ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип. 65. С.232-240

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Mat. 2006. Vol.65. P.232-240

УДК 539.3

ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОМЕНТІВ

Віктор РЕВЕНКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, 79053 Львів, Україна*

Виділено зовнішнє однорідне несамозрівноважене навантаження, для якого записано функцію напружень. Самозрівноважений напружений стан, який залишився, подано у вигляді ряду за спеціально побудованими сен-венанівськими функціями. Коефіцієнти ряду знаходять із умови мінімуму інтеграла квадрата відхилення розв'язку від заданих граничних умов на сторонах пластини. Розв'язано бігармонічне рівняння і знайдено напружений стан прямокутної пластини. Пояснено принцип Сен-Венана.

Ключові слова: однорідне навантаження, бігармонійне рівняння, принцип Сен-Венана.

Плоска статична задача теорії пружності для тонкої прямокутної пластини сталої товщини h, яка займає в плані прямокутну область $D = \{(x,y) \in [0,a] \times [-b,b]\}$ у випадку ізотропного матеріалу за відсутності масових сил, зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння

$$\nabla^2\nabla^2\Phi(x,y) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

де $\Phi(x,y)$ – функція напружень [1–3]. На контурі L прямокутника D задані граничні умови в напруженнях

$$\sigma_n(x,y)\big|_L = \sigma_L\big|_L, \quad \tau_n(x,y)\big|_L = \tau_L\big|_L, \tag{2}$$

де зовнішні нормальні та дотичні навантаження σ_L, τ_L є кусково-неперервними функціями та інтегрованими в квадраті на контурі прямокутника L. Проблема знаходження напружено-деформованого стану (НДС) прямокутної пластини відома з середини XIX ст., проте вона й досі залишається науково і практично важливою та актуальною задачею [2-6]. В [4] наведено огляд літератури. В праці [6] побудовано систему ортогональних функцій, яка дає підстави задовольнити граничні умови на краях пластини, для деяких часткових навантажень. В [2, 3] зазначено, що основним математичним підходом при дослідженні цієї проблеми є метод розділення змінних. Застосовуючи цей метод, широко використовують два підходи, які ґрунтуються на ідеях Г. Ламе та пов'язані з ідеями задачі Штурма-Ліувілля.

В статті детальніше розвинуто другий підхід [див. 5]. Запропоновано розділення зовнішнього навантаження на основну (несамозрівноважену) та "збурену" (самозрівноважену) частини. Для несамозрівноваженого щодо однієї сторони пластини зовнішнього навантаження знайдено функцію напружень у вигляді полінома. Напружений стан від самозрівноваженого навантаження внаслідок симетрії задачі розділено на дві частини і подано у вигляді ряду за спеціально побудованими сен-венанівськими функціями.

Знаходження розв'язку методом розділення змінних. Нормальні та дотичні напруження виразимо [1] у вигляді

$$\sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(x,y)\,,\ \sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x,y)\,,\ \tau_{xy} = \tau = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Phi(x,y)\,. \qquad (3)$$

Позначимо вершини прямокутника римськими цифрами проти годинникової стрілки, починаючи із вершини (a,b). Сторони між першою і четвертою, другою і першою вершиною позначимо арабськими цифрами 1, 2, 3, 4.

Розподілені нормальні та дотичні навантаження σ_L, τ_L створюють на сторонах пластини відповідні нормальні T_j та дотичні Q_j зусилля і моменти M_j, $j=\overline{1,4}$, які задовольняють рівняння рівноваги. Пошук бігармонічної функції напружень $\Phi(x,y)$, що задовольняє граничні умови (2), зведемо до послідовності таких задач. Для визначеності приймемо, що дотичні напруження в кутових точках дорівнюють нулю. Довільні зовнішні навантаження, які діють по сторонах 1, 3 внаслідок симетрії, можна розділити на два стани: а) парні стосовно змінної y нормальні напруження, непарні – дотичні напруження; б) навпаки непарні – нормальні, парні – дотичні напруження. Надалі розглядатимемо випадок а), де на підставі симетрії виконується $Q_1 = Q_3 = 0$, $M_1 = M_3 = 0$. Вісім силових факторів, які залишилися зв'язані трьома рівняннями рівноваги. Поліноміальна функція напружень, яка створює ці силові фактори, виглядає

$$\Phi_0(x,y) = \frac{T_4}{2ha}x^2 + \frac{T_3}{4hb}y^2 + \frac{T_1 - T_3}{4ha^3b}[y^2(3ax^2 - 2x^3) + 2b^2(x-\frac{a}{2})^3] +$$

$$+\frac{2M_4}{ha^3}(x-\frac{a}{2})^3 + \frac{M_2 - M_4}{ha^3b}[(x-\frac{a}{2})^2 - \frac{3}{4}a^2](x-\frac{a}{2})(y+b). \qquad (4)$$

Безпосереднім обчисленням перевіряється, що $\Phi_0(x,y)$ задовольняє бігармонічне рівняння і створює задані узагальнені силові зусилля по сторонах пластини. Якщо підставити функцію (4) в вирази напружень (3), то знайдемо розподілені на контурі прямокутної пластини зусилля, які відповідають основному напруженому стану. Після виділення цих зусиль із граничних умов (2) залишиться самозрівноважене або "збурене" щодо кожної сторони пластини зовнішнє навантаження. Це зовнішнє навантаження розглянемо як суму двох частин А і Б

А) на горизонтальних сторонах $y = \pm b$ прямокутної пластини немає зовнішніх навантажень

$$\sigma_y(x, \pm b) = 0, \quad \tau(x, \pm b) = 0, \quad x \in [0, a], \qquad (5)$$

а на бокових сторонах $x = 0$, $x = a$ діють граничні навантаження (2);

Б) навпаки, на бокових сторонах прямокутної пластини немає зовнішніх навантажень, на горизонтальних сторонах діють граничні навантаження (2). Враховуючи ідентичність задач А і Б, надалі шукатимемо розв'язок самозрівноваженої задачі А. Зовнішні навантаження в цій задачі також поділимо на дві частини: 1) НДС від самозрівноважених зусиль, прикладених на лівій стороні

$$\sigma_x(0, y) = \sigma_1(y), \quad \tau(0, y) = \tau_1(y), \ \sigma_x(a, y) = 0, \quad \tau(a, y) = 0; \quad (6)$$

2) НДС від самозрівноважених зусиль, прикладених на правій стороні пластини

$$\sigma_x(a, y) = \sigma_2(y), \quad \tau(a, y) = \tau_2(y), \ \sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau(0, y) = 0, \quad (7)$$

де $\sigma_1(y), \ \tau_1(y) \in L_2[-b, b]$ (відповідно $\sigma_2(y), \ \tau_2(y) \in L_2[-b, b]$) відомі зовнішні навантаження, які задовольняють коректні фізичні умови

$$\int_{-b}^{b} \sigma_j(y) dy = 0, \ \int_{-b}^{b} \tau_j(y) dy = 0, \ \tau_j(\pm b) = 0, \ \left|\sigma_j(y)\right| < \infty, \ \left|\tau_j(y)\right| < \infty. \quad (8)$$

Згідно з експериментом і відповідно до принципу Сен-Венана "збурений" напружений стан швидко загасає при віддалені від самозрівноважено навантаженої сторони пластини, отже, щоб його описати, треба використовувати функції напружень, які швидко загасають.

Означення 1. Називатимемо бігармонічну функцію напружень сен-венанівською, якщо виражені через неї нормальні та дотичні напруження створюють на кожній стороні прямокутника нульові інтегральні нормальну T_n і зсувну Q_n сили, та нульовий згинний момент M_n, вона загасає при віддалені від однієї "базової" сторони прямокутника. Переформулюємо принцип Сен-Венана: "Збурений" напружений стан пластини описується сен-венанівськими функціями.

Означення 2. Якщо функція напружень задовольняє нульові граничні умови (5), то її будемо називати власною функцією крайової задачі в напруженнях.

Спочатку припустимо, що пластина за змінною x достатньо "довга", тобто така, що зовнішні "збурені" зусилля, прикладені до сторони пластини $(x = 0)$, практично не спричиняють появи "збуреного" НДС біля протилежної сторони. В цьому випадку виконується $a >> b$. Бігармонічна функція, яка задовольняє крайові умови (5), має подання

$$\Phi(x,\beta y) = \mathrm{Re}\{[b\cos(\beta y) + a\sin(\beta y) + y(g\cos(\beta y) + c\sin(\beta y))]\exp(-\beta x)\}, \quad (9)$$

де $\mathrm{Re}\beta > 0$, a, g, c, b, – невідомі комплексні коефіцієнти, а власні безрозмірні спектральні значення $z = b\beta$ знаходять як нулі трансцендентної функції [5, 9]

$$F(z) \equiv \sin(2z) + 2z, \quad (10)$$

де $z = b\beta$.

Теорема 1. Функція $F(z)$ має зліченну кількість нулів $z_k = b\beta_k$ $k = 0,1,2,\ldots$.

Доведення. Використовуючи означення порядку функції [див. 10], можна показати, що функція $F(z)$ є цілою функцією порядку 1. Приймемо $z = \sqrt{\zeta}$. Функція $F(\sqrt{\zeta})/\sqrt{\zeta}$ стосовно комплексної змінної ζ є функцією порядку $\frac{1}{2}$. З теореми 5 [10, с. 268] випливає доведення.

Всі корені рівняння (10) (крім $z_0 = 0$) – комплексно-спряжені. Наведемо асимптотичні значення коренів рівняння (1)

$$\mathrm{Re}\, z_k \approx \frac{A_k}{4} - \frac{\ln A_k}{A_k} + O\left(\frac{\ln A_k}{A_k}\right)^2, \quad \mathrm{Im}\, z_k \approx \frac{\ln A_k}{2} + \frac{\ln^2 A_k}{A_k^2} - 2\frac{\ln A_k}{A_k^2}, \quad k \to \infty. \quad (11)$$

Тут $A_k = \pi(4k-1)$.

Розмістимо корені z_k, а отже, і β_k в порядку зростання їхніх дійсних частин. Введемо безрозмірну змінну γ, $y = b\gamma$. Після підстановки функції напружень (9) у граничні умови (5) і використання рівняння (10), знайдемо явний вигляд власних функцій

$$\Phi_k(x, z_k\gamma) = \mathrm{Re}\{bg_k\varphi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\}, \quad (12)$$

де $\varphi_k(\gamma) = \gamma\sin(z_k\gamma) - tg(z_k)\cos(z_k\gamma)$; g_k – довільний комплексний коефіцієнт.

Підставимо власні функції (12) в напруження (3) й одержимо

$$\sigma_y(x,\gamma) = \mathrm{Re}\{bg_k\beta_k^2\varphi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\}, \quad \sigma_x(x,\gamma) = \mathrm{Re}\{bg_k\beta_k^2\chi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\},$$

$$\tau(x,\gamma) = \mathrm{Re}\{bg_k\beta_k^2\psi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\}. \quad (13)$$

Тут

$$\chi_k(\gamma) = [\frac{1}{z_k} - ctg(z_k)]\cos(z_k\gamma) - \gamma\sin(z_k\gamma),$$

$$\psi_k(\gamma) = \gamma\cos(z_k\gamma) - ctg(z_k)\sin(z_k\gamma).$$

Легко перевірити такі залежності $\psi_k'(\gamma) = z_k\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(1) = \psi_k(-1) = 0$.

Теорема 2. Кожна власна функція напружень (12) є сен-венанівською.

Доведення. Теорему доведемо безпосереднім обчисленням. Врахувавши значення $\sigma_x(x,\gamma)$ (13), знайдемо інтегральне зусилля T_x, яке діє в довільному перерізі, паралельному боковій стороні пластини

$$T_x = hb\int_{-1}^{1}\sigma_x(x,\gamma)d\gamma = hb\,\mathrm{Re}\{g_k\beta_k[\psi_k(1)-\psi_k(-1)]\exp(-\beta_k x)\} = 0.$$

Внаслідок парності напружень $\sigma_x(x,\gamma)$ одержимо $M_x = 0$, а внаслідок непарності дотичних напружень $\tau(x,\gamma)$ одержимо $Q_x = 0$. Отже, на вертикальних сторонах пластини умови виконуються. На горизонтальних сторонах сен-венанівська умова виконується внаслідок умов (5). Власні функції експоненціально загасають при віддалені від вертикальної сторони прямокутника. Теорему доведено.

Теорема 3. Система функцій $\{1,\ \chi_k(\gamma),\ \psi_k(\gamma)\}$, $k = 1,2,\ldots$ є повною в комплексному крузі $\left|\gamma\right| \le 1$ в класі аналітичних функцій.

Доведення. Оскільки $\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(\gamma)$ – цілі функції порядку $\rho = 1$, а для послідовності нулів $z_k = b\beta_k$ згідно з [4] виконується умова

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\|z_k\|} \le e,$$

і, крім того, $\mathrm{Re}\,z_1 < \pi$, то доведення теореми 3 випливає з твердження теореми 18 [11, с. 283].

Розрахунок НДС "довгої" пластини (задача "розтягу-стиску"). Наведемо перші 6 коренів рівняння (8) [3]

$$z_1 = 2{,}106196 + 1{,}125364i,\ z_2 = 5{,}356268 + 1{,}551574i,$$

$$z_3 = 8{,}536668 + 1{,}775543i,\ z_4 = 11{,}69918 + 1{,}929404i,$$

$$z_5 = 14{,}85406 + 2{,}046851i,\ z_6 = 18{,}00493 + 2{,}141890i,$$

де i – уявна одиниця. Для знаходження коренів k>6 можна використати асимптотичну формулу (9).

Функція напружень для знаходження "збуреного" НДС має вигляд

$$\Phi(x,\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\{bg_k\varphi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\}. \tag{14}$$

Невідомий комплексний коефіцієнт g_k має дві незалежні невідомі – дійсну й уявну частину, що дає змогу задовольнити одночасно дві граничні умови. Врахувавши числові значення коренів z_k, бачимо, що функція напружень (14) швидко спадає при зростанні змінної x, відповідно спадає і НДС, який вона описує. Чим більший номер власної функції, тим скоріше вона спадає при віддаленні від лівої вертикальної сторони пластини. Наприклад, функція Φ_1 зменшується більше ніж у 100 разів на відстані $x \geq 2{,}2b$, а Φ_2 – $x \geq 0{,}85\,b$. Отже, при $a > 2{,}2b$ пластину можна розглядати як "довгу". Таке швидке спадання НДС пояснює принцип Сен-Венана.

Використавши співвідношення (13), (14), подамо перші дві граничні умови (6) у вигляді

$$\sigma_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{(x_k + iy_k)\chi_k(\gamma)\},\ \tau_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{(x_k + iy_k)\psi_k(\gamma)\}, \quad (15)$$

де $x_k + iy_k = c_k = \dfrac{z_k^2 g_k}{b}$; x_k, y_k – дійсна й уявна частини комплексного коефіцієнта c_k. Дві останні граничні умови (6) виконуються, оскільки пластина вважається "довгою".

Мінімізація інтеграла квадрата відхилення розв'язку від заданих граничних умов. Для знаходження невідомих коефіцієнтів g_k модифікуємо метод інтегральних моментів [7]. Обмежимося у співвідношеннях (15) скінченною кількістю N членів ряду. Оскільки окремі члени ряду (13) є розв'язками бігармонічного рівняння, то для знаходження невідомих коефіцієнтів достатньо використати умову мінімуму граничного відхилення знайденого розв'язку від зовнішніх навантажень (6) на границі пластини. Зазначимо, що граничні умови на горизонтальних сторонах пластини задовольняються тотожно. Мірою наближення обрізаного розв'язку до точного є інтеграл квадратичного відхилення обрізаних напружень (15) від заданих зовнішніх навантажень (6) на бокових сторонах

$$\Phi\{x_1,\ldots x_N, y_1,\ldots y_N\} = \int_0^1 \{\{\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Re}\left[x_k\chi_{rk}(\gamma) - y_k\chi_{yk}(\gamma)\right] - \sigma_1(b\gamma)\}^2 +$$

$$+\{\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Re}\left[x_k\psi_{rk}(\gamma) - y_k\psi_{yk}(\gamma)\right] - \tau_1(b\gamma)\}^2\}d\gamma. \quad (16)$$

Тут $\chi_{rk}(\gamma)$, $\psi_{rk}(\gamma)$ і $\chi_{yk}(\gamma)$, $\psi_{yk}(\gamma)$ відповідно дійсна й уявна частини функцій $\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(\gamma)$. Невідомі коефіцієнти x_k і y_k $k = \overline{1,N}$ визначимо з умови мінімуму функціонала (16). Для цього знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial\Phi\{x_1,..,x_N,y_1,..,y_N\}}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial\Phi\{x_1,..,x_N,y_1,..,y_N\}}{\partial y_j}$, $j = \overline{1,N}$ і прирівняємо їх до нуля. Після громіздких обчислень інтегралів одержимо систему $2N$ лінійних рівнянь для визначення $2N$ невідомих x_k, y_k

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{x_k B_{k,j}^1 - y_k B_{k,j}^2\right\} = \int_0^1\left[\sigma_1(\gamma)\chi_{rj}(\gamma) + \tau_1(\gamma)\psi_{rj}(\gamma)\right]d\gamma\,,\ j = \overline{1,N}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{x_k B_{k,j}^3 - y_k B_{k,j}^4\right\} = \int_0^1\left[\sigma_1(\gamma)\chi_{yj}(\gamma) + \tau_1(\gamma)\psi_{yj}(\gamma)\right]d\gamma\,,\ j = \overline{1,N}\,, \quad (17)$$

де

$$B_{k,j}^1 = \operatorname{Re}\left(N_{k,j}\right),\ B_{k,j}^2 = \operatorname{Im}\left(N_{k,j}\right),\ N_{k,j} = P_1(k,j) + Q_1(k,j),\ B_{k,j}^3 = B_{j,k}^2\,,$$

$$B_{k,j}^4 = \operatorname{Re}\left(A_{k,j}\right),\ A_{k,j} = P_2(k,j) + Q_2(k,j),\ 2P_m(k,j) =$$

$$= D\left(z_k,\overline{z}_j\right) - (-1)^m D\left(z_k,z_j\right),\ 2Q_m(k,j) = M\left(z_k,\overline{z}_j\right) - (-1)^m M\left(z_k,z_j\right),\ m = 1,2\,.$$

Функції $M(z,w)$, $D(z,w)$ для значень аргументів $z \neq w$ знаходять за формулами

$$M(z,w) = m(z)m(w)F_{1,1}(z,w) - m(z)G(w,z) - m(w)G(z,w) + F_{0,3}(z,w)\,,$$

$$D(z,w) = n(z)n(w)F_{0,1}(z,w) - n(z)G(z,w) - n(w)G(w,z) + F_{1,3}(z,w)\,.$$

Тут

$$F_{0,1}(z,w) = W(z,w)[z\sin(z)\cos(w) - w\sin(w)\cos(z)],\ n(z) = \frac{1}{z} - ctg(z)\,,$$

$$G(z,w) = W(z,w)[z\sin(z)\sin(w) + w\cos(w)\cos(z)] +$$

$$+W^2(z,w)\left[\left(z^2 + w^2\right)\cos(z)\sin(w) - 2zw\cos(w)\sin(z)\right],\ W(z,w) = \frac{1}{z^2 - w^2}\,,$$

$$F_{0,3}(z,w) = F_{0,1}(z,w) + \frac{\cos(z+w)}{(z+w)^2} + \frac{\cos(z-w)}{(z-w)^2} - \frac{\sin(z+w)}{(z+w)^3} - \frac{\sin(z-w)}{(z-w)^3}\,,$$

$$F_{1,3}(z,w) = F_{1,1}(z,w) - \frac{\cos(z+w)}{(z+w)^2} + \frac{\cos(z-w)}{(z-w)^2} + \frac{\sin(z+w)}{(z+w)^3} - \frac{\sin(z-w)}{(z-w)^3}\,,$$

$$F_{1,1}(z,w) = W(z,w)[w\sin(z)\cos(w) - z\sin(w)\cos(z)],\ m(z) = ctg(z)\,.$$

Коефіцієнти $D\left(z_k,z_k\right)$, $M\left(z_k,z_k\right)$ відповідно дорівнюють

$$D\left(z_k,z_k\right) = \frac{3}{2}ctg^2\left(z_k\right) + \frac{7}{6},\ M\left(z_k,z_k\right) = -\frac{1}{3} - \frac{ctg\left(z_k\right)}{2z_k}\,.$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (16) чисельно і знайдемо дійсні коефіцієнти x_k, y_k, а отже, і комплексні коефіцієнти g_k, $k = 1,2,...N$. Далі за поданнями (1), (14) знайдемо НДС пластини.

Розрахунок "збуреного" НДС "короткої" $a \leq 2{,}2b$ пластини (задача "розтягу-стиску"). В цьому випадку зовнішні "збурені" зусилля, прикладені до вертикальної лівої сторони пластини, спричиняють появу "збуреного" НДС біля протилежної сторони. Функцію напружень, яка описує "збурений" НДС, зручно подати у вигляді

$$\Phi(x,\gamma) = b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{[g_k \exp(-\beta_k x) + q_k \exp(\beta_k (x-a))]\varphi_k(\gamma)\},$$

де g_k, q_k невідомі комплексні коефіцієнти. Розроблений в п. 2 метод дає змогу визначити НДС пластини в цьому випадку, але в зв'язку з обмеженим об'ємом статті необхідні розрахунки не наводимо.

1. Плоский НДС пластини поділяється на два напружені стани: основний, який описується поліноміальною функцією напружень; "збурений" – описується сен-венанівськими функціями. Для того щоб розділення граничних умов на дві частини було коректним, кожна з виділених частин повинна задовольняти інтегральні (умови рівноваги) та локальні (рівність дотичних напружень у кутових точках) умови.

2. Знайдено подання "збуреного" напруженого стану у вигляді ряду. Показано, що кожна компонента цього ряду – сен-венанівська. Запропонований алгоритм можна використати для розрахунку задачі згину прямокутної пластини.

3. Показано таке: якщо $a > 2{,}2b$, то таку пластину можна розглядати як "довгу", що суттєво спрощує розрахунок. Запропоновані в статті методики розрахунку можна розвинути і використати при розв'язуванні змішаних крайових задач теорії пружності.

---

1. *Тимошенко С.П., Гудъер Дж.* Теория упругости. – М., 1975.
2. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных розмеров. – К., 1978.
3. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности // Равновесие упругих тел канонической формы. – К., 1985. – Т. 3.
4. *Meleshko V.V.* Selected topics in history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – January 2003. – Vol. 56. – No 1. – P. 33–85.
5. *Прокопов В.К.* Однородные решения теории упругости и их приложение к теории тонких пластинок. – Труды II Всесоюз. съезда по

теорет. и прикл. механике. Механика твердого тела. – М., 1966. – С. 253–260.

6. *Вигак В.М., Токовий Ю.В.* Построение элементарных решений плоской задачи теории упруговти для прямоугольной области // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38. – № 7. – С. 79–87.
7. *Ревенко В.П.* Спектральна задача осесиметричної теорії пружності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 249–258.
8. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. – М., 1983.
9. *Космодамианский А.С., Шалдырван В.А.* Толстые многосвязные пластины. – К., 1978.
10. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Дальнейшее построение теории. – М., 1968. – Т. 2.
11. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М., 1956.

CONSTRUCTION OF SOLUTION TO PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FORRECTANGULAR PLATE BY INTEGRAL MOMENT METHOD

Viktor Revenko

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine

The external homogeneous nonself-balanced loading, for which the stress function is written, is derived. The self-balanced stress state is presented in the form of a series in the specially constructed St. Venant functions. The series coefficients are defined from the condition of integrals minimum of solution deviation quadratic from the given boundary conditions on the plate sides. A biharmonic equation is solved and the stress-strain state of rectangular plate is defined. The Saint-Venan principle is verified.

Key words: homogeneous loading, biharmonic equation, Saint-Venan principle.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.2005
Прийнята до друку 22.11.2006