

УДК 539.3: 538.3: 536.21: 518.12: 517.96

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ ЗА УМОВ ЇХНЬОЇ ВИСОКОЧАСТОТНОЇ ТЕРМООБРОБКИ

Богдан ДРОБЕНКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, 79053 Львів, Україна*

Запропоновано методику чисельного моделювання електромагнітних, теплових і механічних процесів в електропровідних тілах, яка ґрунтується на методі скінченних елементів, за умов дії зовнішніх електромагнітних полів при врахуванні температурної залежності всіх характеристик матеріалу тіла і пружно-пластичного деформування.

Ключові слова: термомеханіка, зв'язані поля, метод скінченних елементів, індукційне нагрівання.

Електромагнітні поля (ЕМП) широко використовують у сучасних технологіях обробки електропровідних твердих тіл з метою підвищення параметрів їхньої міцності та надійності. Для побудови раціональних режимів такої обробки виникає практична потреба у створенні ефективних методик моделювання термомеханічних процесів в електропровідних тілах за умов дії зовнішніх ЕМП.

У більшості сучасних праць з математичного моделювання процесів високочастотної термообробки тіл опускається механічний фактор і розглядається лише зв'язана задача електродинаміки й теплопровідності, або наявні поля вважаються незв'язаними і задача термомеханіки розв'язується в пружному наближенні.

У працях [1-3] з використанням теорії неізотермічної термопружно-пластичності розроблена математична модель дослідження взаємодії процесів електропровідності, теплопровідності й деформування у термочутливих твердих тілах залежно від електропровідності їхнього матеріалу, здатності до намагнічування та поляризації. Показано, що неврахування залежності електро-, теплофізичних і механічних властивостей матеріалів від температури й пружно-пластичного характеру деформування таких тіл приводить до кількісних і якісних відмінностей в отриманих результатах. Мета нашої праці – запропонувати загальну методику чисельного розв'язування задач запропонованої математичної моделі.

Формулювання задачі. Розглянемо електропровідне деформівне тіло $V \in E^3$ (з неперервною за Ліпшицем межею S) під впливом ЕМП, яке

збуджує розподілена у скінченній підобласті зовнішнього середовища система струмів з густиною $\mathbf{j}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$, де \mathbf{r} радіус-вектор точки. Прийmemo, що електромагнітне й температурне поля при рівняннях стану

$$\mathbf{D}^{(0)} = \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(0)}, \quad \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}_*^{(1)}(\mathbf{E}^{(1)}, T), \quad \mathbf{B}^{(0)} = \mu_0 \mathbf{H}^{(0)}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}_*^{(1)}(\mathbf{H}^{(1)}, T),$$

$$\mathbf{j}^{(1)} = \gamma(T) \mathbf{E}^{(1)} \quad (1)$$

описуються такою системою рівнянь [2, 3]:

$$\operatorname{rot}(\mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)}) + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(0)}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{j}^{(0)}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\mathbf{H}^{(0)} = -\mu_0^{-1} \int_0^t \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)} dt', \quad \mathbf{r} \in E^3 \setminus \Omega; \quad (3)$$

$$\operatorname{rot}([\mu_*]^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)}) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{F}_q \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} + [\varepsilon_*] \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t^2} = \mathbf{F}_p; \quad (4)$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = -\int_0^t [\mu_*]^{-1} \left(\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{B}_*^{(1)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) dt'; \quad (5)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + Q, \quad \mathbf{r} \in V, \quad t \in [0, \tau_*], \quad (6)$$

де \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} – вектори напруженостей та індукцій електричного і магнітного полів; ε_0 , μ_0 – діелектрична та магнітна проникності вакууму;

$\gamma = \gamma(T)$ – коефіцієнт електропровідності тіла; $\mathbf{D}_*^{(1)}(\mathbf{E}^{(1)}, T)$, $\mathbf{B}_*^{(1)}(\mathbf{H}^{(1)}, T)$ – функції, які задають зв'язок між векторами індукцій та напруженостей відповідно електричного і магнітного полів в тілі; $c = c(T)$ – об'ємна теплоємність; $\vec{\nabla} = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3)$ – оператор Гамільтона; $\lambda = \lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; Q – наявні джерела тепла; величини з індексом $m=0$ належать до зовнішнього середовища, а з індексом $m=1$ – до області тіла;

$$[\varepsilon_*] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial D_{*i}^{(1)}}{\partial E_j^{(1)}};$$

$$[\mu_*] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}, \mu_{ij} = \frac{\partial B_{*i}^{(1)}}{\partial H_j^{(1)}}, i, j = 1 \div 3;$$

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{F}_q(\mathbf{E}^{(1)}, T) = \gamma \mathbf{I} + 2\mathbf{D}_{*ET} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{D}_{*EE} \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t}; \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_{*ET} = \left[\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right]; \mathbf{D}_{*EE} = \left[\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial E_j^{(1)}} \right];$$

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}, T) = -\frac{\partial^2 \mathbf{D}_*^{(1)}}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \mathbf{D}_*^{(1)}}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \text{rot} \left(\mu^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}_*^{(1)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right).$$

Прийемо, що в початковий момент часу ЕМП у тілі й середовищі немає, заданий початковий розподіл $T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r})$ температури в тілі, а на межі S розділу тіла й середовища виконуються умови [2]

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(0)}) = 0; \quad (7)$$

$$\mathbf{n} \times \left([\mu_*]^{-1} \text{rot} \mathbf{E}^{(1)} - \mu_0^{-1} \text{rot} \mathbf{E}^{(0)} \right) = 0; \quad (8)$$

$$\lambda(T) \vec{\nabla} T \mathbf{n} + \beta(T) (T - T_c) = 0, \quad (9)$$

де β – коефіцієнт тепловіддачі; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S ; T_c – температура середовища. На нескінченості виконується умова [9]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r |\mathbf{E}^{(0)}| = \text{const}. \quad (10)$$

Для опису пружно-пластичного стану тіла використаємо співвідношення неізотермічного термопружно-пластичного течіння [8] відповідно до яких процес деформування розглядається покроково.

Прирости напружень за крок навантаження задають у вигляді

$$d\sigma_{ij} = G_{ijkl}^{t+dt} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T - d\varepsilon_{kl}^p) + dG_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T - \varepsilon_{kl}^p). \quad (11)$$

Тут G_{ijkl}^{t+dt} , dG_{ijkl} – відповідно, значення компонент тензора пружних модулів у кінці кроку навантаження та їхніх приростів на цьому кроці; ε_{kl} , ε_{kl}^T , ε_{kl}^p – компоненти тензорів повних, температурних і пластичних деформацій на початку кроку.

Для визначення приростів пластичних деформацій використовуємо асоційований закон пластичного течіння про розвиток пластичних деформацій за нормаллю до поверхні течіння

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\chi \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (12)$$

а прирости температурних деформацій обчислюємо як

$$d\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij}(\alpha^{t+dt}dT + (\alpha^{t+dt} - \alpha^t)(T - T_0)), \quad (13)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера; α – коефіцієнт температурного розширення.

З урахуванням залежностей (11)–(13) співвідношення між приростами напружень і деформацій мають вигляд [8]

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} = & \left(G_{ijmn}^{t+dt} - \frac{G_{ijvw}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{vw}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{kl}} G_{klmn}^{t+dt}}{\frac{2}{3} H^t \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} + G_{pqrs}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{rs}}} \right) (d\varepsilon_{mn} - d\varepsilon_{mn}^T) + \\ & + \left(dG_{ijmn} - \frac{G_{ijvw}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{vw}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{kl}} dG_{klmn}}{\frac{2}{3} H^t \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} + G_{pqrs}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{rs}}} \right) \left(\varepsilon_{mn}^t - \varepsilon_{mn}^{p\ t} - \varepsilon_{mn}^{T\ t} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijmn}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \bar{\sigma}_i^t}{\partial T}}}{\frac{2}{3} H^t \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} + D_{pqrs}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{rs}}} dT, \end{aligned}$$

чи в матрично-векторній формі

$$\{d\sigma\} = [C]^{t+\Delta t} (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_T\}) + [dC](\{\varepsilon\}^t - \{\varepsilon_T\}^t - \{\varepsilon_p\}^t) + \{Z\}dT. \quad (14)$$

Тут функція Φ задає поверхню течіння залежно від нагромаджених пластичних деформацій і температури (за критерій виникнення пластичних деформацій вибрана умова Мізеса [1]); H^t – кут нахилу кривої “напруження σ_i – пластична деформація $\bar{\varepsilon}_i^p$ ”; компоненти тензорів деформацій і напружень об’єднані у вектори

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}^T; \{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T$$

(індекс “ T ” означає операцію транспонування).

Доповнимо (14) геометричними співвідношеннями, які приймемо лінійними

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{A}]\mathbf{u}, \quad (15)$$

та рівняннями рівноваги [11]

$$[\mathbf{A}]^T \{\sigma\} - \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{r} \in V \quad (16)$$

при відомих граничних умовах

$$[\mathbf{A}_n]^T \{\sigma\} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{r} \in S_\sigma; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{r} \in S_u; \quad S_\sigma \cap S_u = \emptyset; \quad S_\sigma \cup S_u = \partial V, \quad (17)$$

де \mathbf{F} , \mathbf{p} , \mathbf{u} – вектори пондеромоторних сил, силового навантаження, заданого на поверхні S_σ , і переміщень, заданих на поверхні S_u ; $[\mathbf{A}]$ і $[\mathbf{A}_n]$ – матриці геометричних співвідношень теорії пружності і напрямних косинусів до поверхні.

Отож, задача про визначення електромагнітного, температурного та механічного полів у тілі за умов дії зовнішнього ЕМП полягає у розв'язуванні зв'язаної задачі електродинаміки й теплопровідності (2)–(10) і задачі неізотермічної термопружно-пластичності (14)–(17).

Методика розв'язування задачі. Розв'язок сформульованої задачі знаходимо в два етапи. На першому розв'язуємо зв'язану задачу електродинаміки й теплопровідності (2)–(10).

Замінімо нескінчений простір деякою скінченною областю Ω ($V \subset \Omega$), яка обмежена достатньо віддаленою від тіла і заданих струмів поверхнею S' .

Розв'язки задач електродинаміки й теплопровідності шукаємо у просторах [4] $H(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{E} \in (L^2(\Omega))^3, \text{rot} \mathbf{E} \in (L^2(\Omega))^3\}$ та $H^1(V) = \{T \in L^2(V), \vec{\nabla} T \in L^2(V)\}$.

З використанням стандартної процедури методу зважених нев'язок вихідні співвідношення для чисельного розв'язування цієї задачі мають вигляд [2]

$$\int_{\Omega} \left(((\mu')^{-1} \text{rot} \mathbf{E}) \cdot (\text{rot} \mathbf{w}) + \left(\gamma_t \mathbf{E} + \mathbf{F}_q' \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon' \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mathbf{F}_p' \right) \mathbf{w} \right) dv = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in H(\text{rot}, \Omega), \quad (18)$$

$$\int_V \left(c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} w_0 - Q w_0 \right) dv + \int_S \beta (T - T_S) w_0 ds = 0 \quad \forall w_0 \in H^1(\Omega). \quad (19)$$

Вони доповнюються рівнянням (3) при граничних умовах (7), (10) (умови (8), (9) враховані при побудові співвідношень (18) і (19)). Тут

$$\mu' = [\mu_*]; \quad \varepsilon' = [\varepsilon_*]; \quad \gamma_t = \frac{\partial \gamma}{\partial t}; \quad \mathbf{F}'_q = \mathbf{F}_q; \quad \mathbf{F}'_p = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in V;$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)}; \quad \mu' = \mu_0; \quad \varepsilon' = \varepsilon_0; \quad \gamma_t = 0; \quad \mathbf{F}'_q = 0; \quad \mathbf{F}'_p = -\frac{\partial \mathbf{j}^{(0)}}{\partial t} \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \setminus V.$$

Проведемо стандартну скінченно-елементну дискретизацію [11] отриманих співвідношень за просторовими змінними. Поділимо область Ω на елементи так, щоб межа розділу тіла й середовища потрапила на границі відповідних елементів. Введемо на кожному елементі апроксимації функцій $T, \mathbf{E}, w_0, \mathbf{w}$ через значення цих функцій у вузлах елемента

$$T = [N]_1 \{T_h\}^{\text{el}}; \quad \mathbf{E} = [N]_3 \{E_h\}^{\text{el}}, \quad w_0 = [N]_1 \{w_h^0\}^{\text{el}}, \quad \mathbf{w} = [N]_3 \{w_h\}^{\text{el}}, \quad (20)$$

де

$$[N]_1 = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]; \quad [N]_3 = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & \dots & N'_n & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \dots & 0 & N'_n & 0 \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & \dots & 0 & 0 & N'_n \end{bmatrix}$$

матриці функцій форми [11]; n – кількість вузлів (загалом функції форми для задач теплопровідності й електродинаміки належать до різних функціональних просторів, тому можуть бути різними, як і кількість вузлів у відповідних елементах).

Після підстановки (20) у співвідношення (18), (19) і (3) отримуємо таку систему диференційних рівнянь стосовно невідомих значень напруженостей електричного $\{E_h\}$ поля та температури $\{T_h\}$ у вузлах скінченно-елементного поділу

$$[M_2] \{\ddot{E}_h(t)\} + [M_1] \{\dot{E}_h(t)\} + [M_0] \{E_h(t)\} = \{f_E\},$$

$$\{E_h(0)\} = 0, \quad \{\dot{E}_h(0)\} = 0; \quad (21)$$

$$[L_1] \{\dot{T}_h(t)\} + [L_0] \{T_h(t)\} = \{f_T\}, \quad \{T_h(0)\} = \{T_h^0\}. \quad (22)$$

Матрично-векторні характеристики у (21)–(22) одержуємо шляхом підсумовування відповідних характеристик окремих елементів.

Отриману задачу Коші (21), (22) розв'язуємо за допомогою сім'ї простих однокрокових багатопараметричних алгоритмів Зінкевича–Вуда [12].

Визначені на першому етапі температура та пондеромоторні сили є вхідними для розрахунку напруженого стану тіла. Відповідно до теорії течіння процес пластичного деформування тіла розглядається покрово. Вихідні скінченно-елементні співвідношення термопружно-пластичності в переміщеннях на черговому кроці навантаження одержуємо після підстановки геометричних (15) і фізичних (14) співвідношень у рівняння

рівноваги (16) та застосування стандартної процедури методу зважених нев'язок. З введенням скінченно-елементних апроксимацій для приростів переміщень, рівняння рівноваги в приростах переміщень набувають остаточного вигляду [1]

$$[\mathbf{K}_{ep}]\{dq\} = \{d\mathbf{F}\} + \{d\mathbf{P}\} + \{d\mathbf{R}\}, \quad (23)$$

де $\{dq\}$ – глобальний вектор приростів вузлових переміщень; матрично-векторні характеристики у співвідношенні (23) отримуємо через підсумовування відповідних характеристик окремих елементів, які визначають за формулами

$$[\mathbf{K}_{ep}^{(el)}] = \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{A}]^T [\mathbf{C}]^{t_j + \Delta t_j} [\mathbf{A}] [\mathbf{N}] dv; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \{d\mathbf{P}\}^{(el)} = & - \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{A}]^T \left([d\mathbf{C}] (\{\varepsilon\}^{t_j} - \{\varepsilon_T\}^{t_j} - \{\varepsilon_p\}^{t_j}) + \{z\} dT \right) dv + \\ & + \int_{S_e^{el}} [\mathbf{N}]^T \{dp\} ds; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\{d\mathbf{R}\}^{(el)} = \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{A}]^T [\mathbf{C}]^{t_j + \Delta t_j} \{d\varepsilon_T\} dv; \quad \{d\mathbf{F}\}^{(el)} = \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T \{d\mathbf{F}\} dv. \quad (26)$$

Рівняння (23) розв'язуємо методом змінних параметрів жорсткості [11].

Як приклад розглянемо індукційне нагрівання зубчастого колеса з метою гартування його поверхневого шару. Для отримання якісної оцінки ЕМП, температури і залишкових напружень в колесі задачу розв'яжемо для двомірного випадку (пружно-пластичний аналіз проведемо в рамках моделі плоского напруженого стану).

Тепловиділення і пондеромоторні сили визначають за формулами

$$\mathbf{Q} = \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{F} = \mu \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Вільне від силового навантаження колесо (рис. 1, а; з умов симетрії розглядається лише сектор, який охоплює половину зуба і впадини) нагрівається струмом

$$\mathbf{j}^{(0)}(x, y, t) = (0, 0, J_0 \cdot \delta(x - X_i) \cdot \delta(y - Y_i) \cdot (1 - e^{-\eta t}) \cdot \sin \omega t),$$

де (X_i, Y_i) – декартові координати провідників, по яких паралельно до осі z тече струм; $\delta(x)$ – дельта-функція; ω – частота; величина η характеризує швидкість виходу на усталений режим. На осі симетрії GF ставиться умова $u_x = 0$, а на лінії ВН – умова циклічної симетрії $u_{x'} = 0$ (x' – координата, перпендикулярна до ВН).

Коли температура біля основи зуба (у точці D , див. рис. 1, а) досягає температури T_g , струм вимикається, і колесо остигає через теплообмін із середовищем.

Зубчасте колесо виготовлене з феромагнітного матеріалу – конструкційної сталі С 30 з вмістом вуглецю 0,3%, характеристики якої відомі [5–7, 10].

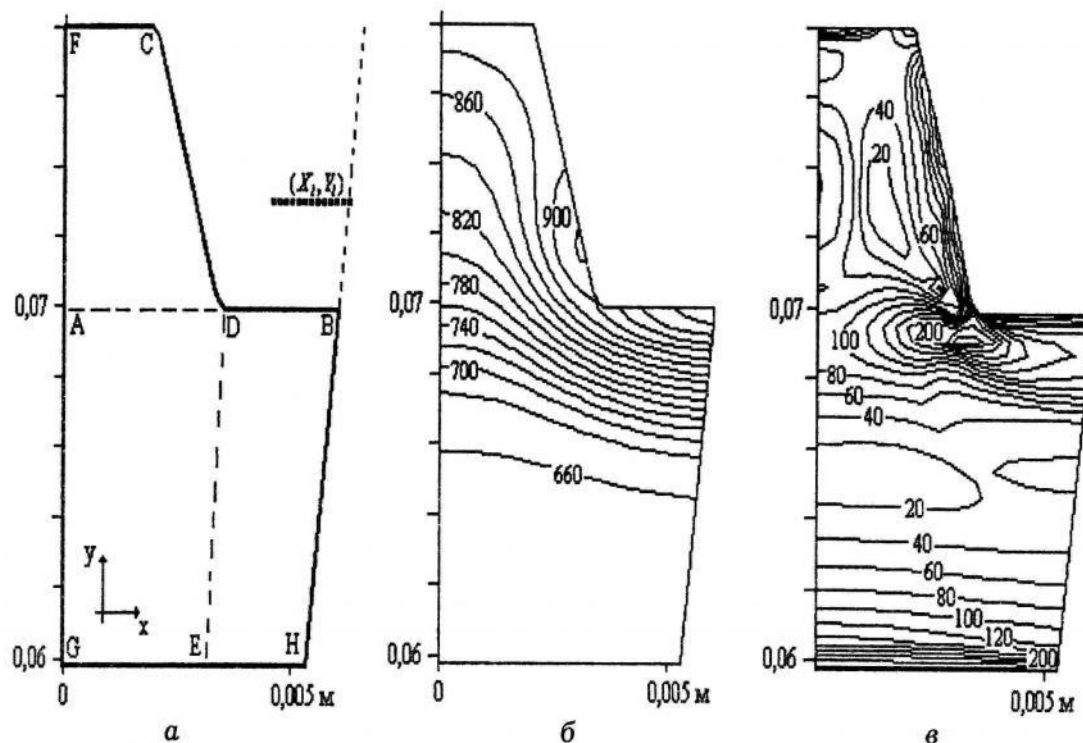


Рис. 1. Конфігурація області (а), розподіл температури (б) і залишкових напружень (в)

У процесі чисельного моделювання електромагнітних, теплових і механічних полів у колесі використовувались ізопараметричні біквдратичні скінченні елементи [11], оскільки в цьому випадку вектор напруженості електричного поля має лише одну ненульову складову E_φ , і розв'язок задачі електродинаміки шукається в класі функцій з простору $H^1(\Omega)$. Розрахунки проводили для параметрів $T_s = 20^\circ\text{C}$; $T_g = 900^\circ\text{C}$; $\beta = 13 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ град})$.

Чисельне моделювання допомогло визначити таке розташування індуктора (координати провідників, по яких тече струм) і відповідний режим термообробки, які забезпечують досить рівномірне прогрівання поверхні впадини колеса і робочої поверхні зуба (за рахунок сильного відведення тепла від впадини у масивну частину колеса в більшості випадків зуб прогрівався до набагато вищих температур).

На рис. 1, б показано розподіл температури в колесі в момент вимкнення індуктора, розташованого на відстані 0,0015 м від впадини (див. рис. 3, а). При цьому $T_0 = 650^\circ\text{C}$; $\omega = 440 \text{ кГц}$; $J_0 = 4 \text{ МА}$.

На рис. 1, в показано розподіл інтенсивності залишкових напружень після повного охолодження колеса шляхом теплообміну з зовнішнім середовищем з коефіцієнтом тепловіддачі $\beta = 10^4$ Вт/(м²град). В околі точки D виникає зона стискальних залишкових напружень, про величину яких можна судити з рис. 2.

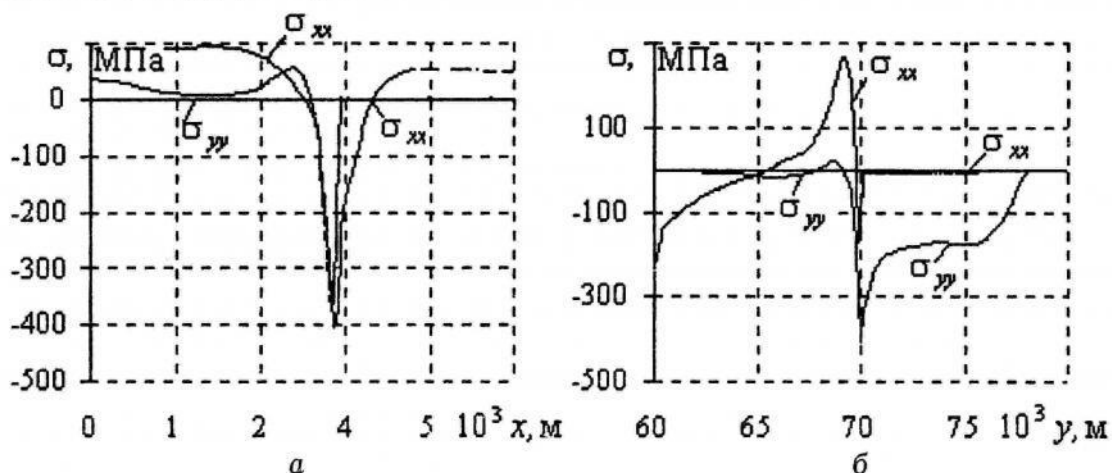


Рис. 2. Залишкові напруження на лініях ADB (а) та EDC (б)

Запропонована методика чисельного моделювання термомеханічних процесів в електропровідних тілах за умов дії зовнішніх ЕМП дає змогу адекватніше прогнозувати реальну поведінку матеріалів у широкому температурному діапазоні і враховувати її при автоматизації процесу високотемпературної індукційної обробки, зокрема допомагає отримати оцінку залишкових напружень, яка є вихідною при розробці режимів експлуатації виробів. Наявність створеного програмного забезпечення надає змогу промодельовати поведінку виробів з електропровідних матеріалів за умов їхньої високочастотної термообробки і визначити раціональні значення параметрів технологічних процесів виготовлення виробів.

1. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Фізико-механічні процеси у феромагнетних тілах під час індукційної обробки // Фізико-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 2. – С. 29–35.
2. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикладної математики та інформатики. – 2004.
3. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д., Казарян К.Б. Математичне моделювання термомеханічних процесів в осесиметричних електропровідних тілах за електромагнітних навантажень // Машинознавство. – 2003. – № 4. – С. 3–7.
4. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М., 1980.

5. Преображенский А.А. Магнитные материалы и элементы. – М., 1976.
6. Сосуды и трубопроводы высокого давления. Справочник / Под ред. Хисматулина Е.Р. – М., 1990.
7. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. акад. И.К. Кикоина. – М., 1976.
8. Allen D.H., Heisler W.E. A theory for analysis of thermoplastic materials // Computers & Structures. – 1981. – Vol. 13. – P. 129–135.
9. Gaczkiewicz A., Kasperski Z. Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termo-mechaniki ciał przewodzących – Opole: OW, Politechnika Opolska, 1999.
10. Turowski J. Elektrodynamika techniczna. Warszawa, 1993.
11. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Vol. 1. The Basis. – London: Butterworth Heinemann, 2000.
12. Zienkiewicz O.C., Wood W.L., Nine N.W. A unified set of single step algorithm. Part 1: general formulation and applications //International Journal for Numerical Method in Engineering. – 1984. – Vol. 20. – P. 1529–1552.

SIMULATION OF DEFORMATION PROCESS OF ELECTRICALLY CONDUCTIVE SOLIDS SUBJECTED TO ELECTROMAGNETIC FIELD

Bogdan Drobenko

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

The mathematical model and the computer simulation method of mechanical, temperature and electromagnetic processes which occur in electrically conductive solids subjected to the high temperature induction heating is proposed. The model takes into account a temperature dependence of all material coefficients. To predict stress-strain state of the solid a nonisothermal plasticity equations are used.

Key words: thermomechanics, coupled fields, finite element methods, high temperature induction heating.

Стаття надійшла до редколегії 27.09.2005
Прийнята до друку 22.11.2006