ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип. 65. С.194-200

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Mat. 2006. Vol.65. P.194-200

УДК 517.11

ПРО ГРАНИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПОДАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Микола СЛОБОДЯН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Введено інтегральне подання розв'язку рівняння Клейна-Гордона та доведено, що для цього справджується аналог формул Сохоцького-Племелі.

Ключові слова: рівняння Клейна-Гордона, інтегральне подання, комплексна змінна, аналог формул Сохоцького-Племелі.

До рівняння Клейна-Гордона зводяться розв'язки багатьох задач механіки, наприклад, задачі згину пластин з врахуванням уточнених теорій. Використання інтегрального подання цього рівняння дає змогу звести розв'язки задач до сингулярних інтегральних рівнянь, які можна розв'язати чисельно [2, 3].

У літературі, наприклад [1, 2], відоме інтегральне подання розв'язку рівняння Лапласа у двовимірному випадку – інтеграл типу Коші. Мета нашої праці – побудувати відповідне інтегральне подання для рівняння Клейна-Гордона та з'ясувати його властивості.

Допоміжні твердження. Функція $\omega(t)$ задовольняє на L умову Гельдера (умову H), якщо для кожних двох точок t_1 і t_2 лінії L комплексної площини C справджується нерівність

$$\left|\omega(t_2)-\omega(t_1)\right| \le A\cdot\left|t_2-t_1\right|^{\mu},\ A>0,\ 0<\mu\le 1,$$

де A і μ – відповідно стала і показник Гельдера.

Нехай L довільна гладка замкнена чи розімкнена крива, що не має точок перетину, з відповідним додатним напрямом обходу на ній.

Розглянемо функцію

$$U(z)=\frac{1}{2\pi\ i}\int_L \frac{WK_1(W)\omega(t)}{t-z}dt,$$

де $W=k\cdot|t-z|$, $z=x+iy$; i – уявна одиниця, $\omega(t)$ задовольняє умову Гельдера; $K_1(W)$ – функція Макдональда першого порядку, яку можна подати у вигляді

$$K_1(W)=\frac{1}{W}+\tilde{K}_1(W),$$

$$\tilde{K}_1(W) = \left(c - \frac{1}{2} + \ln\frac{W}{2}\right)\cdot\frac{W}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2(n+1)} + c + \ln\frac{W}{2}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{n!(n+1)\ \ !}\cdot\left(\frac{W}{2}\right)^{2n+1},\ \tilde{K}_1(0) = 0,\ c - \text{ стала Ейлера.}$$

Правильні такі зауваження.

Зауваження 1. Функція $\tilde{K}_1(W)$ є обмеженою і неперервною на відрізку $[0,+\infty)$.

Зауваження 2. Функція $U(z)$ задовольняє рівняння Клейна-Гордона $\Delta U - k^2U = 0$, де $\Delta -$ оператор Лапласа.

У цьому можна безпосередньо переконатися, якщо її підставити у це рівняння.

Зауваження 3. Якщо треба вивчити поведінку функції $U(z)$ поблизу деякої частини L_0 лінії L, то розіб'ємо інтеграл, що входить в $U(z)$, на суму двох інтегралів, один із яких взятий по частині L_1, яка містить L_0, причому $L_1 \subset L$, а другий – по $L_2 = L / L_1$, тобто функцію $U(z)$ розіб'ємо на дві функції $U_1(z)$ і $U_2(z)$, то функцію $U_2(z)$ можна неперервно продовжити на L_0, тому потрібно дослідити тільки функцію $U_1(z)$.

Теорема. Якщо функція $\omega(t)$ задовольняє умову Гельдера на деякій гладкій частині лінії L, то функцію $U(z)$ можна неперервно продовжити зліва і справа на цю частину, за винятком, можливо, її кінців (якщо такі є), а для граничних значень функції справджуються залежності

$$U^{\pm}(t_0) = \pm\frac{1}{2}\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi\ \ i}\int_L \frac{W_0K_1(W_0)\omega(t)}{t - t_0}dt,\ t_0 \in L,$$

де $W_0 = k\cdot|t - t_0|$; знак "+" відповідає граничному значенню функції $U(z)$ при $z \to t_0$ зліва від L, знак "– " – справа; інтеграл у правій частині розуміється у сенсі головного значення.

Доведення теореми.

Для доведення теореми скористаємося відповідним доведенням із монографії [1] для інтегралів типу Коші.

Врахувавши зауваження 3, достатньо розглянути випадок, коли $L -$ гладка розімкнена дуга.

Дослідимо спочатку поведінку функцій

$$F(z) = \frac{1}{2\pi\ \ i}\int_L \frac{W\tilde{K}_1(W)}{t - z}\cdot[\omega(t) - \omega(t_0)]dt,\ G(z) = \frac{1}{2\pi\ \ i}\int_L \frac{W\tilde{K}_1(W)}{t - z}dt,$$

при $z \to t_0$, де t_0 – довільна точка лінії L, за винятком її кінців.

Доведемо лему.

Лема. Нехай β_0 – довільний нетупий кут, тобто $0 < \beta_0 \le \pi/2$, і нехай z наближається до $t_0 \in L$ так, що нетупий кут β між відрізком $t_0 z$ і дотичною до L в точці t_0 не менший β_0. Тоді $F(z)$ $(G(z))$ рівномірно стосовно положення t_0 на L, прямує до границі

$$F(t_0) = \frac{1}{2\pi \ i}\int_L \frac{W_0\tilde{K}_1(W_0)}{t-t_0}\cdot[\omega(t)-\omega(t_0)]dt, \left(G(t_0) = \frac{1}{2\pi \ i}\int_L \frac{W_0\tilde{K}_1(W_0)}{t-t_0}dt\right).$$

Доведення.

Доведемо лему для функції $F(z)$, так як доведення для функції $G(z)$ – аналогічне.

Отже, треба довести, що $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta^* > 0$, якщо $|z - t_0| < \delta^*$, то $|F(z) - F(t_0)| < \varepsilon$.

Зауважимо, що достатньо довести лему для функції

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \ i}\int_l \frac{W\tilde{K}_1(W)}{t-z}\cdot[\omega(t)-\omega(t_0)]dt,$$

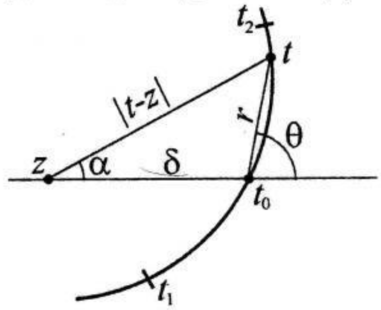

Рис. 1

де l – стандартна дуга лінії L, яка містить точку t_0 і яка відповідає стандартному радіусу $R(\alpha_0)$, де $0 < \alpha_0 < \beta_0$ [1].

Розглянемо

$$f(z) - f(t_0) = \frac{1}{2\pi \ i}\int_l \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-z}W\tilde{K}_1(W)dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi \ i}\int_l \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{t-t_0}W_0\tilde{K}_1(W_0)dt =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{(t-z)\cdot(t-t_0)}\cdot\left[W\tilde{K}_1(W)\cdot(t-t_0)-W_0\tilde{K}_1(W_0)\cdot(t-z)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{(t-z)(t-t_0)}\left[k|t-z|\tilde{K}_1(W)(t-t_0) - k|t-t_0|\tilde{K}_1(W_0)(t-z)\right]dt.$$

Опишемо з t_0, як із центра, коло γ радіуса ρ. При досить малому ρ це коло перетне дугу l у двох точках t_1 і t_2. Позначимо через t_1t_2 частину l, яка міститься всередині кола γ, а через $l - t_1t_2$ – іншу частину.

Тоді можемо записати

$$f(z)-f(t_0)=J_1+J_2, \tag{1}$$

де

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_1t_2}\frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{(t-z)(t-t_0)}\left[k|t-z|(t-t_0)\tilde{K}_1(W)-k|t-t_0|(t-z)\tilde{K}_1(W_0)\right]dt,$$

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l-t_1t_2}\frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{(t-z)(t-t_0)}\left[k|t-z|(t-t_0)\tilde{K}_1(W)-k|t-t_0|(t-z)\tilde{K}_1(W_0)\right]dt.$$

Знайдемо

$$|J_1|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_1t_2}\frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{(t-z)(t-t_0)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[k|t-z|(t-t_0)\tilde{K}_1(W)-k|t-t_0|(t-z)\tilde{K}_1(W_0)\right]dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_1t_2}\frac{|\omega(t)-\omega(t_0)|}{|t-z|\cdot|t-t_0|}\cdot\left|k|t-z|(t-t_0)\tilde{K}_1(W)-k|t-t_0|(t-z)\tilde{K}_1(W_0)\right||dt|\le$$

$$\le\frac{k}{2\pi}\int\limits_{t_1t_2}\frac{A\cdot|t-t_0|^{\mu}}{|t-z|\cdot|t-t_0|}\cdot|t-z|\cdot|t-t_0|\cdot\left[\left|\tilde{K}_1(W)\right|+\left|\tilde{K}_1(W_0)\right|\right]K|dr|\le$$

$$\le\frac{k\cdot A\cdot K}{2\pi}\int\limits_{t_1t_2}r^{\mu}\cdot\left[\left|\tilde{K}_1(W)\right|+\left|\tilde{K}_1(W_0)\right|\right]|dr|\le\frac{k\cdot A\cdot K}{2\pi}\int\limits_{t_1t_2}r^{\mu}\cdot 2M|dr|\le$$

$$\le\frac{k\cdot A\cdot K\cdot M}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\rho}r^{\mu}dr=\frac{k\cdot A\cdot K\cdot M}{\pi}\cdot\frac{\rho^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Виберемо ρ настільки малим, щоб виконувалась нерівність

$$|J_1|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Тепер розглянемо $|J_2|$

$$|J_2|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l-t_1t_2}\frac{\omega(t)-\omega(t_0)}{(t-z)(t-t_0)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[k|t-z|(t-t_0)\tilde{K}_1(W)-k|t-t_0|(t-z)\tilde{K}_1(W_0)\right]dt\right|\le$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l-t_1t_2} \frac{|\omega(t) - \omega(t_0)|}{|t - z| \cdot |t - t_0|} \cdot \left| k|t - z|(t - t_0)\tilde{K}_1(W) - k|t - t_0|(t - z)\tilde{K}_1(W_0) \right| |dt|.$$

Оскільки $(t - t_0) = |t - t_0| \cdot e^{i \cdot \arg(t - t_0)}$, $(t - z) = |t - z| \cdot e^{i \cdot \arg(t - z)}$, то отримаємо

$$|J_2| = \frac{k}{2\pi} \int\limits_{l-t_1t_2} \frac{|\omega(t) - \omega(t_0)|}{|t - z| \cdot |t - t_0|} \cdot |t - z| \cdot |t - t_0| \cdot \left| e^{i \cdot \arg(t - t_0)}\tilde{K}_1(W) - \right.$$

$$\left. - e^{i \cdot \arg(t - z)}\tilde{K}_1(W_0) \right| |ds| = \frac{k}{2\pi} \int\limits_{l-t_1t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot \left| e^{i \cdot \arg(t - t_0)}\tilde{K}_1(W) - \right.$$

$$\left. - e^{i \cdot \arg(t - z)}\tilde{K}_1(W_0) + e^{i \cdot \arg(t - t_0)}\tilde{K}_1(W_0) - e^{i \cdot \arg(t - t_0)}\tilde{K}_1(W_0) \right| |ds| \leq$$

$$\leq \frac{k}{2\pi} \int\limits_{l-t_1t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot \left[\left| e^{i \cdot \arg(t - t_0)} \left(\tilde{K}_1(W) - \tilde{K}_1(W_0) \right) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \left(e^{i \cdot \arg(t - t_0)} - e^{i \cdot \arg(t - z)} \right) \tilde{K}_1(W_0) \right| \right] |ds| =$$

$$= \frac{k}{2\pi} \int\limits_{l-t_1t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot \left| \tilde{K}_1(W) - \tilde{K}_1(W_0) \right| |ds| +$$

$$+ \frac{k}{2\pi} \int\limits_{l-t_1t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot \left| \tilde{K}_1(W_0) \right| \cdot \left| e^{i \cdot \arg(t - t_0)} - e^{i \cdot \arg(t - z)} \right| |ds| \leq$$

$$\leq \frac{k}{2\pi} \int\limits_{l-t_1t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot \left| \tilde{K}_1(W) - \tilde{K}_1(W_0) \right| |ds| +$$

$$+ \frac{k \cdot M}{2\pi} \int\limits_{l-t_1t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot \left| e^{i \cdot \arg(t - t_0)} - e^{i \cdot \arg(t - z)} \right| |ds|. \tag{3}$$

Оскільки

$$\int\limits_{l-t_1t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| |ds| \leq N, \text{ де } N > 0,\ N \in R,$$

і функція $\tilde{K}_1(W) = \tilde{K}_1(k \cdot |t - z|)$ – неперервна функція від z, тому $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$ $\exists \tilde{\delta} > 0$ $\forall t,\ z,\ t_0 \in C$

$$|z - t_0| < \tilde{\delta} \Rightarrow \left| \tilde{K}_1(k \cdot |t - z|) - \tilde{K}_1(k \cdot |t - t_0|) \right| < \tilde{\varepsilon}.$$

Приймемо $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon \quad \pi}{2 \quad k \quad N}$, тоді

$$\frac{k}{2\pi}\int\limits_{l-t_1t_2}\left|\omega(t)-\omega(t_0)\right|\cdot\left|\tilde{K}_1(W)-\tilde{K}_1(W_0)\right||ds|<\frac{kN}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon \quad \pi}{2 \quad k \quad N}=\frac{\varepsilon}{4}. \quad (4)$$

Тепер розглянемо другий доданок в (1). Оскільки функція $e^{i\cdot\arg(t-z)}$ є неперервною функцією поза кругом γ, тоді $\forall\tilde{\tilde{\varepsilon}}>0 \quad \exists\tilde{\tilde{\delta}}>0$ $\forall t \neq z, \ t \neq t_0 \ \in C$

$$\left|z-t_0\right|<\tilde{\tilde{\delta}} \Rightarrow \left|e^{i\cdot\arg(t-t_0)}-e^{i\cdot\arg(t-z)}\right|<\tilde{\tilde{\varepsilon}}.$$

Варто пригадати, що поза кругом γ виконується $\left|t-t_0\right| \geq \rho > 0$, $|t-z| \geq \rho/2 > 0$.

Візьмемо $\tilde{\tilde{\varepsilon}} = \dfrac{\pi \quad \varepsilon}{2k \quad N \quad M}$, тоді $\forall t \in l - t_1t_2$

$$\frac{k\cdot M}{2\pi}\int\limits_{l-t_1t_2}\left|\omega(t)-\omega(t_0)\right|\cdot\left|e^{i\cdot\arg(t-t_0)}-e^{i\cdot\arg(t-z)}\right||ds|<\frac{kNM}{2\pi}\cdot\frac{\pi \quad \varepsilon}{2 \quad kN \quad M}=\frac{\varepsilon}{4}. \quad (5)$$

Вибравши $\delta = \min\left(\tilde{\delta}, \ \tilde{\tilde{\delta}}, \rho\right)$ та врахувавши (4) і (5), матимемо

$$\left|J_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Враховуючи (2) і (6), отримаємо

$$\left|f(z)-f(t_0)\right| \leq \left|J_1\right|+\left|J_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Лему доведено.

Продовжимо доведення теореми.

Функцію $U(z)$ можна подати у вигляді

$$U(z)=\frac{1}{2\pi \quad i}\int\limits_L\frac{W\tilde{K}_1(W)\omega(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi \quad i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{W\tilde{K}_1(W)\left(\omega(t)-\omega(t_0)\right)}{t-z}dt+\frac{\omega(t_0)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{W\tilde{K}_1(W)}{t-z}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi \quad i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}dt+F(z)+\omega(t_0)G(z). \quad (7).$$

Беручи до уваги доведену лему і те, що для інтеграла типу Коші правильні формули Сохоцького-Племелі, з (7) одержимо

$$U^{\pm}(t_0) = \pm\frac{\omega(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi\quad i}\int_L \frac{W_0 K_1(W_0)\omega(t)}{t - t_0}dt\,.$$

Отже, теорема доведена.

Зауважимо, що з доведеної теореми випливає співвідношення

$$U^+(t_0) - U^-(t_0) = \omega(t_0)\,,\ t_0 \in L\,,$$

$$U^+(t_0) + U^-(t_0) = 2U(t_0) = \frac{1}{\pi\quad i}\int_L \frac{W_0 K_1(W_0)\omega(t)}{t - t_0}dt\,,\ t_0 \in L\,.$$

---

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М., 1968.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М., 1977.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышын А. Д.* Распространение напряжений около трещин в пластинках и оболонках. – К., 1976.

ABOUT BOUNDARY VALUE OF INTEGRAL EXPRESSION OF KLEIN-GORDON'S EQUATION SOLUTION

Viktor Opanasovych, Mikola Slobodyan

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Integral expression of Klein-Gordon's equation solution is present in this work and it is proved that the analogues of the Sohockiy-Plemeli's formulas are correct here.

Key words: Klein-Gordon's equation, integral expression, complex variable, analogue of the Sohockiy-Plemeli's formulas.

Стаття надійшла до редколегії 25.05.2005
Прийнята до друку 22.11.2006