ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 33–47
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 33–47

УДК 517.547

ПРО ОДНОСТАЙНЕ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ МОДУЛЯ ТА АРГУМЕНТА ГОЛОМОРФНОЇ В ПРОКОЛЕНІЙ КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЇ

Олег ВИШИНСЬКИЙ, Андрій ХРИСТІЯНИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: vyshynskyi@ukr.net, khrystiyanyn@ukr.net

Розглянуто класи голоморфних у $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ функцій цілком регулярного зростання, поняття індикаторів таких функцій, і за досить загальних припущень розв'язується задача опису множин аналітичних в $\mathbb{C}^*$ функцій f, функцій зростання λ, функцій H, H_1, H_2 з $\mathbb{L}_p[0, 2\pi]$ і чисел $p \in [1, +\infty]$ таких, що:

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) + \overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

або

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) - \lambda(r)H_1(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H_2(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

де $F(z) = z^{-m}\tilde{f}(z)$, $f(a_j) = 0$,
$\tilde{f}(z) = f(z)\prod\limits_{|a_j|=1}(z - a_j)^{-1}$, $m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}dz$.

Ключові слова: голоморфна функція, функція цілком регулярного зростання, індикатор зростання, коефіцієнти Фур'є, коефіцієнти Фур'є-Стільтьєса.

1. Допоміжні поняття та основні результати. Теорія цілих функцій цілком регулярного зростання стосовно функцій λ, близьких до степеневих, була побудована наприкінці 30-х років XX ст. Б.Я. Левіним та А. Пфлюгером. Її застосовували в багатьох розділах сучасного комплексного аналізу. Ця теорія та її застосування досить ґрунтовно викладені у монографії [1]. У 70-80-х роках минулого століття А.А. Кондратюк [2], [3], [4], використовуючи метод рядів Фур'є, розроблений Л.А. Рубелом і Б.А. Тейлором [5], узагальнив теорію Левіна-Пфлюгера: по-перше, він запропонував вимірювати зростання функцій стосовно довільної функції зростання λ, яка задовольняє умову $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$; по-друге, він ввів і дослідив класи мероморфних функцій цілком регулярного зростання. Детальне викладення цієї теорії подано у монографії [6].

Властивості мероморфних у багатозв'язних областях комплексної площини $\mathbb{C}$ функцій, зокрема розподіл значень, вивчало багато авторів. Один з останніх підходів запропоновано в [7], [8], [6]. Опираючись на введені в цих роботах поняття характеристичної функції типу Неванлінни, а також поняття скінченої λ-щільності у [10] було введено поняття голоморфної функції цілком регулярного зростання в проколеній комплексній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, поняття індикаторів зростання таких функцій і доведені деякі їхні властивості, зокрема ω-тригонометрична опуклість індикаторів зростання та існування кутової щільності множини нулів голоморфних функцій цілком регулярного зростання в $\mathbb{C}^*$ на певних послідовностях. Ми працюємо з цими класами функцій, розв'язуємо задачу опису множин голоморфних в $\mathbb{C}^*$ функцій f, функцій зростання λ, функцій H з $\mathbb{L}^p[0, 2\pi]$ і чисел $p \in [1, +\infty]$ таких, що:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) + \overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H(\theta)|^p d\theta \right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty, \tag{1}$$

або

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) - \lambda(r)H_1(\theta)|^p d\theta \right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty, \tag{2}$$

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H_2(\theta)|^p d\theta \right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty, \tag{3}$$

де

$$F(z) = z^{-m}\tilde{f}(z), \;\; \tilde{f}(z) = f(z) \prod_{|a_j|=1} (z - a_j)^{-1}, \;\; f(a_j) = 0, \;\; m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} dz. \tag{4}$$

Необхідність формулювання результатів з використанням функції F, а також вищенаведений вигляд функції F зумовлені можливістю вибору однозначної гілки $\log F$ у області A^* (див. нижче) [6, Лема 4.1].

Нехай f – голоморфна функція в кільці $A = \{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}, 1 < R_0 \leqslant +\infty$, відмінна від тотожного нуля. Припустимо, що f не має нулів на одиничному колі. Через A^* позначимо A без інтервалів $\{z = \tau a, \tau \geqslant 1\}$, якщо $|a| > 1$ і $\{z = \tau a, 0 < \tau \leqslant 1\}$, якщо $|a| < 1$, де a є нулем функції.

Нехай $n_0^1(t, f)$, $n_0^2(t, f)$ це кількість нулів функції f відповідно в $\mathcal{A}_t^1 = \{z : 1 < |z| \leqslant t\}$ та $\mathcal{A}_t^2 = \{z : \frac{1}{t} \leqslant |z| < 1\}, 1 < t < R_0$, з врахуванням їхньої кратності, $n_0(t, f) = n_0^1(t, f) + n_0^2(t, f)$. Ми використовуватимемо такі позначення ([7]):

$$N_0^1(r, f) = \int_1^r \frac{n_0^1(t, f)}{t} dt, \quad N_0^2(r, f) = \int_1^r \frac{n_0^2(t, f)}{t} dt, \quad N_0(r, f) = \int_1^r \frac{n_0(t, f)}{t} dt,$$

$1 \leqslant r < R_0$. Нехай $\gamma_j = \arg a_j$, позначимо ([9])

$$n_k^1(t,f) = \sum_{1<|a_j|\leqslant t} e^{-ik\gamma_j}, \;\; n_k^2(t,f) = \sum_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|<1} e^{-ik\gamma_j}, \;\; n_k(t,f) = \sum_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|\leqslant t} e^{-ik\gamma_j}, \;\; k \neq 0,$$

а також

$$N_k^1(r,f) = \int_1^r \frac{n_k^1(t,f)}{t}dt, \quad N_k^2(r,f) = \int_1^r \frac{n_k^2(t,f)}{t}dt, \quad N_k(r,f) = \int_1^r \frac{n_k(t,f)}{t}dt, \qquad (5)$$

$1 \leqslant r < R_0$. Ми будемо використовувати такі позначення для коефіцієнтів Фур'є:

$$l_k(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log F(re^{i\theta})d\theta, \quad r>0, \quad k\in\mathbb{Z}, \qquad (6)$$

$$c_k(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log |F(re^{i\theta})|d\theta, \quad r>0, \quad k\in\mathbb{Z}, \qquad (7)$$

$$a_k(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\arg F(re^{i\theta})d\theta, \quad r>0, \quad k\in\mathbb{Z}, \qquad (8)$$

$$L_k(r,F) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\left(\log F(re^{i\theta}) + \overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})}\right)d\theta, \quad r>0, \quad k\in\mathbb{Z}. \qquad (9)$$

Означення 1. *Додатна, неспадна, неперервна, необмежена функція* $\lambda(r), r \geqslant 1$ *називається функцією помірного зростання, якщо* $\lambda(2r) \leqslant M\lambda(r), M>0, \forall r>0$.

Функції зростання $\lambda(r)$ та $\tilde\lambda(r)$, для яких $\lambda(r)/\tilde\lambda(r) \to 1$ при $r \to +\infty$, вважатимемо еквівалентними й ототожнюватимемо їх.

Означення 2. *Функція* $L(r)$ *називається повільно змінною функцією (у сенсі Карамати), якщо* $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{L(cr)}{L(r)} = 1$ *рівномірно на довільному проміжку* $0 < a \leqslant c \leqslant b < +\infty$.

Характеристика $T_0(r,f)$ типу Неванлінни для функцій f, мероморфних у кільці $\{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$, де $1 < R_0 \leq +\infty$ була введена у [7] (див. також [6]), а саме

$$T_0(r,f) = m_0(r,f) + N_0(r,f), \qquad 1 < r < R_0,$$

де

$$m_0(r,f) = m(r,f) + m\left(\frac{1}{r}, f\right) - 2m(1,f),$$

$$m(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(te^{i\theta})|\, d\theta, \qquad \frac{1}{R_0} < t < R_0.$$

Означення 3 ([6]). *Нехай λ – функція зростання, f – голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція. Будемо говорити, що f є функцією скінченного λ типу, і записувати $f \in \Lambda_H$, якщо $T_0(r,f) \leqslant B\lambda(Cr)$ при деяких сталих B, C для всіх $r, r \geqslant 1$.*

Означення 4 ([9]). *Голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f називається функцією цілком регулярного зростання (надалі, ц.р.з.), якщо f є скінченого $\lambda-$типу і $\forall k \in \mathbb{Z}$ існують границі $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} =: c_k^{'}$ та $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} =: c_k^{''}$ або $\forall k \in \mathbb{Z}$ існує границя $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} =: c_k^*$.*

Клас таких функцій позначатимемо Λ_H°.

Означення 5 ([9]). *Якщо $f \in \Lambda_H^\circ$, то функції $h_1(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{'} e^{ik\theta}$, $h_2(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{''} e^{ik\theta}$, $h(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^* e^{ik\theta}$, де $c_k^{'}$, $c_k^{''}$, c_k^* визначені в означенні 4 називаються індикаторами зростання функції f або коротко, індикаторами.*

Основними результатами цієї праці є такі теореми.

Теорема 1. *Нехай f – голоморфна функція в $\mathbb{C}^*$, λ – функція помірного зростання, $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$, $H \in \mathbb{L}_p[0,2\pi]$. Тоді (1) виконується тоді і лише тоді, коли:*

i) $H(\theta) \equiv L_0 > 0$, $\lambda(r)$ опукла стосовно $\log r$, f є функцією ц.р.з. стосовно λ з індикатором H, і $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)} = 0$ для всіх $k \neq 0$;

або

ii) $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, $\rho > 0$, L – повільно змінна функція, f є функцією ц.р.з. щодо λ з індикатором $Re\, H$, де $H(\theta) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} L_k e^{ik\theta}$, $L_k = \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)}$.

Якщо співвідношення (1) виконується для деякого $p \in [1,+\infty)$, тоді воно правильне і для будь-якого $p \in [1,+\infty)$.

Теорема 2. *Нехай f – голоморфна функція в $\mathbb{C}^*$, λ функція помірного зростання, $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$, $H_1, H_2 \in \mathbb{L}_p[0,2\pi]$. Тоді (2) і (3) виконуються тоді і лише тоді, коли:*

i) $H_1(\theta) \equiv l_0^1 > 0$, $H_2(\theta) \equiv l_0^2 > 0$, $\lambda(r)$ опукла стосовно $\log r$, f є функцією ц.р.з. стосовно λ з індикатором $H = H_1 + H_2$, і $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{l_k(r,F)}{\lambda(r)} = 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{l_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)} = 0$ для всіх $k \neq 0$;

або

ii) $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, $\rho > 0$, L – повільно змінна функція, f є функцією ц.р.з. щодо λ з індикатором $Re\, H_1 + Re\, H_2$, де $H_1(\theta) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} l_k^1 e^{ik\theta}$, $H_2(\theta) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} l_k^2 e^{ik\theta}$, $l_k^1 = \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{l_k(r,F)}{\lambda(r)}$, $l_k^2 = \lim\limits_{r\to+\infty} \overline{\frac{l_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)}}$.

Якщо співвідношення (1), (2) виконуються для деякого $p \in [1,+\infty)$, тоді вони правильні і для будь-якого $p \in [1,+\infty)$.

2. Допоміжні результати. Для доведення теорем 1 та 2 нам потрібно декілька допоміжних тверджень, які також мають самостійне значення.

Нехай f – голоморфна функція в кільці $A = \{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$, $1 < R_0 \leqslant +\infty$, відмінна від тотожного нуля, $F(z) = z^{-m}\tilde{f}(z)$, де $\tilde{f}$ і m визначені в (4). Оскільки F не має нулів на одиничному колі $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, то $\log F$ голоморфна в деякому кільцевому околі одиничного кола, тому допускає розвинення в ряд Лорана

$$\log F(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k.$$

Справджуються такі леми.

Лема 1.

$$l_k(r, F) = \alpha_k r^k + r^k \int\limits_1^r \frac{n_k^1(t, f)}{t^{k+1}} dt, \quad k \neq 0, \quad r > 1, \tag{10}$$

$$l_0(r, F) - l_0(1, F) = N_0^1(r, f), \tag{11}$$

$$N_k^1(r, f) = l_k(r, F) - \alpha_k - k \int\limits_1^r \frac{l_k(t, F)}{t} dt, \quad k \neq 0, \quad r > 1. \tag{12}$$

Лема 2.

$$l_k(\frac{1}{r}, F) = \alpha_k r^{-k} + r^{-k} \int\limits_1^r \frac{n_k^2(t, f)}{t^{-k+1}} dt, \quad k \neq 0, \quad r > 1, \tag{13}$$

$$l_0(\frac{1}{r}, F) - l_0(1, F) = N_0^2(r, f), \tag{14}$$

$$N_k^2(r, f) = l_k(\frac{1}{r}, F) - \alpha_k + k \int\limits_1^r \frac{l_k(\frac{1}{t}, F)}{t} dt, \quad k \neq 0, \quad r > 1. \tag{15}$$

Лема 3.

$$L_k(r, F) = (\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}}) r^k + r^k \int\limits_1^r \frac{n_k(t, f)}{t^{k+1}} dt + \frac{1}{k}(1 - r^k) n_k(\mathbb{T}), \quad k \neq 0, \quad r > 1, \tag{16}$$

$$N_0(r, f) = L_0(r, F) - L_0(1, F) + n_0(\mathbb{T}) \log r, \tag{17}$$

$$N_k(r, f) = L_k(r, F) - (\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}}) - k \int\limits_1^r \frac{L_k(t, F)}{t} dt - n_k(\mathbb{T}) \log r, \quad k \neq 0, \quad r > 1. \tag{18}$$

Лема 4.

$$a_k(r, F) = -ik \int\limits_1^r \frac{c_k(t, f)}{t} dt + \frac{\alpha_k - \overline{\alpha_{-k}}}{2i} + \frac{1}{2ki}(r^{-k} - 1) n_k(\mathbb{T}), \quad k \neq 0, \quad r > 1, \tag{19}$$

$$a_k(\frac{1}{r}, F) = ik \int\limits_1^r \frac{c_k(\frac{1}{t}, f)}{t} dt + \frac{\alpha_k - \overline{\alpha_{-k}}}{2i} - \frac{1}{2ki}(r^{-k} - 1) n_k(\mathbb{T}), \quad k \neq 0, \quad r > 1. \tag{20}$$

Лема 5.

$$c_k(r,F)=ik\int\limits_1^r \frac{a_k(t,F)}{t}dt+\frac{\alpha_k+\overline{\alpha_{-k}}}{2}+N_k^1(r,f)+\frac{n_k(\mathbb{T})}{2kr^k},\quad k\neq 0,\quad r>1, \tag{21}$$

$$c_k(\frac{1}{r},F)=-ik\int\limits_1^r \frac{a_k(\frac{1}{t},F)}{t}dt+\frac{\alpha_k+\overline{\alpha_{-k}}}{2}+N_k^2(r,f)+\frac{n_k(\mathbb{T})}{2kr^k},\quad k\neq 0,\quad r>1. \tag{22}$$

3. Доведення допоміжних результатів. Співвідношення (10), (11), (13), (14) отримані в [6, с. 59-60], у процесі доведення леми 21.1, хоча окремо вони там не сформульовані. Співвідношення (12), (15) можна отримати способом аналогічним до отримання обернених коефіцієнтів Фур'є-Стільтьєса наведеним у [10].

Лема 3 випливає безпосередньо з леми 1 та леми 2, якщо враховувати співвідношення між коефіцієнтами Фур'є (6)-(9).

Доведення леми 4. Оскільки $N_k^1(r,f)=\overline{N_{-k}^1(r,f)}$, $N_k^2(r,f)=\overline{N_{-k}^2(r,f)}$, то з (12) і (15) випливає

$$0=N_k^1(r,f)-\overline{N_{-k}^1(r,f)}=$$

$$=l_k(r,F)-\overline{l_{-k}(r,F)}-(\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}})-k\int\limits_1^r \frac{l_k(t,F)+\overline{l_{-k}(r,F)}}{t}dt, \tag{23}$$

$$0=N_k^2(r,f)-\overline{N_{-k}^2(r,f)}=$$

$$=l_k(\frac{1}{r},F)-\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}-(\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}})+k\int\limits_1^r \frac{l_k(\frac{1}{t},F)+\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}}{t}dt, \tag{24}$$

для кожного цілого $k\neq 0$ та $r>1$. Використовуючи (7), (8), з (23), (24) одержуємо

$$a_k(r,F)=\frac{k}{i}\int\limits_1^r \frac{c_k(t,f)}{t}dt+\frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i}=-ik\int\limits_1^r \frac{c_k(t,F)}{t}dt+\frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i},\quad k\neq 0,$$

$$a_k(\frac{1}{r},F)=-\frac{k}{i}\int\limits_1^r \frac{c_k(\frac{1}{t},f)}{t}dt+\frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i}=ik\int\limits_1^r \frac{c_k(\frac{1}{t},F)}{t}dt+\frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i},\quad k\neq 0.$$

Оскільки при $k\neq 0$,

$$c_k(\tau,F)=c_k(\tau,f)-\sum_{|a_j|=1}c_k(\tau,1-\frac{z}{a_j})$$

та

$$c_k(\tau,1-\frac{z}{a_j})=\begin{cases}-\dfrac{\tau^k}{2k}e^{-ik\gamma_j}, & 0<\tau<1,\\ -\dfrac{e^{-ik\gamma_j}}{2k\tau^k}, & \tau>1,\end{cases} \tag{25}$$

то

$$a_k(r,F)=-ik\int\limits_1^r \frac{c_k(t,f)}{t}dt+\frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i}+\frac{1}{2ki}(r^{-k}-1)n_k(\mathbb{T}),\quad k\neq 0,\quad r>1,$$

$$a_k(\frac{1}{r},F)=ik\int\limits_1^r\frac{c_k(\frac{1}{t},f)}{t}dt+\frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i}-\frac{1}{2ki}(r^{-k}-1)n_k(\mathbb{T}),\quad k\neq 0,\quad r>1.$$

□

Доведення леми 5 аналогічне до доведення леми 4 з тією лише відмінністю, що замість різниці функцій $N_k^i(r,f)$ та $\overline{N_{-k}^i(r,f)}$, $i=1,2$, треба розглядати їхню суму.

4. Доведення Теореми 1. *Необхідність.* З (1) випливає існування границь $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)}$, для всіх $k\in\mathbb{Z}$. Ми позначимо ці границі L_k. Також зі співвідношення (1) випливає, що L_k дорівнюють коефіцієнтам Фур'є $c_k(H)$ функції H. Справді,

$$\left|\frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)}-c_k(H)\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[e^{-ik\theta}\frac{\log F(re^{i\theta})+\overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})}}{\lambda(r)}-e^{-ik\theta}H(\theta)\right]d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\lambda(r)}\left|\log F(re^{i\theta})+\overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})}-\lambda(r)H(\theta)\right|d\theta\xrightarrow{(1)}0,\quad r\to+\infty.$$

Також зі співвідношення (1) отримуємо

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|F(re^{i\theta})|+\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})|-\lambda(r)Re\,H(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}=o(\lambda(r)),\quad r\to+\infty.\quad(26)$$

Зауважимо, що

$$\log|F(re^{i\theta})|+\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})|=\log|f(re^{i\theta})|+\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|+O(\log r),\quad r\to+\infty.$$

Врахувавши, що $\log r=o(\lambda(r))$, одержуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\theta})|+\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)}-Re\,H(\theta)\right|^p d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|F(re^{i\theta})|+\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)}-Re\,H(\theta)\right|^p d\theta+o(1),\quad r\to+\infty.$$

Тобто

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\theta})|+\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)}-ReH(\theta)\right|^p d\theta=0.$$

Звідси ([9]) отримуємо, що f є функцією ц.р.з. стосовно λ з індикатором ReH.

Якщо $L_k=0$, для всіх $k\neq 0$, тоді $H(\theta)=L_0\geqslant 0$. Використовуючи (17), одержимо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N(r,f)}{\lambda(r)}=\lim_{r\to+\infty}\frac{L_0(r,F)-L_0(1,F)+n_0(\mathbb{T})\log r}{\lambda(r)}=L_0.$$

Тому, якщо $L_0>0$, то отримаємо $\lambda(r)\sim\frac{N(r)}{L_0}, r\to+\infty$. Тобто $\lambda(r)$ є опуклою стосовно $\log r$ і ми довели (i).

Нехай тепер існує $k \neq 0$ таке, що $L_k \neq 0$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $k \in \mathbb{N}$. Оскільки f є функцією ц.р.з. в $\mathbb{C}^*$, то з [9] отримуємо існування границь

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)}, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)}, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

З огляду на (6)-(9), одержимо

$$L_k(r,F) = c_k(r,f) + ia_k(r,F) + c_k(\frac{1}{r},f) - ia_k(\frac{1}{r},F) + O(\log r), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r \to +\infty.$$

Звідси випливає, що існують границі $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{a_k(r,F)-a_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$. Позначимо

$$a_k^* = \lim_{r\to+\infty} \frac{a_k(r,F)-a_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)}, \quad c_k^* = \lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді з леми 4, позначивши $\lambda_1(r) := \int\limits_1^r \frac{\lambda(t)}{t} dt$, отримуємо

$$a_k^*\lambda(r) = -ikc_k^*\lambda_1(r) + o(\lambda_1(r)) + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \to +\infty, \tag{27}$$

а з леми 5

$$c_k^*\lambda(r) = ika_k^*\lambda_1(r) + o(\lambda_1(r)) + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \to +\infty. \tag{28}$$

Зауважимо, що $c_k^* \neq 0$ і $a_k^* \neq 0$. Справді, якщо припустити, що хоча б одна з цих величин дорівнює 0, то з (27) або з (28) випливає, що й інша величина дорівнює 0, а отже, й $L_k = 0$, що суперечить припущенню.

З (27) або (28) отримуємо

$$\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)} = -ik\frac{c_k^*}{a_k^*} + o(1), \quad r \to +\infty.$$

Звідси негайно випливає існування границі $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)} = -ik\frac{c_k^*}{a_k^*}$. З огляду на зроблене вище зауваження $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)} > 0$. Позначимо цю границю через ρ. З [11, с. 117] отримуємо $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, де L є функцією повільного зростання.

Достатність. Припустимо, що (i) або (ii) виконується. З умов накладених на λ випливає ([11, с. 85]), що існує $M > 0$ таке, що для всіх натуральних k, починаючи з деякого k_1 виконується

$$\int\limits_r^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt \leqslant \frac{M\lambda(r)}{kr^k}, \quad r > 1. \tag{29}$$

Більше того, λ має скінченний порядок ([12]), тому існує $k_2 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$L_k(r,F) = -r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}} dt, \quad k > k_2. \tag{30}$$

З огляду на (30) і нерівність $|n_k(r)| \leqslant N_0(er)$, а також використовуючи скінченність λ-типу, отримуємо

$$|L_k(r,F)| \leqslant r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{N(et,f)}{t^{k+1}}dt \leqslant \widetilde{M} r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} \leqslant \frac{\widetilde{M} M\lambda(r)}{k}, \quad k > \max\{k_1,k_2\}, \quad r>1.$$

З виразів для $c_k(r,f)$ [6, лема 21.2, с. 61] одержуємо для $r>1$

$$c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f) = \frac{1}{2}(\alpha_k+\overline{\alpha_{-k}})(r^k+r^{-k}) + \frac{r^k}{2}\int\limits_1^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt -$$

$$-\frac{r^k}{2}n_k(\mathbb{T})\int\limits_1^r \frac{dt}{t^{k+1}} + \frac{r^{-k}}{2}\int\limits_1^r t^{k-1}n_k(t,f)dt - \frac{r^{-k}}{2}n_k(\mathbb{T})\int\limits_1^r t^{k-1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_k+\overline{\alpha_{-k}})(r^k+r^{-k}) + \frac{r^k}{2}\int\limits_1^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt + \frac{r^{-k}}{2}\int\limits_1^r t^{k-1}n_k(t,f)dt - \frac{1}{2k}(r^k-r^{-k}), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Порівнюючи отримане співвідношення з виразом для $L_k(r,f)$ (16), одержуємо

$$L_k(r,F) = 2(c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)) - (\alpha_k+\overline{\alpha_{-k}})r^{-k} -$$

$$-\int\limits_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_k(t,f)}{t}dt + \frac{r^{-k}}{k}(r^k-1)n_k(\mathbb{T}), \quad k\in\mathbb{N}, \quad r>1.$$

Тобто

$$|L_k(r,F)| \leqslant 2|c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)| + N_0(r,f) + O(1+\frac{1}{r^k}), \quad k\in\mathbb{N}, \quad r>1.$$

Використовуючи скінченність λ-типу, одержуємо

$$|L_k(r,F)| \leqslant M_1\lambda(r), \quad k\in\mathbb{N}, \quad r\to+\infty.$$

З огляду на отримані вище оцінки, а також враховуючи (17), матимемо

$$|L_k(r,F)| \leqslant \frac{M_2\lambda(r)}{k+1}, \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \quad r>1, \tag{31}$$

де M_2 – деяка стала.

Тепер розглянемо випадок $k<0$. Інтегруючи частинами у (16), одержуємо

$$L_k(r,F) = (\alpha_k+\overline{\alpha_{-k}})r^k - \frac{1}{k}\frac{r^k n_k(t,f)}{t^k}\Bigg|_1^r + \frac{1}{k}\int\limits_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^k dn_k(t,f) + \frac{1}{k}(1-r^k)n_k(\mathbb{T}), \quad r>1.$$

Тобто

$$|L_k(r,F)| \leqslant \frac{A\lambda(r)}{|k|} + \frac{1}{|k|}B\lambda(r) + o(1), \quad r>1, \quad k<0.$$

Тому

$$|L_k(r,F)| \leqslant \frac{M_3\lambda(r)}{|k|}, \quad k<0, \quad r>1. \tag{32}$$

Отже, з (31) та (32), одержуємо

$$|L_k(r,F)| \leqslant \frac{C\lambda(r)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r>1. \tag{33}$$

Поділивши (33) на $\lambda(r)$ і спрямувавши r до $+\infty$, отримуємо

$$|L_k| \leqslant \frac{C}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Застосовуючи теорему Хаусдорфа-Юнга ([11]), можемо записати

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log F(re^{i\theta})+\overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})}}{\lambda(r)}-H(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)}-L_k\right|^q\right\}^{1/q},$$

при $p \geqslant 2$, $1 < q \leqslant 2$. З огляду на оцінки (33) та (34), перейшовши до границі при $r \to +\infty$, одержимо (1) при $p \geqslant 2$. Використовуючи монотонність інтегральних середніх, отримуємо, що співвідношення (1) виконується для всіх $p \in [1;+\infty)$.

5. Доведення теореми 2. *Необхідність.* З (2) і (3) випливає існування границь $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{l_k(r,F)}{\lambda(r)}$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}}{\lambda(r)}$, для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо їх відповідно l_k^1 та l_k^2. Також зі співвідношень (2), (3) випливає, що ці границі l_k^1, l_k^2 дорівнюють коефіцієнтам Фур'є функцій H_1, H_2. Окрім того, з (2), (3) отримуємо

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|F(re^{i\theta})|-\lambda(r)ReH_1(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r\to+\infty,$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})|-\lambda(r)ReH_2(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r\to+\infty.$$

Зауважимо, що

$$\log|F(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| + O(\log r); \quad \log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})| = \log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})| + O(\log r).$$

$r \to +\infty$. Врахувавши, що $\log r = o(\lambda(r)), r\to+\infty$, одержуємо

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{\lambda(r)}-ReH_1\right|^p dt = \int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|F(re^{i\theta})|}{\lambda(r)}-ReH_1\right|^p dt + o(1), \quad r\to+\infty,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)}-ReH_2\right|^p dt = \int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)}-ReH_2\right|^p dt + o(1), \quad r\to+\infty.$$

Звідси ([9]) випливає, що f є функцією ц.р.з. стосовно λ з індикатором $Re\,H_1 + Re\,H_2$.

Можливі такі випадки.

I. Якщо $l_k^1 = l_k^2 = 0$, $\forall k \neq 0$, тоді $H_1(\theta) = l_0^1 \geqslant 0$, $H_2(\theta) = l_0^2 \geqslant 0$. Використовуючи (11) і (14), матимемо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N_0^1(r,f)}{\lambda(r)} = \lim_{r\to+\infty}\frac{l_0(r,F)-l_0(1,F)}{\lambda(r)} = l_0^1,$$

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N_0^2(r,f)}{\lambda(r)}=\lim_{r\to+\infty}\frac{l_0(\frac{1}{r},F)-l_0(1,F)}{\lambda(r)}=l_0^2.$$

Отже, якщо $l_0^1>0$ або $l_0^2>0$, то отримаємо $\lambda(r)\sim\frac{N^1(r)}{l_0^1}$ або $\lambda(r)\sim\frac{N^2(r)}{l_0^2}, r\to+\infty$. Тобто, $\lambda(r)$ є опуклою стосовно $\log r$ і ми довели (i).

II. Нехай тепер $\exists k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ таке, що $l_k^1\neq 0$ і $l_k^2\neq 0$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $k\in\mathbb{N}$. Оскільки f є функцією ц.р.з. в $\mathbb{C}^*$, то з [9] випливає існування границь

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)},\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)},\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Звідси отримуємо існування границь

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{a_k(r,f)}{\lambda(r)},\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{a_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)},\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{a_k(r,f)-a_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Позначимо відповідно через a_k^1, a_k^2 границі $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{a_k(r,F)}{\lambda(r)}$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{a_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)}$, та через c_k^1, c_k^2 границі $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)}$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)}$.

З леми 4, позначивши $\lambda_1(r):=\int\limits_1^r\frac{\lambda(t)}{t}dt$, отримуємо

$$a_k^1\lambda(r)=-ikc_k^1\lambda_1(r)+o(\lambda_1(r))+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad r\to+\infty, \tag{35}$$

$$a_k^2\lambda(r)=ikc_k^2\lambda_1(r)+o(\lambda_1(r))+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad r\to+\infty. \tag{36}$$

А з леми 5,

$$c_k^1\lambda(r)=ika_k^1\lambda_1(r)+o(\lambda_1(r))+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad r\to+\infty, \tag{37}$$

$$c_k^2\lambda(r)=-ika_k^2\lambda_1(r)+o(\lambda_1(r))+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad r\to+\infty. \tag{38}$$

Звідси

$$\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)}=-ik\frac{c_k^1}{a_k^1}+o(1),\quad r\to+\infty, \tag{39}$$

$$\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)}=ik\frac{c_k^2}{a_k^2}+o(1),\quad r\to+\infty. \tag{40}$$

Отже, існує границя $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)}$. Якщо хоча б одна з величин c_k^i або a_k^i, $i=1,2$ дорівнює 0, тоді з огляду на (35)-(38) інша величина дорівнює 0, а отже, й $l_k^i=0$, $i=1,2$ що суперечить припущенню. Тому $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)}>0$. Позначимо цю границю через ρ. З [11, с. 117] отримуємо $\lambda(r)=r^\rho L(r)$, де L є функцією повільного зростання. Ми довели (ii).

III. Зауважимо, що у випадках, коли $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\quad l_k^i=0$ та $\exists k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\quad l_k^j\neq 0$, де $i,j\in\{1,2\}, i\neq j$, використовуючи наведені міркування, отримуємо висновок аналогічний висновку для випадку II.

Достатність. Припустимо, що (i) або (ii) виконується. З умов накладених на λ випливає ([11, с. 85]) співвідношення (29). Крім того, λ має скінченний порядок ([12]), тоді

$$\exists k_3 \in \mathbb{N} \quad \forall k > k_3 \quad \forall r > 1: \quad l_k(r, F) = -r^k \int\limits_r^\infty \frac{n_k^1(t, f)}{t^{k+1}} dt, \tag{41}$$

$$\exists k_4 \in \mathbb{N} \quad \forall k > k_4 \quad \forall r > 1: \quad \overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)} = -r^k \int\limits_r^\infty \frac{n_k^2(t, f)}{t^{k+1}} dt. \tag{42}$$

З огляду на (41),(42) і нерівності $|n_k^i(t)| \leqslant N_0^i(er), i = 1, 2$, отримуємо

$$|l_k(r, F)| \leqslant \frac{M_4 \lambda(r)}{k}, \quad |l_k(\frac{1}{r}, F)| \leqslant \frac{M_5 \lambda(r)}{k}, \quad r > 1$$

для достатньо великих k і деяких сталих M_4, M_5.

З виразів для $c_k(r, f)$ (лема 21.2 [6, с. 61]) одержимо

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \overline{\alpha_{-k}} r^{-k}) + \frac{1}{2k} \int\limits_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k \right) dn_k^1(t, f) - \frac{n_k(\mathbb{T})}{2kr^k}, \ \ k \neq 0, \ \ r > 1,$$

$$c_k(\frac{1}{r}, f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha_{-k}} r^k) + \frac{1}{2k} \int\limits_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k \right) dn_k^2(t, f) - \frac{n_k(\mathbb{T})}{2kr^{-k}}, \ \ k \neq 0, \ \ r > 1.$$

Порівнючи ці рівності з виразами для $l_k(r, f), l_k(\frac{1}{r}, f)$ (10), (13), отримуємо

$$l_k(r, F) = 2c_k(r, f) - \overline{\alpha_{-k}} r^{-k} + \frac{1}{k} \int\limits_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_k^1(t, f)}{t} dt + \frac{n_k(\mathbb{T})}{kr^k}, \quad k \neq 0, \quad r > 1,$$

$$\overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)} = 2c_k(\frac{1}{r}, f) - \alpha_k r^{-k} - \frac{1}{k} \int\limits_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^{-k} \frac{n_k^2(t, f)}{t} dt + \frac{n_k(\mathbb{T})}{kr^{-k}}, \quad k \neq 0, \quad r > 1.$$

Тобто, при $k > 0$

$$|l_k(r, F)| \leqslant 2|c_k(r, f)| + 2\frac{N_0^1(r, f)}{k} + O(\frac{1}{r^k}), \quad r > 1,$$

$$|\overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)}| \leqslant 2|c_k(\frac{1}{r}, f)| + 2\frac{N_0^2(r, f)}{k} + O(\frac{1}{r^k}), \quad r > 1.$$

Використовуючи скінченність λ-типу, одержуємо

$$|l_k(r, F)| \leqslant M_6 \frac{\lambda(r)}{k}, \quad |\overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)}| \leqslant M_7 \frac{\lambda(r)}{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \to +\infty,$$

де M_6, M_7 – деякі сталі. Враховуючи отримані нерівності та з огляду на (11), (14), матимемо

$$|l_k(r, F)| \leqslant \frac{M_8 \lambda(r)}{k+1}, \quad |\overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)}| \leqslant \frac{M_9 \lambda(r)}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad r > 1. \tag{43}$$

Тепер розглянемо випадок $k < 0$. Інтегруючи частинами у співвідношеннях (10), (13), отримуємо

$$l_k(r,F) = \alpha_k r^k + \frac{1}{k}\frac{r^k n_k^1(t,f)}{t^k}\bigg|_1^r - \frac{1}{k}\int\limits_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^k dn_k^1(t,f),$$

а також

$$\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)} = \overline{\alpha_{-k}} r^k + \frac{1}{k}\frac{r^k n_k^2(t,f)}{t^k}\bigg|_1^r - \frac{1}{k}\int\limits_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^k dn_k^2(t,f).$$

Тобто

$$|l_k(r,F)| \leqslant \frac{A_1\lambda(r)}{|k|} + \frac{1}{|k|}B_1\lambda(r) + o(1), \quad k < 0,$$

$$|\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}| \leqslant \frac{A_2\lambda(r)}{|k|} + \frac{1}{|k|}B_2\lambda(r) + o(1), \quad k < 0.$$

Тому

$$|l_{-k}(r,F)| \leqslant \frac{M_{10}\lambda(r)}{|k|}, \quad k < 0, \quad r \to +\infty, \tag{44}$$

$$|\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}| \leqslant \frac{M_{11}\lambda(r)}{|k|}, \quad k < 0, \quad r \to +\infty. \tag{45}$$

Отже, з (43) і (44) випливає

$$|l_k(r,F)| \leqslant \frac{C_1\lambda(r)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 1. \tag{46}$$

А з (43) і (45) випливає

$$|\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}| \leqslant \frac{C_2\lambda(r)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 1. \tag{47}$$

Поділивши співвідношення (46), (47) на $\lambda(r)$ і спрямувавши r до $+\infty$, отримуємо

$$|l_k^i| \leqslant \frac{C_i}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad i = 1,2, \quad r > 1. \tag{48}$$

Використовуючи теорему Хаусдорфа-Юнга ([11]) і (48), одержуємо

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log F(re^{i\theta})}{\lambda(r)} - H_i(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{l_k(r,F)}{\lambda(r)} - l_k^i\right|^q\right\}^{1/q}, \quad i = 1,2,$$

при $p \geqslant 2, 1 < q \leqslant 2$. З огляду на оцінки (46), (47) і (48), перейшовши до границі при $r \to +\infty$, одержимо (2), (3) для $p \geqslant 2$. Монотонність інтегральних середніх завершує доведення.

Список використаної літератури

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / *Б.Я. Левин.* – М.: ГИТТЛ, 1956.
2. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста I, II, III / *А.А. Кондратюк* // Мат. сб. – 1978. – Т. 106, №3. – С. 386-408.

3. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста II / *А. А. Кондратюк* // Мат. сб. – 1980. – Т. 113, №1. – С. 118-132.
4. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста III / *А. А. Кондратюк* // Мат. сб. – 1983. – Т. 120, №3. – С. 331-343.
5. *Rubel L.A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions / *L.A.Rubel, B.A. Taylor* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol. 96. – P. 53-96.
6. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains / *A. Kondratyuk, I. Laine* – Joensuu-L'viv, 2006 (Fourier series method in complex analysis (Merkrijärvi, 2005), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – Vol. 10. P. 9-111).
7. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I / *A.Ya. Khrystiyanyn, A.A. Kondratyuk* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 23, №1. – P. 19-30.
8. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II / *A.Ya. Khrystiyanyn, A.A. Kondratyuk* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 24, №2. – P. 57-68.
9. *Голдак М.* Голоморфні функції цілком регулярного зростання в проколеній площині / *М. Голдак, А. Христіянин* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2011. – Вип. 75. – С. 91-96.
10. *Голдак М.* Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій / *М. Голдак, А. Христіянин* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 71-77.
11. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / *А.А. Кондратюк* // Львів, 1988.
12. *Rubel L.A.* Entire and Meromorphic Functions / *L.A. Rubel.* – New York: Springer, 1996.

Стаття: надійшла до редакції 23.10.2013
прийнята до друку 11.12.2013

ON THE SIMULTANEOUS REGULAR GROWTH OF THE LOGARITHM OF MODULUS AND ARGUMENT OF A HOLOMORPHIC IN THE PUNCTURED PLANE FUNCTION

Oleg VYSHYNS'KYI, Andriy KHRYSTIYANYN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: khrystiyanyn@ukr.net, vyshynskyi@ukr.net

The paper deals with the class Λ_H° of holomorphic functions in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ of the completely regular growth and the concept of growth indicators of such functions. Under general assumptions we solve the problem of description of the sets of holomorphic functions f, functions of growth λ, functions H, H_1,

H_2 from $L_p[0,2\pi]$, and numbers $p\in[1,+\infty)$ such that

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log F(re^{i\theta})+\overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})}-\lambda(r)H(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}=o(\lambda(r)),\quad r\to+\infty,$$

or

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log F(re^{i\theta})-\lambda(r)H_1(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}=o(\lambda(r)),\quad r\to+\infty,$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})}-\lambda(r)H_2(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}=o(\lambda(r)),\quad r\to+\infty,$$

where $F(z)=z^{-m}\tilde f(z)$, $f(a_j)=0$,
$\tilde f(z)=f(z)\prod\limits_{|a_j|=1}(z-a_j)^{-1}$, $m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\tilde f'(z)}{\tilde f(z)}dz$.

Key words: holomorphic function, function of completely regular growth, growth indicator, Fourier coefficients, Fourier-Stieltjes coefficients.

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОМ РОСТЕ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ГОЛОМОРФНОЙ В ПРОКОЛОТОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ ФУНКЦИИ

Олег ВЫШИНСКИЙ, Андрей ХРИСТИЯНИН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: vyshynskyi@ukr.net, khrystiyanyn@ukr.net

Рассматривается класс $f\in\Lambda_H^\circ$ голоморфных в проколотой плоскости $\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функций вполне регулярного роста, понятия индикаторов таких функций, и при весьма общих предположениях решена задача описания множеств голоморфных в $\mathbb{C}^*$ функций f, функций роста λ, функций H,H_1,H_2 из $\mathbb{L}_p[0,2\pi]$ и чисел $p\in[1,+\infty]$ таких, что

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log F(re^{i\theta})+\overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})}-\lambda(r)H(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}=o(\lambda(r)),\quad r\to+\infty,$$

или

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log F(re^{i\theta})-\lambda(r)H_1(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}=o(\lambda(r)),\quad r\to+\infty,$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})}-\lambda(r)H_2(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}=o(\lambda(r)),\quad r\to+\infty,$$

где $F(z)=z^{-m}\tilde f(z)$, $f(a_j)=0$,
$\tilde f(z)=f(z)\prod\limits_{|a_j|=1}(z-a_j)^{-1}$, $m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\tilde f'(z)}{\tilde f(z)}dz$.

Ключевые слова: голоморфная функция, функция вполне регулярного роста, индикатор роста, коэффициенты Фурье, коэффициенты Фурье-Стильтьеса.