

УДК 539.375

УРАХУВАННЯ ВПЛИВУ ТЕРМІЧНОЇ ПРОВІДНОСТІ КОНТАКТУ В ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Володимир ОНИШКЕВИЧ

Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057 Львів, Україна

Розглянуто можливість врахування змінного термоопору на прикладі осесиметричної контактної задачі термопружності для циліндра та півпростору.

Ключові слова: термопружність, контактна задача, змінний термоопір.

Проблематика та її актуальність. Розмаїття чинників впливу на тепловий режим пари тертя зумовлює складність математичного моделювання цієї проблеми. Серед них важливе місце займають теплофізичні (теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт лінійного розширення тіл тощо), і механічні (пружність, твердість контактуючих тіл тощо) фактори. Режимми тертя, зношування та тепловиділення визначають також характеристиками так званого третього тіла [1] – тонких приповерхневих і проміжкових шарів, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей взаємодіючих тіл, та мікрогеометрією поверхонь тіл у зоні контакту. В [2] формулювання контактних задач з теплоутворенням сформульована при ідеальному тепловому контакті. Термопружну контактну взаємодію тіл за наявності поверхневих теплофізичних неоднорідностей досліджували в [3]. При математичному моделюванні контактної термопружності з урахуванням тертя і тепловиділення в [4] пропонували використати узагальнені умови теплового контакту [5]

$$\begin{aligned} \lambda \Delta (t^{(1)} + t^{(2)}) + 2 \left(\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} \right) &= c (t^{(1)} + t^{(2)}) - 2Q \\ \lambda \Delta (t^{(1)} - t^{(2)}) + 2 \left(\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} \right) - 12h (t^{(1)} - t^{(2)}) &= c (t^{(1)} - t^{(2)}), \end{aligned} \quad (1)$$

де індексами "1" і "2" в дужках позначено величини, які належать відповідно до першого та другого тіл; n – нормаль до поверхні контактуючих тіл; λ – зведена теплопровідність; Δ – двовимірний оператор Лапласа; c – зведена теплоємність; h^{-1} – термоопір контакту.

Числовий аналіз стаціонарної осесиметричної задачі про тиск на півпростір скінченного штампа, що обертається, проведено в [4], зокрема показав, що нехтування коефіцієнтом λ незначно впливає на розподіл

температурних полів у тілах пари тертя. Помітний вплив на результати виявляє термічна провідність контакту h . Отже, для практичних розрахунків можна рекомендувати такі теплофізичні умови на ділянці контакту:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} &= \frac{c}{2} (\dot{t}^{(1)} + \dot{t}^{(2)}) - Q \\ \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} - 2h(t^{(1)} - t^{(2)}) &= \frac{c}{6} (t^{(1)} - t^{(2)}). \end{aligned} \quad (2)$$

Середня температура $\bar{T} = (t^{(1)} + t^{(2)})/2$ в ділянці контакту тіл, отримана при розв'язуванні задачі в [4], мало відрізняється від температури $t^{(1)} = t^{(2)}$ при ідеальному тепловому контакті тіл. Незначні відхилення середньої температури простежувались також і в розв'язках інших задач. Згідно з результатами, наведеними в [6], для знаходження значення h , яке зв'язує тепловий потік і різницю температур контакту $q = h\Delta t$, треба знати середню температуру. Тому розв'язок задачі з граничними умовами (2) при $h \rightarrow \infty$ можна розглядати як перший етап для знаходження конкретного значення термоопору.

Мета і методи її вирішення. Фактори, від яких залежить термоопір h^{-1} , як і весь процес теплоутворення, численні та складні. Щоб розрахувати термічну провідність контакту, крім середньої температури, є потрібно такі характеристики [1]:

- 1) механічні характеристики матеріалів пари тертя;
- 2) коефіцієнти теплопровідності $\lambda^{(1)}$ і $\lambda^{(2)}$ матеріалів поверхонь тіл;
- 3) параметри середовища, яке є в проміжках між тілами;
- 4) чистота обробки (середньоквадратичне значення жорсткості) поверхонь $\Delta l = l_1 + l_2$;
- 5) номінальний тиск P між тілами на площинці контакту;
- 6) номінальна площа S контакту;
- 7) твердість за Мейєром μ м'якшого тіла;
- 8) середня температура \bar{T} контакту;
- 9) параметри середовища в проміжках між плямами фактичного контакту тіл;
- 10) випромінювальна здатність ε_1 і ε_2 поверхонь тіл;
- 11) середня довжина l_0 вільного пробігу молекул газу в щілинах при низьких тисках газу в проміжках.

Для зручності обчислення термічного опору пропонують [6] використовувати співвідношення

$$h = \lambda_T (U - 1)/l, \quad (3)$$

де U – корінь трансцендентного рівняння

$$U = 1 + \frac{B \cdot C}{K \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-1/U}}{C-1} \right)}, \quad (4)$$

а відповідні вхідні параметри B , C , K визначаються додатковими співвідношеннями.

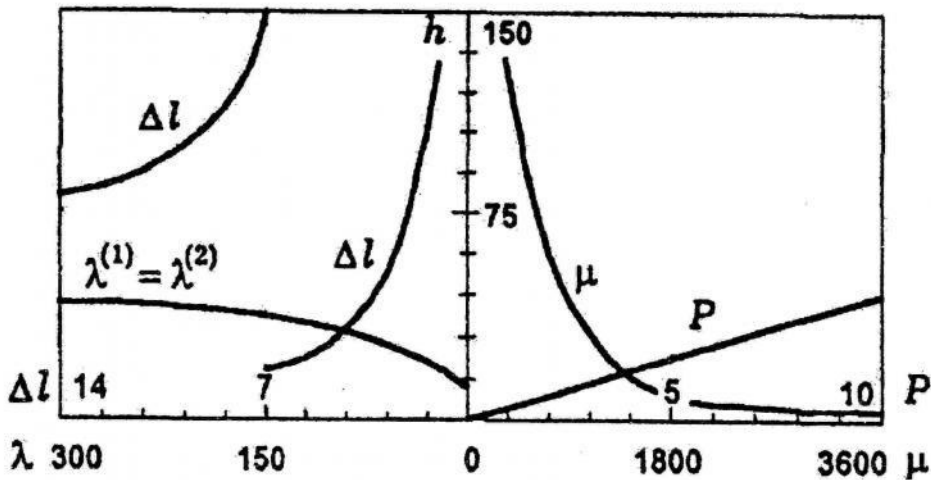


Рис. 1. Вплив вхідних параметрів на термічну провідність контакту

Проведений числовий аналіз допоміг побудувати графіки залежності коефіцієнта h термічної провідності контакту від вхідних параметрів (рис. 1): від тиску P між тілами на площинці контакту; від твердості за Мейєром μ ; від чистоти обробки поверхонь Δl ; від коефіцієнта теплопровідності матеріалів контактуючих тіл у випадку $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$.

Отже, контактна провідність не буде сталою величиною на ділянці контакту. Вважатимемо, що величина h є деякою функцією радіальної координати $h = h(r)$ і розглянемо проблему теплообміну та теплоутворення від тертя в конструкціях, що мають осьову симетрію.

Формулювання задачі. Нехай циліндричну колону з радіусом R і висотою H притиснуто до пружного півпростору постійною силою P . Тепловий контакт між тілами неідеальний із змінним термоопором h^{-1} . Вважається, що на незавантаженій поверхні півпростору, бічній поверхні циліндра і його верхньому торці (рис. 2) відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем з коефіцієнтами теплообміну відповідно $\gamma_H, \gamma_R, \gamma_0$. Враховано також, що зовнішнє середовище, яке прилягає до цих поверхонь, може мати різну температуру (відповідно t_H, t_R, t_0). Тоді

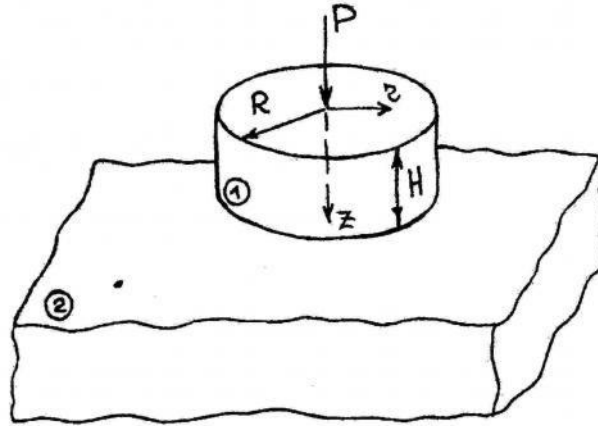


Рис. 2. Геометрія задачі

розв'язування задачі полягає в тому, щоб задовольнити рівняння термопружності для півпростору та стаціонарної теплопровідності для обох тіл

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha \frac{\partial t^{(2)}}{\partial r} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial r^2} \quad (7)$$

за таких силових граничних умов:

$$u_z = f(r), \quad (0 \leq r < R, \quad z = H) \quad (8)$$

$$\sigma_z = 0, \quad (r > R, \quad z = H) \quad (9)$$

$$\tau_{rz} = 0, \quad (r < \infty, \quad z = H) \quad (10)$$

і за таких теплових граничних умов:

$$\frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} = \gamma_0 (t^{(1)} - t_0), \quad (0 \leq r \leq R, \quad z = 0) \quad (11)$$

$$\frac{\partial t^{(1)}}{\partial r} = -\gamma_R (t^{(1)} - t_R), \quad (r = R, \quad 0 \leq z \leq H) \quad (12)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} = h(r) \frac{t^{(2)} - t^{(1)}}{2}, \quad (0 \leq r < R, \quad z = H) \quad (13)$$

$$\frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} = \gamma_H (t^{(2)} - t_H), \quad (r > R, \quad z = H), \quad (14)$$

де $\lambda^{(i)}$ ($i = 1, 2$) – коефіцієнти теплопровідності ($i = 1$ стосується циліндричного тіла, $i = 2$ – півпростору). Вертикальне переміщення $f(r)$ півпростору під циліндром зручно подати у вигляді $f(r) = f_1 + f_2(r)$, де f_1 – переміщення циліндра як жорсткого цілого, $f_2(r)$ – функція, що задає геометрію його нижнього торця. Замикає формулювання задачі умова рівноваги штамп

$$P = -2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}(r, H) \, dr. \quad (15)$$

Розв'язок задачі. Застосовуючи інтегральне перетворення Ханкеля по радіальній координаті ρ (де $\rho = r/R$, $\zeta = z/H$) до рівнянь (5)–(7) і граничних умов (13), (14), використовуючи формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля, отримуємо систему парних інтегральних рівнянь типу

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta \left(\frac{\theta_1}{R^2} \eta^2 C_1(\eta) + \frac{R\theta_3}{\eta} C_2(\eta) \right) J_0(\eta\rho) \, d\eta &= R^2 f(\rho), \quad \rho \leq 1 \\ \frac{1}{R^2} \int_0^\infty \eta \left(\frac{\sigma_1}{R^3} \eta^3 C_1(\eta) + \sigma_3 C_2(\eta) \right) J_0(\eta\rho) \, d\eta &= 0, \quad \rho > 1 \\ \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} + \frac{\lambda^{(2)}}{R^3} \int_0^\infty \eta^2 C_2(\eta) J_0(\eta\rho) \, d\eta &= 0, \quad \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} + h(\rho) t^{(1)} = \frac{1}{R^2} \int_0^\infty \left(h(\rho) + \frac{\lambda^{(2)} \eta}{R} \right) \eta C_2(\eta) J_0(\eta\rho) \, d\eta, \quad \rho \leq 1$$

$$\frac{1}{R^2} \int_0^\infty \eta \left(\gamma_H + \frac{\eta}{R} \right) C_2(\eta) J_0(\eta\rho) \, d\eta, \quad \rho > 1.$$

$$\text{Тут } \theta_1 = k \frac{k+1}{k-1}; \theta_3 = \frac{\Lambda k+1}{2k-1}; \sigma_1 = -\frac{2\mu k^2}{k-1}; \sigma_3 = -\frac{\mu\Lambda}{k-1}; \Lambda = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \alpha.$$

Представляючи контактні напруження у вигляді рядів $\sigma_z(\rho) = \sum_{n=1}^N a_n J_0(\lambda_n \rho)$ і вводячи невідомі функції $\chi(\rho) = b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} b_n J_0(\lambda_n \rho)$, використовуючи формули обернення інтегрального перетворення Ханкеля, отримаємо вирази для функцій $C_1(\eta)$ та $C_2(\eta)$, підстановка яких в (16) дасть такі співвідношення:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1}{\sigma_1} R \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta + \left(\theta_3 - \frac{\sigma_3 \theta_1}{\sigma_1} \right) R^2 \left(b_0 \int_0^\infty \frac{J_1(\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta(\eta + R\gamma_H)} d\eta + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^\infty \frac{1}{\eta + R\gamma_H} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta \right) = f(\rho), \quad \rho \leq 1 \\ & \lambda^{(2)} b_0 \int_0^\infty \frac{\eta}{\eta + R\gamma_H} J_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \\ & + \lambda^{(2)} \sum_{k=1}^{N-1} b_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^\infty \frac{\eta^2}{\eta + R\gamma_H} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta + \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \rho \leq 1 \quad (17) \\ & b_0 \int_0^\infty \frac{Rh(\rho) + \lambda^{(2)} \eta}{\eta + R\gamma_H} J_0(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^\infty \frac{\eta(Rh(\rho) + \lambda^{(2)} \eta)}{\eta + R\gamma_H} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta = \\ & = \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} + h(\rho) t^{(1)}, \quad \rho \leq 1, \end{aligned}$$

де λ_k - нулі функції Бесселя $J_0(\lambda_k) = 0$, $k = \overline{1, N}$. Задовольняючи співвідношення (17) та граничні умови (11) в ряді рівновіддалених точок $\rho_k = (k-1)/(N-1)$, $k = \overline{1, N}$, отримано систему $4N$ алгебричних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів a_i , b_i , d_i , через які визначаються шукані функції $u_z(\rho, \zeta)$, $t^{(i)}(\rho, \zeta)$, $q^{(i)}(\rho, \zeta)$, $i = \overline{1, 2}$. Розподіл контактних напружень і вертикальні пружні переміщення півпростору є для притискаючої сили P , яка визначається з умови рівноваги штамп

$P = 2\pi R^2 \sum_{n=1}^N a_n J_1(\lambda_n) / \lambda_n$. Остаточні аналітичні вирази мають вигляд

$$t^{(1)}(\rho_i; \zeta) = \sum_{j=1}^{2N} t_{i,j}(\zeta) d_j - H^2 R^{-1} C(2/\Delta\rho + 1) t^*;$$

$$\begin{aligned}
 q^{(1)}(\rho_i; \varsigma) &= \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \varsigma} \quad (i = 1, \dots, N); \\
 t^{(2)}(\rho, \varsigma) &= R b_0 \int_0^{\infty} \Lambda_K^*(\eta) \exp(-\eta H(\varsigma - 1)/R) d\eta + \\
 &+ R \sum_{j=1}^{N-1} b_n \lambda_n J_1(\lambda_n) \int_0^{\infty} \frac{\eta \Lambda_{nk}(\eta)}{\eta + R\gamma_H} \exp(\eta H(\varsigma - 1)/R) d\eta \\
 q^{(2)}(\rho, \varsigma) &= \lambda b_0 \int_0^{\infty} \eta^{-1} \Lambda_K^* \exp(-\eta H(\varsigma - 1)/R) d\eta + \\
 &+ R \lambda^{(2)} \sum_{j=1}^{N-1} b_n \lambda_n j_1(\lambda_n) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 \Lambda_{nk}(\eta)}{\eta + R\gamma_H} \exp(-\eta H(\varsigma - 1)/R) d\eta,
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\text{де } \Lambda_{jk}(\eta) = \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho_k)}{\lambda_j^2 - \eta^2}; \quad \Lambda_K^*(\eta) = \frac{J_1(\eta) J_0(\eta \rho_k)}{\eta + R\gamma_H}.$$

Результати та їхній аналіз. Задачу прораховано при лінійній зміні термоопору на ділянці контакту. Початковий (крива 1) і остаточний (крива 2) розподіл контактних напружень зображено на рис. 3. При збільшенні притискаючої сили площа контакту збільшується. Явища нещільного контакту немає при $P \geq 13,4$ МН. Зміна температури основи штампа (крива 1) і межі пружної основи (крива 2) в цьому випадку зображена на рис. 4.

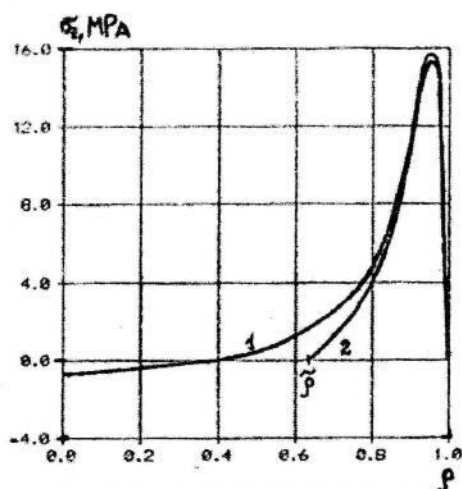


Рис. 3. Розподіл контактних напружень

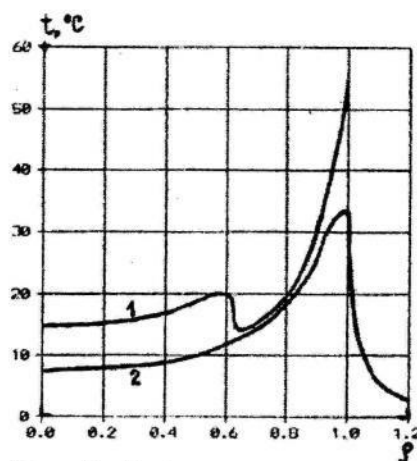


Рис. 4. Зміна температури основи штампа та межі пружної основи

Проводити аналіз впливу закруглення кромки штампа на числові результати. Для цього розбиття інтервалу (0;1) подвоювалось, а ділянка з закругленням зменшувалася вдвоє. Контактні напруження та температура на плоскій ділянці штампа змінилися незначно.

1. *Левіцький В.П., Онишкевич В.М.* Дослідження впливу властивостей "третього тіла" на теплоутворення від тертя // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1999. – Вип. 42. – №1. – С. 82–86.
2. *Коровчинский М.В.* Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхности соприкосновения // *Контактная прочность машиностроительных материалов.* – М., 1964. – С. 2–27.
3. *Швец Р.Н., Мартыняк Р.М.* Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1988. – Вып. 27. – С. 23–28.
4. *Гриліцький Д.В., Баран В.П.* Про постановку контактних задач термопружності з урахуванням теплоутворення при неідеальному тепловому контакті тіл // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 1987. – Вип. 27. – С. 10–13.
5. *Подстригач Я.С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью промежуточного слоя // *Инж.-физ. журн.* – 1963. – 6. – № 10. – С. 129–136.
6. *Veziroglu T.N.* Correlation of thermal contact conductance experimental results // *Prog. Astro. Aero.* – 1967. – 20. – P. 1–12.
7. *Левіцький В.П., Новосад В.П.* Взаємодія штампа, що обертається, з півпростором при частковому зчепленні в зоні контакту // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1997. – Т. 33. – № 2. – С. 55–61.
8. *Онишкевич В., Новосад В.* Задачі про взаємодію осесиметричних термопружних тіл зі змінною ділянкою контакту // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2000. – Вип. 57. – С. 110–114.

CONSIDERATION OF VARIABLE THERMAL RESISTANCE IN SOME AXIALLY SYMMETRICAL PROBLEMS

Volodymyr Onyshkevych

*National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103, 79057 Lviv, Ukraine*

Possibility of consideration of variable thermal resistance in contact problems is investigated. The effective approach to solving of the problems is observed.

Key words: contact problem, variable thermal resistance.

Стаття надійшла до редколегії 18.07.2005
Прийнята до друку 22.11.2006