

УДК 539.3

ФРИКЦІЙНА ТЕРМОПРУЖНА НЕСТІЙКІСТЬ У КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ

Юрій ПИР'ЄВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Наведено результати математичного моделювання термопружної нестійкості у системі рухомого тіла з ущільнювачем, яке до нього дотискається пружиною. Приймається, що в області контакту відбувається термічний опір, який є нелінійною функцією контактного тиску. Визначено критичну швидкості у системі.

Ключові слова: контактна задача, тертя, термопружна нестійкість.

При високошвидкісному контакті тіл можливе виникнення нестійкості контактних параметрів, що призводить до погіршення або відмови роботи трибоз'єднання. Під фрикційною термопружною нестійкістю розуміється необмежене зростання в часі характеристик контакту (контактної температури, контактного тиску), при перевищенні швидкості ковзання певного критичного значення [1-7].

У більшості праць, пов'язаних з цією проблематикою [7], контактуючі тіла дотискаються силою. Для одновимірних задач це приводить до постійного контактного тиску в ділянці контакту. У працях [2-6] розглянуто контактні задачі, в яких задано зближення тіл. Для одновимірних задач це приводить до невідомого контактного тиску в ділянці контакту і задача теорії пружності і теплопровідності зв'язані через граничні умови. Праця присвячена вивченню механізму появи фрикційної термопружної нестійкості [3] у системі, яка моделює фрикційний контакт рухомого тіла з ущільнювачем, яке до нього дотискається пружиною. Приймається, що в ділянці контакту відбувається термічний опір, який є нелінійною функцією контактного тиску.

Мета нашої праці – визначити критичну швидкість у системі, яка складається з рухомого з постійною швидкістю жорсткого шару і термопружного шару, який дотискається пружиною.

Формулювання задачі. Розглянемо модель термопружного контакту двох

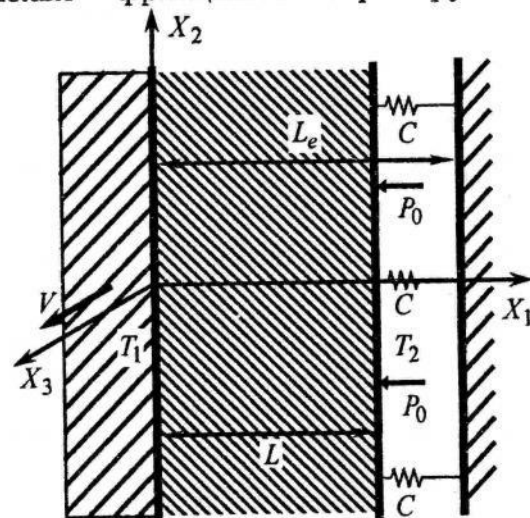


Рис. 1

плоско-паралельних шарів (рис. 1). Приймаємо, що лівий шар абсолютно тверде й ідеально провідне тіло, що рухається зі сталою швидкістю V вздовж осі X_3 декартової системи координат X_1, X_2, X_3 по поверхні закріпленого правого шару товщини L . Унаслідок дії сили тертя F_{fr} на поверхні контакту $X_1 = 0$ відбувається теплоутворення. Сума інтенсивностей фрикційних теплових потоків, спрямованих у шари, дорівнює питомій потужності сил тертя. Приймаємо, що на неконтактуючу поверхню правого шару $X_1 = L$ діє тиск $P_0 h_3(X_2, t)$, зумовлений навколишнім середовищем з температурою $T_2^w(X_2, t) = T_2^0 h_2(X_2, t)$ і розподілене навантаження зумовлене пружинами з жорсткістю C . Між контактуючими шарами йде теплообмін за законом Ньютона з термічним опором $R(P)$, який залежить від контактного тиску. Температура лівого шару відома і дорівнює $T_1^w(X_2, t) = T_1^0 h_1(X_2, t)$.

Приймаємо, що згідно з законом Амонтона $F_{fr} = f P(t)$, де f – коефіцієнт тертя; $P(t)$ – контактний тиск. Треба визначити температуру $T(X_1, X_2, t)$, переміщення $U_n(X_1, X_2, t)$ і напруження $\sigma_{nm}(X_1, X_2, t)$, $n, m = 1, 2, 3$.

Задача зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь квазістаціонарної незв'язаної термопружності

$$2(1 - \nu) \frac{\partial^2 U_n(X_1, X_2, t)}{\partial X_n^2} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 U_n(X_1, X_2, t)}{\partial X_m^2} + \frac{\partial^2 U_m(X_1, X_2, t)}{\partial X_n \partial X_m} =$$

$$= 2\alpha(1 + \nu) \frac{\partial T(X_1, X_2, t)}{\partial X_n}, \quad n, m = 1, 2, \quad n \neq m, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U_3(X_1, X_2, t)}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U_3(X_1, X_2, t)}{\partial X_2^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T(X_1, X_2, t)}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T(X_1, X_2, t)}{\partial X_2^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T(X_1, X_2, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

за таких умов:

механічних крайових

$$U_1(0, X_2, t) = 0, \quad \sigma_{12}(0, X_2, t) = 0, \quad \sigma_{13} = fP(X_2, t), \quad (4)$$

$$\sigma_{11}(L, X_2, t) + CU_1(L, X_2, t) = -(P_0 + P_1)h_3(X_2, t),$$

$$\sigma_{12}(L, X_2, t) = 0, \quad U_3(L, X_2, t) = 0 \quad (5)$$

теплових крайових

$$-K \frac{\partial T(0, X_2, t)}{\partial X_1} + \frac{T(0, X_2, t) - T_1^w}{R(P)} = fVP(X_2, t), \quad (6)$$

$$T(L, X_2, t) = T_2^w \quad (7)$$

і нульових початкових, де $P(X_2, t) = -\sigma_{11}(0, X_2, t)$, $L_1 = L_e - L$, $P_1 = C(L_0 - L_1)$, L_0 - довжина не стиснутих пружин.

Напруження у правому шарі обчислюємо за формулами

$$\sigma_{11}(X_1, X_2, t) = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\partial U_1(X_1, X_2, t)}{\partial X_1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial U_2(X_1, X_2, t)}{\partial X_2} - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T(X_1, X_2, t) \right] \quad (8)$$

$$\sigma_{12}(X_1, X_2, t) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial U_1(X_1, X_2, t)}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2(X_1, X_2, t)}{\partial X_1} \right] \quad (9)$$

$$\sigma_{13}(X_1, X_2, t) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial U_3(X_1, X_2, t)}{\partial X_1} \right] \quad (10)$$

У формулах (1)-(10) E - модуль Юнга, ν , K , k , α - коефіцієнти Пуассона, теплопровідності, температуропровідності, лінійного температурного розширення.

Побудова розв'язку задачі. Розглядувана задача (1)-(7) є нелінійною за рахунок умови (6). Для навантаження $h_{n1}(x_2, \tau) = \text{Re}[e^{i\xi x_2} H(\tau)]$ ($H(\tau)$ - функція Гевісайда) розв'язок задачі шукаємо у безрозмірному вигляді

$$p(x_2, \tau) = \text{Re}[p(\xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad \theta(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[\theta(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}],$$

$$\sigma_{nm}(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[\sigma_{nm}(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad u_n(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[u_n(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}].$$

Стационарний розв'язок задачі для однорідно розподіленого навантаження вздовж осі x_2 визначаємо згідно з означеннями

$$p_{st} = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [p(\xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad \theta_{st}(x_1) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [\theta(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}],$$

$$\sigma_{nm}^{st}(x_1) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [\sigma_{nm}(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad u_n^{st}(x_1) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [u_n(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}].$$

Використовуючи властивості перетворення Лапласа, безрозмірні стаціонарний контактний тиск і стаціонарну температуру знаходимо за формулами

$$p_{st} = \frac{p_0 + p_1 + c_p J \frac{\theta_1^0 + \theta_2^0 + 2\theta_2^0 \tilde{R}_0}{2(1 + \tilde{R}_0)}}{(1 - \Omega/\Omega_{cr})(1 + c_p)}, \quad J = \frac{\tilde{E} \tilde{\alpha} (1 - 2\nu) T_*}{(1 - \nu) P_*}, \quad (11)$$

$$\theta_{st}(x_1) = \theta_{st}(0) + x_1 (\theta_2^0 - \theta_{st}(0)), \quad \theta_{st}(0) = \frac{\theta_1^0 + \theta_2^0 \tilde{R}_0 + \Omega p_{st} \tilde{R}_0}{1 + \tilde{R}_0}, \quad (12)$$

$$\Omega_{cr} = \frac{2(1 + 1/\tilde{R}_0)(1 + 1/c_p)}{J}, \quad c_p = \frac{CL}{P_*}, \quad \tilde{R}_0 = \tilde{R}(p_{st}) = \tilde{R}(P_* p_{st}). \quad (13)$$

Введено такі безрозмірні величини:

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad x_n = \frac{X_n}{L}, \quad u_n = \frac{U_n}{L}, \quad \theta = \frac{T}{T_*}, \quad \theta_n^w = \frac{T_n^w}{T_*}, \quad \theta_n^0 = \frac{T_n^0}{T_*}, \quad \sigma_{nm} = \frac{\sigma_{nm}}{P_*},$$

$$p = \frac{P}{P_*}, \quad p_0 = \frac{P_0}{P_*}, \quad p_1 = \frac{P_1}{P_*}, \quad \Omega = \frac{P_* R_* f V}{T_*}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{R_*}, \quad \tilde{R}(p) = \tilde{R}(P_* p), \quad n, m = 1, 2$$

і характерні параметри

$$\tilde{E} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha(1 + \nu)}{1 - \nu}, \quad t_* = \frac{L^2}{k}, \quad R_* = \frac{L}{K}, \quad P_* = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

Показано, що умовою виникнення фрикційної термопружної нестійкості у випадку однорідного збурення ($\xi = 0$) є нерівність $\Omega > \Omega_{cr}$.

У випадку дії неоднорідного навантаження проведено аналіз поведінки збурень стаціонарних розв'язків. Розглянуто навантаження $h_m(x_2, \tau) = 1 + h_m^*(x_2, \tau)$. Розв'язок шукали у вигляді

$$\theta(x_1, x_2, \tau) = \theta_{st}(x_1) + \theta^*(x_1, x_2, \tau), \quad p(x_2, \tau) = p_{st} + p^*(x_2, \tau),$$

$$u_n(x_1, x_2, \tau) = u_n^{st}(x_1) + u_n^*(x_1, x_2, \tau), \quad \sigma_{12}(x_1, x_2, \tau) = \sigma_{12}^*(x_1, x_2, \tau)$$

де $|h_n^*| \ll 1$, $|\theta^*| \ll 1$, $|u_n^*| \ll 1$, $|\sigma_{nm}^*| \ll 1$.

Характеристичне рівняння лінеризованої задачі отримано у вигляді

$$\Delta(\xi, s) = \tilde{R}_0 + D_1(\xi, s)Q_1 + D_2(\xi, s) = 0, \quad (14)$$

де

$$Q_1 = J \left[\Omega \tilde{R}_0 \left(1 + \frac{p_{st}}{1 + \tilde{R}_0} \frac{\tilde{R}'_0}{\tilde{R}_0} \right) + (\theta_2^0 - \theta_1^0) \frac{\tilde{R}'_0}{1 + \tilde{R}_0} \right], \quad \tilde{R}'_0 = \left. \frac{d\tilde{R}(p)}{dp} \right|_{p=p_{st}}$$

$$D_1(\xi, s) = \{ \xi^2 (Th - Si \quad (Si \quad Ch + 1) / (Ch \quad F)) - 2c_p Si (Co \quad Ch - 1) / (Ch \quad F) \} / s,$$

$$D_2(\xi, s) = Th, \quad Ch = chS, \quad Co = ch\xi, \quad F = 1 + Co \quad Si + 2c_p Si^2,$$

$$Th = S^{-1}thS, \quad Sh = S^{-1}shS, \quad S = \sqrt{\xi^2 + s}, \quad Si = \xi^{-1}sh\xi.$$

Для критичних значень параметрів задачі з умови, що корені рівняння з найбільшою дійсною частиною є на уявній осі, отримано, використовуючи параметричні залежності $\omega \in (0, \infty)$,

$$Q_1 = -\frac{\text{Im } D_2(\xi, i\omega)}{\text{Im } D_1(\xi, i\omega)}, \quad \tilde{R}_0 = \text{Re } D_1(\xi, i\omega) \frac{\text{Im } D_2(\xi, i\omega)}{\text{Im } D_2(\xi, i\omega)} - \text{Re } D_2(\xi, i\omega), \quad (15)$$

а з умови, що корінь є нульовим, одержимо співвідношення

$$\frac{Q_1}{1 + \tilde{R}_0} = \frac{2(Si - Co)F}{Si \quad F - Si - Co} \left(\frac{1}{1 + \tilde{R}_0} \right) + \frac{2Co \quad F}{Si \quad F - Si - Co}. \quad (16)$$

Залежність критичного значення $Q_1/(1 + \tilde{R}_0)$ від параметра $1/(1 + \tilde{R}_0)$ показана на рис. 2 для різних значень безрозмірних параметрів ξ і c_p . Суцільні прямі відповідають безрозмірній жорсткості $c_p = 0,1$, штрихові прямі – $c_p = 1$, пунктирно штрихові прямі – $c_p = 5$. Прямий 1 відповідає випадкове $\xi = 0,1$, прямі 2 – $\xi = 1$, прямі 3 – $\xi = 5$.

Отже, числові результати засвідчили, що (а) критичні значення визначаються тільки умовою (16), (б) для значень параметрів моделі, яким відповідають точки наведених на рис. 2 кривих, відбувається фрикційна термопружна нестійкість. Збільшення параметра ξ (зменшення довжини збурення $\lambda = 2\pi/\xi$) для малої жорсткості пружин призводить до зменшення критичного значення параметра $Q_1/(1 + \tilde{R}_0)$ (наприклад до зменшення швидкості ковзання V). Для великої жорсткості пружин картина змінюється.

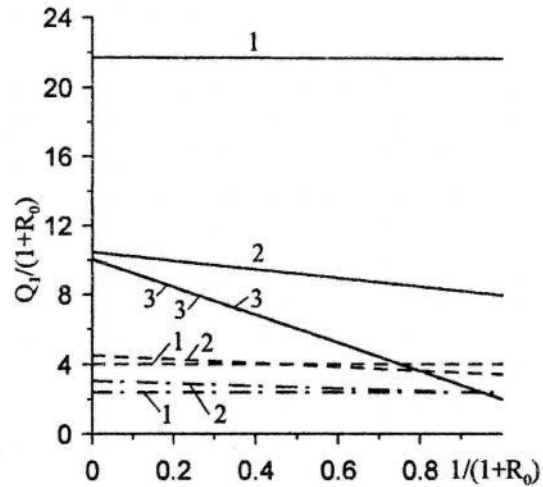


Рис. 2

1. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. – 1990. – Т. 11. – № 1. – С. 24–28.

2. Пырьев Ю.А. Динамическая модель термоупругого контакта в условиях фрикционного нагрева и ограниченности теплового расширения // Трение и износ. – 1994. – Т. 15. – № 6. – С. 941–948.
3. Пырьев Ю.А., Грилицкий Д.В., Мокрик Р.И. Нестационарное температурное поле и термоупругое состояние двухслойного полого цилиндра при фрикционном контакте // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31. – №1. – С. 44–50.
4. Пырьев Ю. А., Грилицкий Д. В. Нестационарная задача фрикционного контакта для цилиндра с учетом тепловыделения и износа // Прикл. матем. и техн. физика. – 1996. – Т. 37. – № 6. – С. 99–104.
5. Пырьев Ю.А., Мандзик Ю.И. Анализ устойчивости термоупругого контакта в трибосистеме типа радиальных уплотнений цилиндра // Трение и износ. – 1996. – Т. 17. – № 5. – С. 621–628.
6. Пир'єв Ю.О. Деякі проблеми термопружної нестійкості в рухомих трибосистемах // Машинознавство. – 1999. – № 9 (27). – С. 15–19.
7. Barber J.R. Thermoelasticity and contact // J. Thermal Stresses. – 1999. – Vol. 22. – P. 513–525.

FRICIONAL THERMOELASTIC INSTABILITY IN CONTACT PROBLEM

Yurij Pyryev

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

A friction pair model consisted of a moving body and a seal pressed by springs is analysed. Interaction of non-stationary heat generation with thermoelastic instability, when one of the contacting bodies is moving, is studied in more detail.

Key words: contact problem, friction, thermoelastic instability.

Стаття надійшла до редколегії 25.08.2005
Прийнята до друку 22.11.2006