

УДК 539.3

ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ВЗАЄМОДІЇ НАХИЛЕНОГО ПРЯМОКУТНОГО ШТАМПА ТА ПРУЖНОГО ШАРУ В УТОЧНЕНОМУ ФОРМУЛЮВАННІ ЗА УМОВИ ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОУТВОРЕННЯ

Петро КРАСНЮК

Львівська державна фінансова академія,
вул. Коперника, 36, 79000 Львів, Україна

Досліджено питання уточнення класичного формулювання плоскої контактної задачі взаємодії нахиленого прямокутного штампа та пружної основи. Показано, що розраховані переміщення контактної поверхні пружного тіла за класичної граничної умови не узгоджуються з формою поверхні штампа поза ділянкою взаємодії (відбувається ефект проникнення матеріалу основи в штамп), що вимагає зміни контактної умови.

Ключові слова: контактна задача, прямокутний штамп, пружна основа, фрикційне теплоутворення.

За класичного формулювання плоских контактних задач для прямокутного у плані штампа [1–5] відбувається використання наступної граничної умови на ділянці взаємодії (рис. 1) $u_y = -\delta - \alpha_0 x$, де u_y – нормальні переміщення, δ – осадка штампа, α_0 – кут повороту штампа як жорсткого цілого стосовно осі z внаслідок не центрально-симетричного прикладання притискної сили. Як свідчать числові розрахунки, тільки за центральносиметричного прикладання навантаження форма поверхні шару узгоджується з формою поверхні штампа.

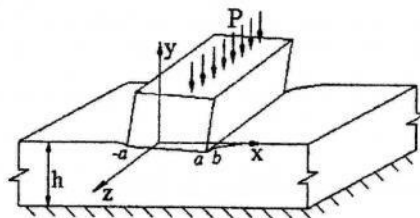


Рис. 1

У випадку прикладання сили з ексцентриситетом простежується проникнення матеріалу основи в штамп зі сторони прикладеної сили. Загалом правильність формулювання контактної задачі й особливо її граничних умов треба завжди перевіряти розрахунком переміщень. Ці обставини вимагають зміни контактної умови, тобто врахування при визначенні граничної умови на переміщення рівняння бічної поверхні жорсткого штампа.

Ми розглядаємо статичну термопружну контактну задачу для трибосистеми, що складається з пружного шару, зацмленого по основі, по поверхні якого переміщується прямокутний в плані штамп, втиснутий з ексцентриситетом. Враховується теплоутворення від дії сил тертя, підпорядкованих закону Амонтона.

Вплив фрикційного теплоутворення при взаємодії штампа та пружного шару досліджували інші автори [6–9]. В цих працях розглядали задачі для

товстого шару, де вибирали перший член асимптотики регулярної частини ядра інтегрального рівняння ("метод великих λ " [3]) і застосовували умови на ділянці контакту у класичному формулюванні [1]. В цій же праці розглянемо контактну задачу для нахиленого штампа в уточненому формулюванні, а також дослідимо вплив фрикційного теплоутворення на розподіл контактного тиску за взаємодії штампа та шару скінченної товщини h .

Математичне формулювання задачі. Нехай жорсткий штамп прямокутної у перерізі форми шириною $2a$, втиснутий віднесеною до одиниці довжини і прикладеною з ексцентриситетом e силою P до пружного шару товщиною h , жорстко защемленого з основи (рис. 1). Ділянка ненавантаженого контакту між штампом і шаром описується нерівностями $|x| \leq a$; $|z| < \infty$, після прикладання навантаження контакт відбуватиметься на ділянці $-a \leq x \leq b$, коли $b > a$. Припускається, що штамп у напрямі осі z переміщується по поверхні шару з малою швидкістю v . За рахунок дії сил тертя τ_{yz} , що виникають на співдотичних поверхнях і підпорядкованих закону Амонтона ($\tau_{yz} = f \cdot \sigma_y$), в площині контакту відбувається теплоутворення, причому внаслідок термоізоляції штампа все тепло, згенероване на контакті, скеровують тільки у шар. Між нижньою поверхнею шару та основою нульової температури припускається теплообмін за законом Ньютона, а верхня поверхня шару поза ділянкою контакту вважається теплоізолюваною, оскільки, як було показано в [4, 8], вплив тепловіддачі з цієї поверхні незначно впливає на розподіл контактних напружень. Крім того, нехтуємо впливом дотичних напружень τ_{yx} на ділянці контакту.

Згадані припущення реалізують у системі плоску деформацію, тому в математичному плані задача зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь теплопровідності та термопружності [4] за граничних і контактних умов

$$y = -h : \partial_y T = \gamma T; u_x = 0; u_y = 0, \quad (1)$$

$$y = 0 : -a \leq x \leq b : \partial_y T = f v \lambda^{-1} p(x); \tau_{yx} = 0;$$

$$u_y = \begin{cases} -\delta - \operatorname{tg}(\alpha_0)x; & |x| \leq a; \\ -\delta - \operatorname{tg}(\alpha_0)a - \operatorname{ctg}(\alpha_0)a + \operatorname{ctg}(\alpha_0)x; & a < x \leq b, \end{cases} \quad (2)$$

$$x > b, x < -a : \partial_y T = 0; \sigma_y = 0; \tau_{yx} = 0. \quad (3)$$

Умова для нормальних переміщень u_y в (2) отримана внаслідок перпендикулярності бічної поверхні штампа до основи, якщо врахувати скінченність кута повороту штампа α_0 . Якщо прийняти малість цієї величини, то контактну умову можна переписати у такому вигляді:

$$u_y = \begin{cases} -\delta - \alpha_0 x; & |x| \leq a; \\ -\delta - \alpha_0 a - a/\alpha_0 + x/\alpha_0; & a < x \leq b. \end{cases} \quad (4)$$

Замикають систему диференціальних рівнянь і граничних умов співвідношення рівноваги штампя як жорсткого цілого

$$\int_{-a}^b p(x) dx = P; \int_{-a}^b xp(x) dx = e \cdot P \quad (5)$$

та умови теплового балансу [9]

$$f \nu \lambda^{-1} \int_{-a}^b p(x) dx = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} T(x, -h) dx. \quad (6)$$

У наведених формулах: $p(x)$ – контактний тиск; T – температура; u_x, u_y – компоненти вектора переміщень; σ_y, τ_{yx} – компоненти тензора напружень; f – коефіцієнт тертя; λ – коефіцієнт теплопровідності; γ – коефіцієнт теплообміну між нижньою площиною шару та основою. Решту позначень описано вище.

Побудова розв'язку та аналіз числових результатів. Сформульовану задачу (1)–(3) та (5) з використанням інтегрального перетворення Фур'є за координатою x можна звести до розв'язку інтегрального рівняння стосовно контактної тиску $p(x)$ [4]

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\nu^2)}{E\pi} \int_{-a}^b p(t) \left[\Delta(x-t) - \frac{f\nu\alpha E}{2\lambda(1-\nu)} H(x-t) \right] dt = \\ & = \begin{cases} \delta + \operatorname{tg}(\alpha_0)x; & |x| \leq a; \\ \delta + \operatorname{tg}(\alpha_0)a + \operatorname{ctg}(\alpha_0)a - \operatorname{ctg}(\alpha_0)x; & a < x \leq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

де з лівого боку у (7) є значення вертикальних термопружних переміщень на поверхні $y = 0$, взятих з від'ємним знаком; E – модуль Юнга; α, ν – відповідно, коефіцієнти лінійного теплового розширення та Пуассона,

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \frac{(3-4\nu)\operatorname{ch}(\xi h)\operatorname{sh}(\xi h) - \xi h}{\xi^2 h^2 - (1-2\nu)^2 \operatorname{sh}^2(\xi h) + 4(1-\nu)^2 \operatorname{ch}^2(\xi h)} \cos(\xi x) d\xi; \\ H(x) &= \int_0^{\infty} \frac{(\xi^2 h^2 + (3-4\nu)\operatorname{sh}^2(\xi h))(\xi \operatorname{sh}(\xi h) + \gamma \operatorname{ch}(\xi h)) +}{\xi^2 (\xi \operatorname{sh}(\xi h) + \gamma \operatorname{ch}(\xi h)) \times} \\ & \quad + \frac{2(1-\nu)\xi(\xi h \operatorname{ch}(\xi h) - \gamma h \operatorname{sh}(\xi h) + \operatorname{sh}(\xi h))}{\xi^2 h^2 - (1-2\nu)^2 \operatorname{sh}^2(\xi h) + 4(1-\nu)^2 \operatorname{ch}^2(\xi h)} \cos(\xi x) d\xi. \end{aligned}$$

Рівняння (7) разом з умовами рівноваги штампя (5), а також співвідношенням обмеженості контактних напружень $p(b) = 0$, коли висота штампя більша від значень $b-a$, дають повну систему рівнянь сформульованої проблеми.

Розв'язок задачі (7), (5) шукатимемо з використанням відомого підходу [4]. Врахувавши те, що ядро інтегрального рівняння (7) – функція $\zeta(x)$ має логарифмічну особливість [3], остаточний вираз для функції $p(x)$ вибирається у такому вигляді (де зроблено перехід до симетричного інтервалу $|x| \leq 1$, а функція контактного тиску подана у безрозмірному вигляді, для чого вона віднесена до величини P/h)

$$p(x) = \frac{Eh}{2P(1-\nu^2)\pi} (\operatorname{tg}(\alpha_0) + \operatorname{ctg}(\alpha_0)) \ln \left(\frac{1-x\epsilon + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\epsilon^2}}{|x-\epsilon|} \right) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n \psi_1(x_j) (1-x_j) \left(1 + \sum_{m=1}^{n-1} (U_m(x_j) + U_{m-1}(x_j)) \times \right. \quad (8)$$

$$\left. \times \frac{T_m(x) - T_{m+1}(x)}{1-x} \right),$$

де множником при $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ є інтерполяційний поліном Лагранжа степеня n [10] за поліномами $R_n(x) = (T_n(x) - T_{n+1}(x))/(1-x)$, ($x_j = \cos((2j/(2n+1))\pi)$, $j = 1, \dots, n$); $U_n(x)$ – поліноми Чебишева другого роду порядку n [11]. При логарифмі у формулі (8) наведено асимптотичне значення контактної тиску при x , прямуючому до $\epsilon = ((3a-b)/(a+b))$. Як видно з наведених співвідношень, розрив нахилу дотичної до профілю всередині області контакту (точка $x = \epsilon$) призводить до наявності логарифмічної особливості $p(x)$, що характерне для контактних задач втиснення в площину клина [5].

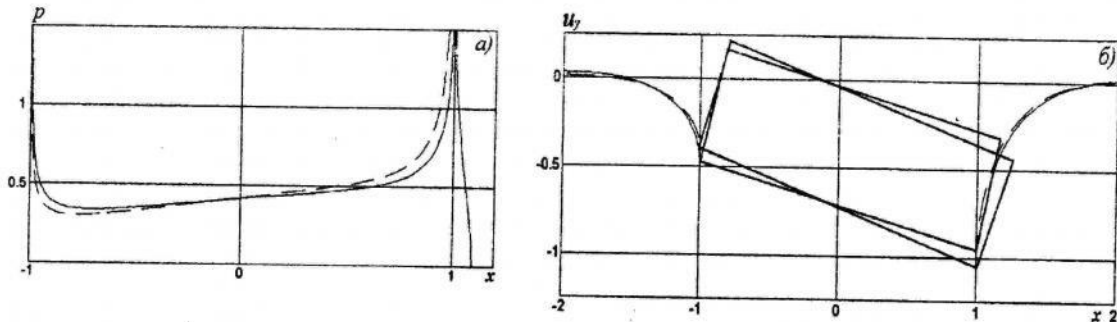


Рис. 2

На рис. 2, а та 2, б наведено розподіл контактної тиску та вигляд нормальних переміщень контактної поверхні шару $u_y(x, 0)$ пружної задачі, знайдені за класичного [1, 4] та уточненого формулювання. Штрихові криві відповідають класичному випадку (праця [4]), а суцільні – розв'язку в уточненому формулюванні (формула 8). Основні параметри мають такі значення: $a = 1,0$, $\nu = 0,3$, $e = 0,2$, $\nu = 0$ і $(Eh)/(2P(1-\nu^2)) = 0,25$. Треба зазначити, що у випадку класичного формулювання $\delta/h = 0,725$, $\alpha_0 = 0,325$, а за уточненого – $\delta/h = 0,715$, $\alpha_0 = 0,24$. Як бачимо, простежується незначна відмінність у величині осадки штамп та доволі суттєва – у значенні кута поворо-

ту a_0 , що пояснюється викривленням поверхні шару в напрямі, протилежному повороту.

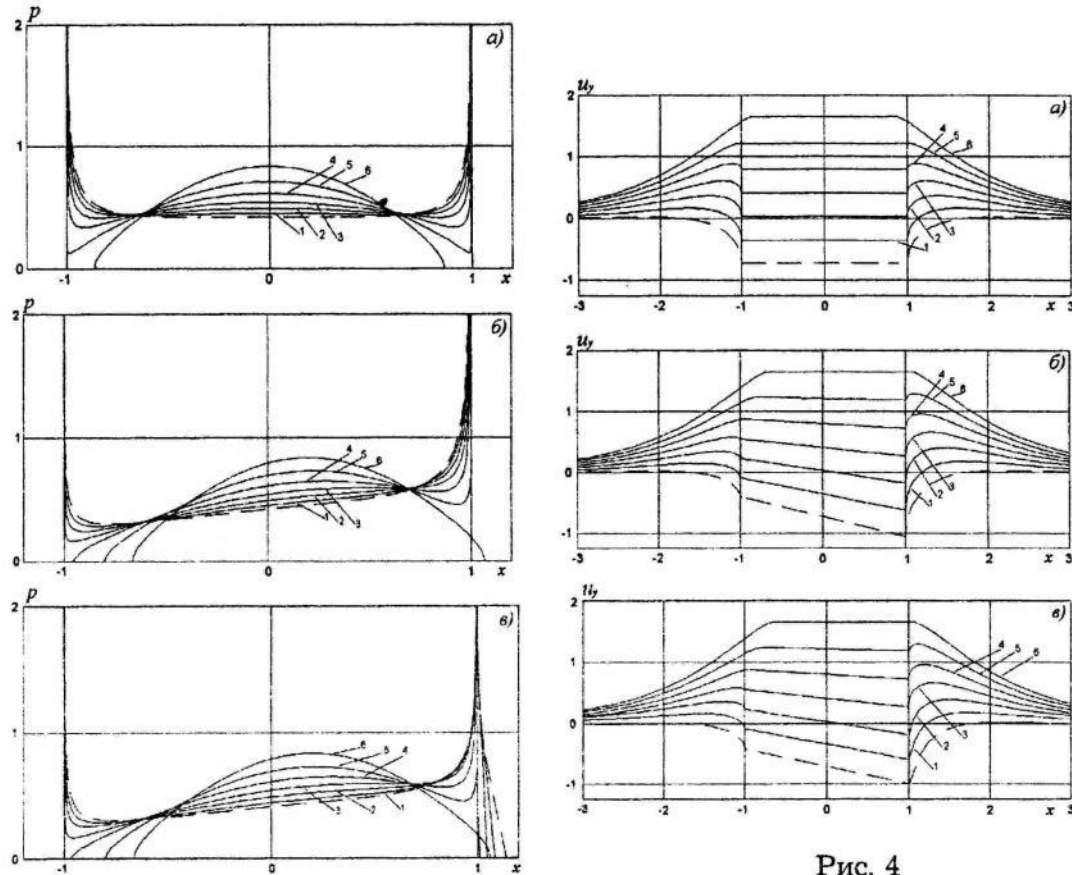


Рис. 4

Рис. 3

На рис. 3 та 4 зображено графіки розподілу контактної тиску та форми поверхні $y = 0$ шару за умови врахування впливу фрикційного теплоутворення. Криві побудовано для різних значень параметра $\chi = (f\nu\alpha Eh)/(2\lambda(1-\nu))$, що, як було показано в [4], визначає інтенсивність теплоутворення. Індеси кривих цих рисунків відповідають таким значенням параметра χ : 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,25 і 1,5 (штрихові лінії – $\chi = 0$). На рис. 3, а побудовано, коли $e = 0$, б та в – при $e = 0,2$ відповідно за класичного та уточненого формулювання. Решта параметрів $a = 1,0$, $\nu = 0,3$ і $(Eh)/(2P(1-\nu^2)) = 0,25$. Зростання параметра χ спричиняє зменшення осадки штамп, причому настає такий момент, що рівновага штамп відбувається при від'ємних значеннях δ (рис. 3, а та 4, а). Контактний тиск зберігає кореневу особливість (з меншим, ніж за пружної взаємодії, коефіцієнтом при сингулярності) тільки за умови $a < a_*$. При $a \geq a_*$ штамп контактує зі шаром на проміжку $[-a_*, a_*]$, тобто простежується відрив штамп від основи на ділянці області контакту. Збільшення χ є причиною зменшення a_* , а за фіксованого χ ріст притискової сили P збільшує $|\delta|$, не впливаючи

на величину проміжку контакту. Тобто, можемо стверджувати, що для кожного значення χ критичне значення півщини ділянки контакту a_* є тією границею, за якою вплив теплових чинників компенсує дію силових. Якщо утискуване тіло почне взаємодіяти з основою вздовж проміжку $[-a_*, a_*]$, то прикладання сили з ексцентриситетом спричинить простий зсув штамп в напрямі дії сили (крива з індексом 6 на рис. 3, б і 4, б).

Числовий аналіз дає змогу стверджувати, що уточнення контактної умови за нецентральносиметричного втиснення штамп варто розглядати тільки за суто силовою взаємодією тіл або за невеликих значень параметра χ . З ростом інтенсивності теплоутворення відбувається зростання викривлення контактної поверхні у більш нагрітій зоні ділянки контакту, що розміщується зі сторони прикладеної сили та зменшення протидії матеріалу шару повороту штамп, що дає змогу практично знехтувати з логарифмічної особливості контактного тиску (криві з індексом 4 та 5 на рис. 3, б і 3, в та розглядати задачу у класичному формулюванні.

Отже, зробили уточнення класичного формулювання термопружної контактної задачі для нахиленого штамп, що було зумовлене неузгодженням форми поверхні утискуваного тіла поза ділянкою контакту з розрахованими переміщеннями контактної поверхні пружного тіла. Записано вирази для контактних напружень через інтерполяційні поліноми Лагранжа, коефіцієнти яких обчислюють з розв'язку системи лінійних алгебричних рівнянь. Показано, що існування розриву нахилу дотичної до профілю всередині ділянки взаємодії призводить до наявності логарифмічної особливості контактного тиску.

Дослідження впливу фрикційного теплоутворення дає підстави стверджувати існування для кожного значення параметра χ , що визначає інтенсивність теплоутворення, критичного значення півщини ділянки контакту, при якому вплив теплових чинників компенсує вплив силових. Тобто, якщо для заданого значення χ півширина штамп a є меншою від цього критичного значення a_* , то збільшення притисної сили спричиняє збільшення осадки штамп та зростання коефіцієнта сингулярності при кореневій особливості. Якщо ж $a > a_*$, то ріст P спричиняє значно більше викривлення контактної поверхні і штамп взаємодіє з поверхнею шару $y = 0$ на ділянці $[-a_*, a_*]$.

Уточнення контактної умови за нецентральносиметричного втиснення штамп вносить суттєві корективи у розподіл контактного тиску тільки за суто силової взаємодії тіл або за невеликих значень параметра χ . Ріст інтенсивності теплоутворення спричиняє вирівнювання штамп, що дає підстави знехтувати з логарифмічної особливості контактних напружень і, як наслідок, досліджувати взаємодію тіл у класичному формулюванні.

1. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М., 1949.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М., 1980.

3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные контактные задачи теории упругости. – М., 1974.
4. Краснюк П.П. Контактное взаимодействие жесткого штампа с упругим слоем при фрикционном теплообразовании // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36. – № 1. – С. 130–138.
5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М., 1989.
6. Ворович И.И., Пожарский Д.А., Чебанов М.И. Задача термоупругости о движущемся штампе при учете тепловыделения от трения // Прикл. матем. и механика. – 1994. – Т. 58. – Вып. 3. – С. 161–166.
7. Грилицький Д.В., Паук В.И. Контактная задача для толстого шероховатого слоя с учетом изнашивания и теплообразования // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 78–83.
8. Евтушенко А.А., Паук В.И. Нестационарная контактная задача для шероховатых тел при учете теплообразования от трения // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60. – Вып. 4. – С. 691–696.
9. Грилицький Д.В. Система сингулярних інтегральних рівнянь для плоскої контактної задачі термопружності при стаціонарному тепловиділенні на площадці контакту // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1984. – Вип. 22. – С. 29–34.
10. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.; Л., 1949.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган: Пер. с англ. – М., 1979.

**A FLAT CONTACT PROBLEM OF INTERACTION OF THE
INCLINED RECTANGULAR STAMP AND AN ELASTIC LAYER
IN THE SPECIFIED STATEMENT UNDER CONDITION
OF A FRICTIONAL HEAD GENERATION**

Peter Krasnyuk

*Lviv State Financial Academy,
Copernica Str., 3b, 79000 Lviv, Ukraine*

In work the problem of specification of classical statement of a flat contact problem about interaction of the inclined rectangular stamp and the elastic basis is investigated. It is shown, that the designed moving of a contact surface of an elastic body under a classical boundary condition are not connected to the form of a surface of a stamp outside of a site of interaction (the effect of penetration of a material of a basis in a stamp takes place) that demands change of a contact condition.

Key words: contact problem, rectangular stamp, elastic basis, frictional head generation.

Стаття надійшла до редколегії 16.12.2005
Прийнята до друку 22.11.2006