ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип. 65. С.201-207
VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Mat. 2006. Vol.65. P.201-207

УДК 539.3

ЦИЛІНДРИЧНИЙ ЗГИН ПРУЖНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ГЛАДКИХ ШТАМПІВ

Іван ПРОКОПИШИН, Дмитро ХЛЄБНІКОВ

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Розглянуто задачу про циліндричний згин трансверсально-ізотропного шару періодичною системою гладких штампів. На основі операторного розв'язку Лєхніцького просторової задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропного шару отримане інтегральне рівняння Фредгольма другого роду на контактний тиск. Розв'язок цього рівняння одержаного методом заміни ядра виродженим у формі ряду Фур'є.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний шар, контактна задача, метод виродженого ядра.

Періодична контактна задача про циліндричний згин ізотропного пружного шару жорсткими гладкими штампами ґрунтовно вивчена у праці [1]. Цю задачу розглядають для трансверсально-ізотропного шару. На основі операторного розв'язку С.Г. Лєхніцького [3] задачі про пружну рівновагу трансверсально-ізотропного шару методами теорії інтегральних рівнянь записане інтегральне рівняння Фредгольма другого роду на контактний тиск. Його розв'язок отримали у формі ряду Фур'є методом заміни ядра виродженим.

Формулювання контактної задачі. Розглянемо нескінчений пружний трансверсально-ізотропний шар товщини $2h$, серединна поверхня якого паралельна до площини ізотропії і лежить у площині Oxy. Шар перебуває в умовах плоскої деформації під дією періодичної системи циліндричних у напрямі Oy штампів, розташованих з постійним кроком $2l$ (рис. 1).

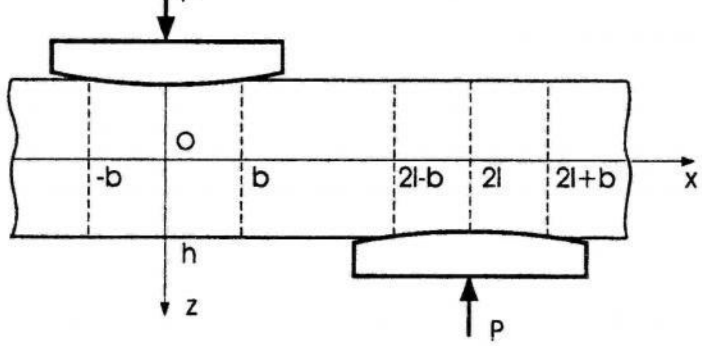

Рис. 1. Циліндричний згин шару періодичною системою штампів

Припустимо, що тертя між штампами і шаром немає, величина зони контакту $2b$ – наперед невідома.

Позначимо через u, w – переміщення точок шару в напрямі осей Ox та Oz відповідно.

Деформації в шарі визначаються співвідношеннями Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{1}$$

а напруження – узагальненим законом Гука

$$\sigma_x = \frac{(1-\nu_1\nu_2)E}{(1+\nu)\mu_0}\varepsilon_x + \frac{\nu_1 E}{\mu_0}\varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = 2G_1\varepsilon_{xz}, \quad \sigma_z = \frac{\nu_1 E}{\mu_0}\varepsilon_x + \frac{(1+\nu)E_1}{\mu_0}\varepsilon_z, \tag{2}$$

де E,ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона в площинах ізотропії; E_1,ν_1,G_1 – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і модуль зсуву у перпендикулярному напрямі, $\nu_2 = \dfrac{\nu_1 E}{E_1}$, $\mu_0 = (1-\nu-2\nu_1\nu_2)$.

Запишемо статичні та кінематичні крайові умови задачі

$$\begin{aligned} &\sigma_z = 0, \quad z = -h, \quad |x - 2l(2k+1)| < 2l - b, \\ &\sigma_z = 0, \quad z = h, \quad |x - 4lk| < 2l - b, \\ &\tau_{xz} = 0, \quad z = \pm h; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &w = f(x) + \Delta, \quad z = -h, \quad |x - 4lk| \le b, \\ &w = -f(x-2l) + \Delta, \quad z = h, \quad |x - 2l(2k+1)| \le b; \end{aligned} \tag{4}$$

де $f(x)$ – періодичне продовження функції, яка описує поверхню штампа на проміжку $|x| < l$; Δ – осадка штампа.

Розв'язок прямої задачі в рядах Фур'є. Розв'язок задачі про пружну рівновагу шару отримав в операторному вигляді С.Г. Лєхніцький [3] символічним методом А.І. Лур'є.

Введемо позначення

$$s_0^2 = \frac{G}{G_1}, \quad \lambda = \frac{2}{1-\nu}\left(s_0^2 - \nu_2\right), \quad \mu = \frac{E(1-\nu_1\nu_2)}{E_1(1-\nu^2)}, \quad H = E\nu_1 + G_1\mu_0,$$

$$\theta_i = \frac{2GG_1(1-\nu_1\nu_2)}{H} + \frac{G_1 E\nu_1}{H}s_i^2, \gamma_i = \frac{2G(1-\nu_1\nu_2)}{H} - \frac{G_1\mu_0}{H}s_i^2, i = 1, 2,$$

де $d = \dfrac{(1-\nu_1\nu_2)(s_1+s_2)}{E_1 s_1 s_2}$; s_1^2, s_2^2 – корені рівняння $s^4 - \lambda s^2 + \mu = 0$;

$\partial = \dfrac{d}{dx}$ – оператор диференціювання за x.

Зазначимо, що з додатності енергії пружної деформації випливає умова $\mu > 0$ [4], для ізотропних матеріалів і багатьох природних трансверсально-ізотропних матеріалів виконується умова $\lambda > 0$.

Наведемо вирази для переміщень u, w в задачі про плоску деформацію шару під дією нормального навантаження $\sigma_z(x, \pm h)$

$$u = \left(s_1\theta_2 \cos s_1 z\partial \sin s_2 h\partial - s_2\theta_1 \cos s_2 z\partial \sin s_1 h\partial\right)\chi + \\ + \left(-s_1\theta_2 \sin s_1 z\partial \cos s_2 h\partial + s_2\theta_1 \sin s_2 z\partial \cos s_1 h\partial\right)\psi \quad , \tag{5}$$

$$w = \left(-\gamma_1\theta_2 \sin s_1 z\partial \sin s_2 h\partial + \gamma_2\theta_1 \sin s_2 z\partial \sin s_1 h\partial\right)\chi + \\ + \left(-\gamma_1\theta_2 \cos s_1 z\partial \cos s_2 h\partial + \gamma_2\theta_1 \cos s_2 z\partial \cos s_1 h\partial\right)\psi \quad , \tag{6}$$

де χ , ψ – функції напружень, які задовольняють рівняння

$$L^+(h^2\partial^2)\chi = p^+ \quad , \qquad L^-(h^2\partial^2)\psi = p^-, p^\pm(x) = \frac{1}{2}(\sigma_z(x,h) \pm \sigma_z(x,-h)), \tag{7}$$

$$L^\pm(h^2\partial^2) = \frac{1}{2}h\partial\left[(s_1 + s_2)\sin((s_1 - s_2)h\partial \pm (s_1 - s_2)\sin((s_1 + s_2)h\partial\right]. \tag{8}$$

Подамо зовнішнє навантаження, яке відповідає вихідній контактній задачі, у формі рядів Фур'є

$$q(x) = -\sigma_z(x,-h) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \cos\omega_k x \quad , \\ q(x-2l) = -\sigma_z(x,h) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q_k \cos\omega_k x \quad , \tag{9}$$

де q_k – коефіцієнти Фур'є

$$q_k = \frac{1}{2l}\int_{-b}^{b} q(x)\cos\omega_k x dx, k \geq 1, q_0 = \frac{1}{4l}\int_{-b}^{b} q(x) x dx \quad , \omega_k = \frac{k\pi}{2l} \quad . \tag{10}$$

Тоді для правих частин рівнянь (7) отримаємо вирази

$$p^+ = -\sum_{k=0}^{\infty} q_{2k} \cos\omega_{2k} x \quad , \qquad p^- = -\sum_{k=0}^{\infty} q_{2k+1} \cos\omega_{2k+1} x \quad ,$$

а періодичні розв'язки цих рівнянь очевидно запишемо у вигляді рядів Фур'є

$$\chi = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{2k}}{L^+(-\gamma_{2k}^2)} \cos\omega_{2k} x \quad , \qquad \psi = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_{2k+1}}{L^-(-\gamma_{2k+1}^2)} \cos\omega_{2k+1} x \quad , \gamma_k = \omega_k h \,. \tag{11}$$

Вирази для переміщень і напружень отримують на основі співвідношень (5)–(6) та (1), (2) безпосереднім диференціюванням функцій напружень (11).

Формулювання інтегрального рівняння на контактний тиск. Запишемо вираз для вертикального переміщення поверхні шару $z = -h$, виділивши в ньому повільно збіжну частину ряду

$$w(-h,\varphi) = \frac{ld}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q_n}{n}\cos n\varphi + \frac{q_n}{n}C_n\cos n\varphi\right), \quad \varphi = \frac{\pi x}{2l}, \tag{12}$$

де для непарних $n = 2m-1$

$$C_{2m-1} = \frac{s_1\exp(-s_2\gamma_{2m-1})ch(s_1\gamma_{2m-1}) - s_2\exp(-s_1\gamma_{2m-1})ch(s_2\gamma_{2m-1})}{s_1 ch(s_1\gamma_{2m-1})sh(s_2\gamma_{2m-1}) - s_2 sh(s_1\gamma_{2m-1})ch(s_2\gamma_{2m-1})},$$

а для парних n

$$C_{2m} = \frac{-s_1\exp(-s_2\gamma_{2m})sh(s_1\gamma_{2m}) + s_2\exp(-s_1\gamma_{2m})sh(s_2\gamma_{2m})}{s_1 ch(s_2\gamma_{2m})sh(s_1\gamma_{2m}) - s_2 ch(s_1\gamma_{2m})sh(s_2\gamma_{2m})}.$$

Випадок ізотропного матеріалу $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ отримуємо граничним переходом $s_1 \to 1$, $s_2 \to 1$.

Після підстановки в (12) значень коефіцієнтів Фур'є (10) та перетворень, одержимо

$$w(x,-h) = \frac{ld}{\pi^2}\left[-\int_{-\theta}^{\theta} q(\tau)\ln\left|2\sin\frac{\varphi-\tau}{2}\right|d\tau + \int_{-\theta}^{\theta} q(\tau)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n}\cos n\varphi\cos n\tau\right)d\tau\right], \tag{13}$$

де $\varphi = \dfrac{\pi x}{2l}$, $\theta = \dfrac{\pi b}{2l}$.

Для параболічного штампа з кривизною $1/R$ в точці $x = 0$ форма поверхні описується функцією $f(x) = -x^2/2R = -2l^2\varphi^2/\pi^2 R$, $|x| < l$. З умов контакту (4) отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду для визначення безрозмірного контактного тиску $\overline{q}(\varphi) = Rdq(\varphi)/l$

$$\int_{-\theta}^{\theta}\overline{q}(\tau)\ln\left|2\sin\frac{\varphi-\tau}{2}\right|d\tau = \int_{-\theta}^{\theta}\overline{q}(\tau)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n}\cos n\varphi\cos n\tau\right)d\tau + \varphi^2 + \delta. \tag{14}$$

Рівняння (14) перетворимо до рівняння Фредгольма другого роду шляхом обертання інтеграла у правій частині рівності на основі розв'язку І.А. Штаєрмана інтегрального рівняння періодичної контактної задачі для півплощини [5]. Тоді отримаємо

$$\overline{q}(\varphi) + \frac{X(\varphi)}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\overline{q}(\varphi_1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varpi_n(\varphi)\cos n\varphi_1\right)d\varphi_1 = \frac{1}{\pi}b(\varphi), \tag{15}$$

де

$$\varpi_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{\sin n\varphi_0 d\varphi_0}{X(\varphi_0)\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\cos\theta)\cos(n - k - \frac{1}{2})\varphi, \tag{16}$$

$$b(\varphi) = \frac{X(\varphi)}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{(\varphi_0 - \varphi)d\varphi_0}{X(\varphi)\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi}{2}}, \tag{17}$$

$X(\varphi) = \sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}$, $P_k(\cos\theta)$ – поліноми Лежандра.

Метод заміни ядра виродженим. Для наближеного розв'язку інтегрального рівняння (15) замінимо суму ряду в ядрі інтегрального рівняння скінченою сумою. Це приводить до рівняння з виродженим ядром

$$\overline{q}(\varphi) + \frac{X(\varphi)}{\pi}\sum_{k=1}^{2n} C_k \varpi_k(\varphi)\int_{-\theta}^{\theta}\overline{q}(\varphi_1)\cos n\varphi_1 d\varphi_1 = \frac{1}{\pi}b(\varphi). \tag{18}$$

Позначимо через Q_k коефіцієнти розвинення безрозмірного контактного тиску $\overline{q}$ в ряд Фур'є

$$Q_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\overline{q}(\varphi_1)\cos k\varphi_1 d\varphi_1 = \frac{Rd}{l}q_k \quad , \quad k = 1 \ ,\ldots\ ,\ 2n.$$

Тепер виразимо контактний тиск $\overline{q}$ з рівняння (15) через коефіцієнти Q_k

$$\overline{q}(\varphi) = -X(\varphi)\sum_{k=1}^{2n} C_k Q_k \varpi_k(\varphi) + \frac{b(\varphi)}{\pi}. \tag{19}$$

Підставляючи вираз (19) знову в (18) і враховуючи лінійну незалежність функцій $\omega_k(\varphi)$ (16), приходимо до такої системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих Q_k

$$Q_k + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{2n} C_i Q_i \int_{-\theta}^{\theta} X(\alpha)\varpi_i(\alpha)\cos k\alpha d\alpha = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\theta}^{\theta} b(\alpha)\cos k\alpha d\alpha \ , \quad k = 1 \ ,\ldots,\ 2n\,. \tag{20}$$

Навантаження, яке діє на штамп, визначається інтегруванням виразу для контактного тиску (19)

$$P = \frac{2l}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} q(\varphi)d\varphi = \frac{2l^2}{dR}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} b(\varphi)d\varphi - \sum_{k=1}^{2n} C_k Q_k \int_{-\theta}^{\theta} X(\varphi)\varpi_k(\varphi)d\varphi\right]. \qquad (21)$$

Чисельне дослідження задачі. Для обчислення інтеграла (17) з кореневою особливістю застосовували квадратурну формулу Меллера [2]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{f(\alpha)d\alpha}{X(\alpha)} = \frac{\pi}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{f(\alpha_j)}{\cos\frac{\alpha_j}{2}}\ , \quad \alpha_j = -2\arcsin\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{2j-1}{2m}\right)\ , \quad j = \overline{1,m}\,. \qquad (22)$$

Інтеграли, які входять у систему рівнянь (20) та вираз для зовнішнього навантаження (21), обчислювали методом Симпсона з автоматичним вибором кроку.

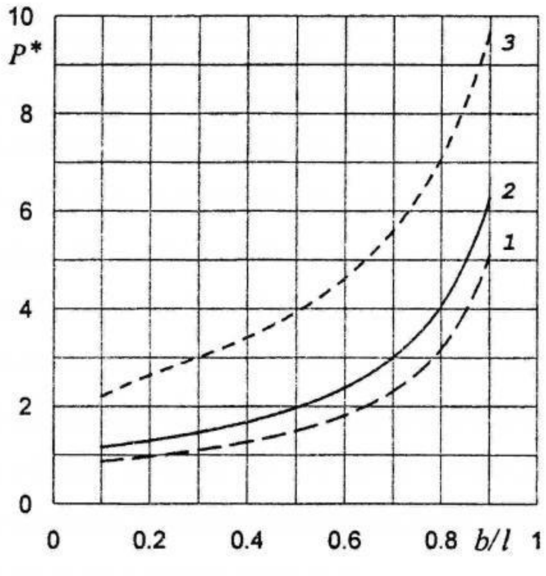

Рис. 2

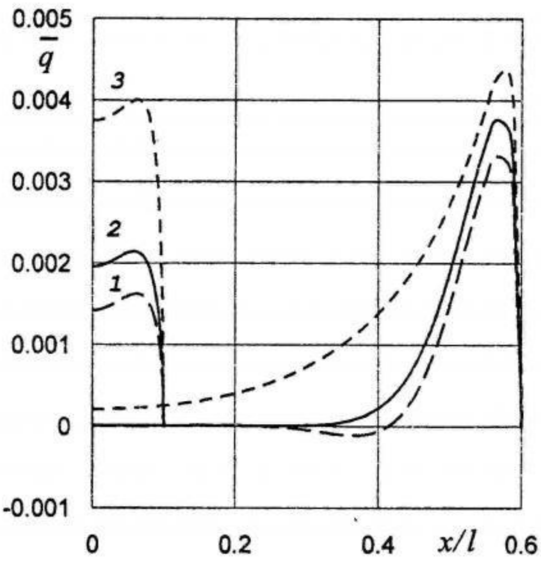

Рис. 3

Кількість членів ряду Фур'є та кількість точок інтегрування формули Меллера вибрали на основі порівняння розв'язку задачі для ізотропного випадку з розв'язком [1] для шару відносної товщини $l/h = 20$. Значення цих параметрів $2n = 100$ та $m = 60$ забезпечують три точні знаки для величини зовнішнього зусилля на штамп. Зазначимо, що розрахунок контактного тиску та зовнішнього зусилля безпосередньо за їхніми зображеннями рядами Фур'є дає у порівнянні з формулами (19) та (21) відносну похибку 4% – для максимуму контактного тиску та 1% – для зусилля на штамп.

Розглянемо результати розв'язку задачі для шару відносної товщини $l/h = 20$ з параметрами матеріалу $\nu = 0,3$, $\nu_1 = 0,1$, $E/E_1 = 1$ для різних значень параметра анізотропії G/G_1.

На рис. 2 показана залежність безрозмірного зусилля на штамп $P^* = 3lRdP/h^3$ від відносної півширини зони контакту b/l для значень параметра анізотропії $G/G_1 = 0,25$, $1,0$, $8,0$ (відповідно криві 1–3). На рис. 3 показаний розподіл контактного тиску для цих випадків для відносної півширини зони контакту $b/l = 0,1$ та $b/l = 0,6$.

---

1. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М., 1980.
2. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. – М., 1967.
3. *Лехницкий С.Г.* Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты // Прикладная математика и механика. – 1962. – 26. – № 4. – С. 687–696.
4. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. – М., 1988.
5. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. – М., 1949.

CYLINDRICAL BENDING OF ELASTIC TRANSVERSALLY-ISOTROPIC LAYER BY PERIODICAL SYSTEM OF SMOOTH STAMPS

Ivan Prokopyshyn, Dmytro Khlebnikov

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The problem of cylindrical bending of elastic transversally-isotropic layer by a periodic array of smooth stamps is considered. Fredholm second type integral equation for contact pressure is obtained on the base of Lehnitsky operational solution of the elasticity problem for transversally-isotropic layer. Solution of the equation is found in Fourier series form by the degenerate kernel method.

Key words: transversally-isotropic layer, contact problem, degenerate kernel method.

Стаття надійшла до редколегії 09.11.2005
Прийнята до друку 22.11.2006