

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНА НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО СКІНЧЕНОГО ЦИЛІНДРА, ЗЧЕПЛЕНОГО З ЖОРСТКОЮ ОСНОВОЮ

Наталія ВАЙСФЕЛЬД

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2, 65026 Одеса, Україна

Запропоновано чисельно-аналітичний розв'язок задачі про визначення пружного стану скінченного пружного циліндра, який перебуває під дією ударного навантаження. Розв'язання ґрунтується на використанні дискретизації рівнянь руху за часом і наступним застосуванням методу інтегральних перетворень. Одержану одомірну векторну крайову задачу розв'язують за допомогою побудови матричної функції Гріна.

Ключові слова: нестационарна задача, пружний циліндр, ударне навантаження, жорстка основа.

Розв'язок задачі про осесиметричні коливання пружного циліндра скінченої довжини вперше, мабуть, наведено у працях [2], [5]. Задачі дифракції хвиль на тілах, що обмежені круговими циліндричними поверхнями, були досліджені також у [3]. Задачі нестационарного деформування скінчених циліндрів розв'язували у [9], [10], де задачі шляхом застосування інтегрального перетворення Лапласа за часом були зведені до чисельного розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду. Щоб уникнути застосування перетворення Лапласа у [4], [7], запропоновано підходи, які ґрунтуються на дискретизації задачі за часом: у [7] запропоновано спеціальну формулу з використанням скінчених різниць по часу, в [4] – пропонується заміна другої похідної по часу різницевою формулою. В [4] задача про нестационарне осесиметричне деформування скінченного циліндра розв'язується у припущенні, що на циліндричній поверхні виконано умови першої основної задачі теорії пружності.

Формулювання задачі. Суцільний круговий скінчений циліндр $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq l$ в момент часу $t = 0$ піддається впливу нестационарного динамічного навантаження $P(r)H(t)$, де $P(r)$ – нормальне розподілене навантаження. Нижній торець циліндра зчеплений з абсолютно твердою підставою. На циліндричній поверхні виконано умови ковзного защемлення. Дві ненульові компоненти вектора зміщень $u = u_r(r, z, t)$, $w = u_z(r, z, t)$ задовольняють рівнянням руху

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\mu_* \partial z^2} - \frac{u(r, z, t)}{r^2} + \frac{\mu_0}{\mu_*} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial r \partial z} = \frac{1}{\mu_* c^2} \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w(r, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{\mu_* \partial^2 w(r, z, t)}{\partial z^2} + \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial t^2}$$

при крайових умовах

$$u(r, z, t) \Big|_{r=a} = 0, \quad \tau_{rz}(r, z, t) \Big|_{r=a} = 0 \quad (2)$$

$$u(r, z, t) \Big|_{z=0} = 0, \quad w(r, z, t) \Big|_{z=0} = 0 \quad (3)$$

$$\tau_{rz}(r, z, t) \Big|_{z=l} = 0, \quad \sigma(r, z, t) \Big|_{z=l} = -p(r)H(t) \quad (4)$$

$\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$, $\mu_* = 2(1 - \mu)\mu_0$, μ – коефіцієнт Пуассона. При нульових початкових умовах треба визначити хвильове поле усередині циліндра.

Побудова розв'язку задачі. Зробимо заміну других похідних, які входять у рівняння руху (1), згідно з формулою

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{f_j}{h^2} - \frac{2f_{j-1}}{h^2} + \frac{f_{j-2}}{h^2}, \quad j = \overline{2, N}, \quad f_j = f(r, z, jh), \quad (5)$$

де $h = \frac{T}{N}$ – крок, з яким розбивається часовий проміжок $[0, T]$, протягом якого досліджується хвильове поле усередині циліндра. Після цього застосуємо до отриманих дискретизованих рівнянь (1) інтегральне перетворення Ханкеля за змінною r за такою схемою. До першого рівняння з (1) застосуємо перетворення

$$u_\alpha(z, t) = \int_0^a r J_1(\alpha r) u(r, z, t) dr, \quad (6)$$

до другого – перетворення

$$w_\alpha(z, t) = \int_0^a r J_0(\alpha r) w(r, z, t) dr, \quad (7)$$

де параметр перетворення $\alpha = \alpha_i$ – корені трансцендентного рівняння

$$J_1(a\alpha_i) = 0. \quad (8)$$

Після використання інтегрального перетворення та різницевої формули (5) рівняння руху (1) набудуть вигляду

$$\frac{d^2 u_{\alpha_j}(z)}{dz^2} - \alpha_i^2 \mu_* u_{\alpha_j}(z) - \frac{u_{\alpha_j}(z)}{q^2} - \alpha_i \mu_0 \frac{dw_{\alpha_j}(z)}{dz} = \frac{1}{q^2} (u_{\alpha_{j-2}}(z) - 2u_{\alpha_{j-1}}(z)) \quad (9)$$

$$\frac{d^2 w_{\alpha_j}(z)}{dz^2} - \frac{\alpha_i^2}{\mu_*} w_{\alpha_j}(z) - \frac{w_{\alpha_j}(z)}{\mu_* q^2} - \frac{\alpha_i \mu_0}{\mu_*} \frac{dw_{\alpha_j}(z)}{dz} = \frac{1}{\mu_* q^2} (w_{\alpha_{j-2}}(z) - 2w_{\alpha_{j-1}}(z)),$$

$j = \overline{2, N}$, $q^2 = (ch)^2$, $u_{\alpha_0}(z) = w_{\alpha_0}(z) = 0$ за допомогою нульових початкових умов. Запишемо крайові умови (3), (4) у дискретизованій за часом формі та переформулюємо їх у термінах зсувів. Застосуємо до перших рівностей з (3), (4) інтегральне перетворення (6), до других – перетворення (7) та отримаємо крайові умови у просторі трансформант

$$u_{\alpha_j}(0) = 0, \quad w_{\alpha_j}(0) = 0 \quad (10)$$

$$\mu_0 \mu \alpha_i u_{\alpha_j}(l) + (1 - \mu) \frac{dw_{\alpha_j}(l)}{dz} = -p_\alpha - \alpha_i w_{\alpha_j}(l) + \frac{dw_{\alpha_j}(l)}{dz} = 0. \quad (11)$$

Щоб сформулювати у просторі трансформант векторну крайову задачу, розглядають вектор

$$y_{\alpha_j}(z) = \begin{pmatrix} u_{\alpha_j}(z) \\ w_{\alpha_j}(z) \end{pmatrix} \text{ і } F_{\alpha_j}(z) = \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} u_{\alpha_{j-2}}(z) - 2u_{\alpha_{j-1}}(z) \\ \mu_*^{-1} (w_{\alpha_{j-2}}(z) - 2w_{\alpha_{j-1}}(z)) \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\alpha_j}^0(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{\alpha_j}^1(z) = \begin{pmatrix} -p_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ і матриці } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_*^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \mu_*^2 + \frac{\mu_*}{\alpha_i^2 q^2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\alpha_i^2 q^2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} \mu_0 \mu \alpha_i & 0 \\ 0 & -\alpha_i \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & (1 - \mu) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо таку векторну крайову задачу у просторі трансформант:

$$\begin{cases} L[y_{\alpha_j}(z)] = F_{\alpha_j}(z), \\ U_i[y_{\alpha_j}(z)] = Y_{\alpha_j}^i, \quad i = 0, 1. \end{cases} \quad (12)$$

Для розв'язання отриманої векторної задачі (12) побудуємо матричну функцію Гріна за схемою, що наведена у [6]

$$G(z, \xi) = \Phi(z, \xi) - \sum_{i=0}^1 \Psi_i(z) U_i[\Phi(z, \xi)], \quad (13)$$

де фундаментальна матриця задачі побудована раніше у [4]. Базисна матрична система розв'язків повинна задовольняти матричну задачу

$$\begin{cases} L[\Psi_i(z)] = 0, \\ U_i[\Psi_j(z)] = \delta_{ij} I, \quad i = 0, 1, \end{cases} \quad (14)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. Як показано у [6], її отримаємо через побудову фундаментальної матричної системи розв'язків $Y_i(z)$, $i = 0, 1$

$$\Psi_i(z) = Y_0(z)A_i + Y_1(z)B_i, i = 0, 1. \quad (15)$$

Тут матриці $Y_i(z)$ визначені у [4], а невідомі матриці-константи визначають з крайових умов (12) за формулами

$$\begin{aligned} A_0 &= -U_1^{-1}[Y_0(z)]U_1[Y_1(z)]L_0^{-1}, B_0 = L_0^{-1} \\ A_1 &= -U_0^{-1}[Y_0(z)]U_0[Y_1(z)]L_1^{-1}, B_1 = L_1^{-1}, \\ L_1 &= -U_1[Y_0(z)]U_0^{-1}[Y_0(z)]U_0[Y_1(z)] + U_1[Y_1(z)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Побудувавши за формулою (13) матричну функцію Гріна, розв'язок векторної задачі одержимо за співвідношенням [6]

$$y_{\alpha j}(z) = \int_0^l G(z, \xi) F_{\alpha j}(\xi) d\xi + \Psi_{2j}(z) \gamma_{\alpha j}^2. \quad (17)$$

До елементів вектора (17) застосуємо відповідні обернені перетворення Ханкеля [8]

$$\begin{aligned} u_j(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} J_1(\alpha_i r) \left(\int_0^l G^{00}(z, \zeta) F_{\alpha j}^0(\zeta) + G^{01}(z, \xi) F_{\alpha j}^1(\xi) d\xi - \Psi_{2\alpha}^{00}(z) p_{\alpha} \right), \\ w_j(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} J_0(\alpha_i r) \left(\int_0^l G^{10}(z, \zeta) F_{\alpha j}^0(\zeta) + G^{11}(z, \xi) F_{\alpha j}^1(\xi) d\xi - \Psi_{2\alpha}^{10}(z) p_{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Отримана формула (18) є рекурентною, тобто для визначення величини осідання в j -й момент часу варто знати значення в $j-1$ і $j-2$ моменти часу. За рахунок початкових умов визначають значення зсувів і осідання в 0-й і 1-й моменти часу, починаючи з моменту часу $j = 2$ починається рекурентна процедура обчислення величини зміщень за формулою (18).

Сформульована задача (1)–(4) припускає побудову простішого розв'язку. Для цього припустимо, що $u(r, z, t) \equiv 0$, а зміщення $w(r, z, t) = w(z, t)$ не залежать від радіус-координати. При таких припущеннях задача розв'язується так:

$$\frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu_* c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, z \in [0; l], w(0, t) = 0 \frac{\partial w(l, t)}{\partial z} = \frac{P_c H(t)}{(1 - \mu) \mu_0}, \quad (19)$$

де P_c – осереднене навантаження $P_c = a^{-1} \int_0^a P(r) dr$, що відповідає форму-

люванню задачі, коли пружний циліндр замінюється стрижнем кругового перерізу, для якого виконується припущення плоских перерізів. Застосуємо до рівняння з (19) перетворення Лапласа за часом, врахувавши крайові умови, розв'язок в просторі трансформант набуде вигляду

$$w_s(z) = P_c sh \frac{sz}{c\sqrt{\mu_*}} \left(s^2 ch \frac{sl}{c\sqrt{\mu_*}} \mu_0 (1 - \mu) \right)^{-1}, \quad (20)$$

оригінал цього виразу обчислюють за таблицями [1].

Чисельні розрахунки. Проведено порівняння значень зміщень та напружень, отриманих за двома підходами: за допомогою матричної функції Гріна та за елементарним розв'язком. На рис. 1 показано значення величини $\sigma_r^*(r, z, t) = \sigma_r(r, z, t)/a$ залежно від безрозмірного часу $t^* = ct/a$ для сталюого циліндра, до верхнього торця якого прикладене

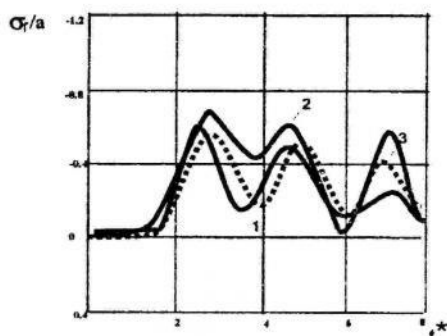


Рис. 1

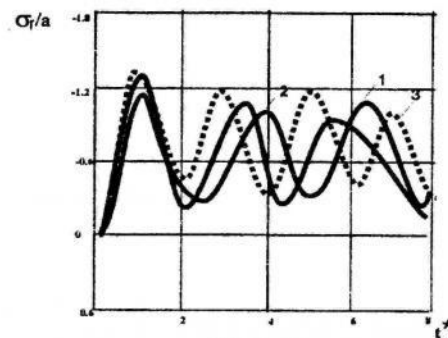


Рис. 2

навантаження $r^2 H(t)$. Крива 1 відповідає значенню $r = a/2$, крива 2 – $r = 3a/4$ для $z = l/3$, крива 3 отримана за елементарним розв'язком для $z = l/3$. Як видно з графіків, найбільша різниця результатів за двома підходами тим більша, чим ближче точка розташована до циліндричної поверхні. На рис. 2 криві 1, 2 відповідають значенням $r = a/2$ та $r = 3a/4$ відповідно при $z = 3l/4$, криву 3 – одержали за елементарним розв'язком. Помітно, що з наближенням до верхнього торця, де прикладене навантаження, різниця стає суттєвою також і для точок, які розташовані неподалік циліндричної поверхні. Формулювання задачі правильне, якщо значення напружень σ_r від'ємні, тобто напруження стискуючі вздовж циліндра. Розрахунок показав, що при невеликих значеннях часу, менше 8, це має місце; пізніше значення стають додатними.

1. Отриманий ефективний наближений розв'язок задачі про напружений стан скінченного циліндра під дією нестационарного осесиметричного навантаження.

2. Проведено порівняння чисельних розрахунків з результатами, одержаними за елементарним розв'язком, визначено, при яких параметрах циліндра ці два розв'язки збігаються та коли настає суттєве розходження результатів.

3. З'ясовано, при яких значеннях часу при такому формулюванні задачі може бути застосований запропонований підхід.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – М., 1969. – Т. 1.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акустический журнал. – 1978. – 6. – № 24. – С. 861–866.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко В.А. Дифракция упругих волн. – К., 1978.
4. Вайсфельд Н.Д. Определение волнового поля внутри полого упругого цилиндра под действием осесимметричной нестационарной нагрузки // Акустический журнал. – 2003. – 6. – № 3.
5. Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Динамика и прочность машин. – 1979. – Вып. 29. – С. 82–86.
6. Попов Г.Я., Абдымананов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы, 1999.
7. Саврук М., Матвісів О. Про розв'язування динамічних антиплоских задач механіки руйнування для тіл з тріщинами // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів. – 2003. – С. 252–254.
8. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М., 1955.
9. Янютин Е.Г., Дзюбак Л.П. Нестационарные деформационные процессы в многослойном цилиндре // Прикладная механика. – 1999. – 35. – № 8. – С.10–17.
10. Янютин Е.Г., Янчевский И.В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Х., 2001.

THE AXYSYMMETRICAL NON-STATIONARY PROBLEM FOR THE SOLID FINITE CYLINDER, ADHESIONED WITH THE RIGID BASIS

Nataliya Vaysfel'd

*Odessa National I. I. Mechnikov University,
Dvoryanskaya Str., 2, 65026 Odessa, Ukraine*

The numeric-analytical solution on the problem of the stress state estimation of the continuous finite elastic cylinder, which is under the influence of shock loading, is proposed. The solving is based on the movement equation discretization on time and the following application of the integral transforms method. The one-dimensional vector boundary problem is received. It is solved with the help of Green matrix function construction.

Key words: non-stationary problem, elastic cylinder, shock loading, rigid basis.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.2005
Прийнята до друку 22.11.2006