоб похибка стосовно точного розв'язку дорівнювала нулю. За таких же кроків з використанням схем МСР та МЛАДА не можливо отримати такий результат.

7. Висновки. Ми запропонували застосування узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для розв'язування задач Коші з двовимірним рівнянням адвекції.

Знайдено значення рангу скінченновимірного квазізображення диференціального оператора рівняння адвекції, досліджено апроксимаційні властивості та доведено факторіальну збіжність схеми узагальненого методу (УМЛАДА) за трьома змінними, що є суттєвою перевагою над іншими методами, зокрема над методом скінченних різниць чи класичним методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. Знайдено ознаки існування обмеженого оберненого оператора для абстрактної апроксимаційної схеми. Визначено також умови, які гарантують збіжність схеми УМЛАДА. Проведено порівняння узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій з методом скінченних різниць і класичним методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

Для коректного розв'язання задачі методом МСР чи МЛАДА потрібно $9 \cdot 10^7$ вузлів, а для методу УМЛАДА достатньо лише дев'яти вузлів за часовою змінною. Це свідчить про те, що в методі УМЛАДА для коректного розв'язання потрібно щонайменше у 10^7 разів менше вузлів, ніж для МСР чи МЛАДА.

Такий запас точності узагальненого методу пов'язаний з тим, що дискретизація рівняння відбувається за усіма змінними, що входять до рівняння та використання двовимірного інтерполювання Лагранжа.

Ефективність узагальненого методу пов'язана з його відмінністю від рекурентних методів, оскільки рекурентні методи (МСР, МЛАДА) розв'язування задачі Коші при зміні початкових умов передбачають обчислення усіх кроків методу від початку, тоді, як у методі УМЛАДА достатньо перемножити обернену матрицю квазізображення оператора задачі на вектор квазізображення вільного члена, який відображає змінені початкові умови.

Список використаної літератури

1. *Березин И.С.* Методы вычислений. Том. 1 / *И.С. Березин, Н.П. Жидков.* – М.: Физматгиз, 1962.
2. *Бігун О.* Метод Лі-алгебричних апроксимацій у теорії динамічних систем / *О. Бігун, М. Притула* // Мат. вісник НТШ. – 2004. – Т. 1 – С. 24-31.
3. *Кіндибалюк А.А.* Узагальнення схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші /*А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // XIX Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики": Тези доп. – 2013. – Львів. – С. 73-74.

4. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / *Л.А. Люстерник, В.И. Соболев.* – М.: Наука, 1965.
5. *Люстик М.* Функціонально-операторний аналіз проблеми збіжності для методу дискретних апроксимацій Ф. Калоджеро в банахових просторах / *М. Люстик, А. Прикарпатський, М. Притула, М. Вовк* // Мат. вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 168-179.
6. *Митропольский Ю.А.* Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем математической физики / *Ю.А. Митропольский, А.К.Прикарпатский, В.Гр. Самойленко* // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40 – С. 453-458.
7. *Рихтмайер Р.* Разностные методы решения краевых задач / *Р. Рихтмайер, К. Мортон.* – М.: Мир, 1972.
8. *Самарский А.А.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов / *А.А. Самарский, А.В. Гулин.* – М.: Наука, 1989.
9. *Самойленко В.Г.* Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций динамических систем математической физики и оценки её точности / *В.Г. Самойленко* // Асимптотические методы в задачах мат. физики. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 144-151.
10. *Треногин В.А.* Функциональный анализ / *В.А. Треногин.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
11. *Bihun O.H.* Approximation properties of the Lie-algebraic scheme / *O.H. Bihun, M. Luśtyk* // Matematychni Studii. – 2003. – Vol. 20, №1. – P. 85–91.
12. *Bihun O.H.* Modification of the Lie-algebraic scheme and approximation error estimations / *O.H. Bihun* // Matematychni Studii. – 2003. – Vol. 20, №2. – P. 179-184.
13. *Bihun O.H.* Numerical tests and theoretical estimations for a Lie-algebraic scheme of discrete approximations / *O.H. Bihun, M. Luśtyk* // Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science. – 2003. – Issue 6. – P. 3-10.
14. *Bihun O.H.* The rank of projection-algebraic representations of some differential operators / *O. Bihun, M. Prytula* // Matematychni Studii. – 2011. – Vol. 35, №1 – P. 9-21.
15. *Calogero F.* Interpolation, differentiation and solution of eigenvalue problems in more than one dimension / *F. Calogero* // Lett. Nuovo Cimento. – 1983. – Vol. 38, №13. – P. 453-459.
16. *Calogero F.* Numerical tests of a novel technique to compute the eigen values of differential operators / *F. Calogero, E. Franko* // Il Nuovo Cins. 89B. – 1985. – Vol. 2. – P. 161-208.
17. *Casas F.* Solution of linear partial differential equations by Lie algebraic method / *F. Casas* // J. of Comp. and Appl. Math. – 1996. – Vol. 76. – P. 159-170.
18. *Horn R.A.* Matrix Analysis / *R. A. Horn, C. R. Johnson* // Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
19. *Luśtyk M.* Lie-algebraic discrete approximation for nonlinear evolution equations / *M. Luśtyk* // J.l of Math. Sciences. – 2002. – Vol. 109, №1. – P. 1169-1172.
20. *Luśtyk M.* The Lie-Algebraic Discrete Approximation Scheme for Evolution Equations with Dirichlet/Neumann Data / *M. Luśtyk* // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. – 2002. – Vol. 40. – P. 117-124.
21. *Luśtyk M.* The solution existance and convergence analysis for linear and nonlinear differential-operator equations in Banach spaces within the Calogero type projection-algebraic scheme of discrete approximations / *M. Luśtyk, J. Janus, M. Pytel-Kudela, A.K. Prykarpatsky* // Central European Journal of Mathematics. – 2009. – Vol. 7, №3. – P. 775-786.
22. *Prykarpatsky A.K.* The Lie-algebraic discrete approximations in computing analysis / *A.K. Prykarpatsky, M.M. Prytula, O.O. Yerchenko* // Volyn Mathematical Bulletin. – 1996. – Vol. 3. – P. 113-116.

23. *Wei J.* On global representations of the solution of linear differential equations as a product of exponentials / *J. Wei, E. Norman* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – Vol. 15. – P. 327-334.
24. *Wolf F.* Lie algebraic solutions of linear Foker-Plank equations / *F. Wolf* // J. Math. Phys. – 1988. – Vol. 29. – P. 305-307.

Стаття: надійшла до редакції 28.01.2014
прийнята до друку 28.02.2014

APPLICATION OF GENERALIZED METHOD OF LIE-ALGEBRAIC DISCRETE APPROXIMATIONS TO SOLVING OF CAUCHY PROBLEM FOR 2D ADVECTION EQUATION

Arkadii KINDYBALIUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Approximation and convergence properties of the numerical scheme for solving of the Cauchy problem for 2D advection equation by means of the generalized method of the Lie-algebraic discrete approximations were described. The reduction of the Cauchy problem into a system of linear algebraic equations provides the power rate of convergence by all variables in the equation.

Key words: generalized method of Lie-algebraic discrete approximations, approximation scheme, discretization, advection equation, power convergence.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ЛИ-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ

Аркадий КИНДЫБАЛЮК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Доказаны аппроксимационные свойства и условия сходимости вычислительной схемы обобщенного метода Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций решения задачи Коши для двумерного уравнения адвекции. Редукция задачи Коши для уравнения адвекции к системе линейных алгебраических уравнений обеспечивает степенную сходимость за всеми переменными уравнения.

Ключевые слова: обобщенный метод Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций, аппроксимационная схема, дискретизация, уравнение адвекции, степенная сходимость.