ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип. 65. С.180-186

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Mat. 2006. Vol.65. P.180-186

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТОГО ЕЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦІЇ, ЯКИЙ ПЕРЕБУВАЄ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ

Володимир МАКСИМОВИЧ[1], **Остап ДУМАНСЬКИЙ**[2]

[1]*Луцький державний технічний університет,*
вул. Львівська, 75, 43018 Луцьк, Україна
[21]*Національний лісотехнічний університет України,*
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057 Львів, Україна

Використовуючи апарат аналітичних функцій і конформних відображень, розроблено узагальнений розв'язок пружно-деформованого стану пластинчастого елемента конструкції, послабленого криволінійними отворами, які перебувають під дією зосереджених сил.

Ключові слова: пластинка, зосереджені силові фактори, концентрація напружень.

Актуальність проблеми. Головне завдання при проектуванні конструкцій – визначення їх надійної експлуатації, тобто проведення детального аналізу напружено-деформованого стану елементів конструкцій заданої форми, а також рекомендації для побудови, на основі проведених досліджень нових, раціональніших конструктивних форм. Більшість пластинчастих елементів конструкцій, пристроїв, устаткувань мають скінчені геометричні розміри і розрахунок їх надійності та міцності при експлуатації є важливим та актуальним.

Аналіз відомих досліджень проблеми. Опубліковано достатню кількість монографій і наукових праць, присвячених дослідженню пружної та граничної рівноваги пластинчастих та оболонкових елементів конструкцій, які піддані дії різних силових і температурних факторів, послаблених отворами, надрізами, тріщинами тощо. Важливий внесок у розвиток досліджень цього напряму зробив професор Грилїцький Д.В. та його учні.

Основний матеріал дослідження з обґрунтуванням отриманих результатів. Розглянемо пружний ізотропний пластинчастий елемент конструкції, який перебуває під дією зосереджених сил і послаблений криволінійним отвором. Віднесемо цей елемент до прямокутної системи декартових координат xOy так, щоб початок координат збігався з центром отвору, площина xOy – із серединною поверхнею пластини. Контур отвору вільний від навантажень. Потрібно побудувати фундаментальний (узагальнений) розв'язок основних плоских задач теорії пружності для пластинчастих елементів стосовно областей, які відображаються на круг.

Загальний розв'язок задачі. Для побудови розв'язку типу Гріна треба розглянути задачу теорії пружності для заданої області за умови, що в деяких внутрішніх точках комплексні потенціали мають певні особливості та границя області вільна від навантаження.

Задача теорії пружності для області D, яка обмежена контуром L, зводиться до визначення функцій М.І. Мусхелішвілі $\varphi_1(z)$ та $\psi_1(z)$ з умови [1]

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi'_1(z)} + \overline{\psi_1(z)} = f_1(z), \quad z \in L,$$

де $f_1(z)$ – неперервна і однозначна на контурі L функція, яка визначається через задані на границі зусилля (в цьому випадку її можна прийняти такою, що дорівнює нулю, однак для загальності її далі утримуватимемо).

Для побудови розв'язку типу Гріна треба знайти функції $\varphi_1(z)$ та $\psi_1(z)$, які мають такі особливості:

$$\varphi_1^0(z) = -\sum_{j=1}^{n} P_j \ln(z - z_j), \quad \psi_1^0(z) = \sum_{j=1}^{n} [\alpha \overline{P}_j \ln(z - z_j) + \overline{z}_j P_j \frac{1}{z - z_j}]. \qquad (1)$$

Тут α – довільна дійсна стала; P_j – комплексні сталі, що задовольняють умову $\sum_{j=1}^{n} P_j = 0$. Зазначимо, що при $\alpha=\chi$ умова (1) є умовою рівноваги прикладених до області D зосереджених сил. У цьому випадку будемо вважати також, щоби і головний момент був нульовим.

Розглядатимемо випадок, коли область D, яку займає тіло, обмежена, однозв'язна і відображається на одиничний круг в площині Z функцією $z = \omega(\varsigma)$, де

$$\omega(\varsigma) = c_1\varsigma + c_2\varsigma^2 + \ldots + c_n\varsigma^n, \ c_1, \ldots, c_n \text{ – задані сталі.}$$

Тоді умову на межі області запишемо [1]

$$\varphi(\sigma) + \overline{\Omega(\sigma)} = f(\sigma) \quad \text{при } |\sigma|=1, \qquad (2)$$

де

$$\begin{aligned} &\varphi(\varsigma) = \varphi_1(\omega(\varsigma)); \ \Omega(\varsigma) = \psi(\varsigma) + \overline{\omega}(1/\varsigma)\varphi'(\varsigma)/\omega'(\varsigma); \ \psi(\varsigma) = \psi_1(\omega(\varsigma)); \\ &\varphi'(\varsigma) = d\varphi/d\varsigma; \ f(\sigma) = f_1(\omega(\sigma)). \end{aligned} \qquad (3)$$

На підставі (1) та (3) визначаємо, що введені функції матимуть такі особливості:

$$\varphi(\varsigma) = \varphi_0(\varsigma), \ \Omega(\varsigma) = \Omega_0(\varsigma) + \overline{Q}(1/\varsigma).$$

Тут

$$\varphi_0(\varsigma) = -\sum_{j=1}^{n} P_j \ln(\varsigma - \varsigma_J); \ \Omega_0(\varsigma) = \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha \overline{P}_j \ln(\varsigma - \varsigma_j) + \gamma_j P_j \frac{1}{\varsigma - \varsigma_j} \right];$$

$$\gamma_j = \frac{\overline{\omega(\varsigma_j)} - \overline{\omega}(1/\varsigma_j)}{\omega'(\varsigma_j)}; \quad Q(\varsigma) = Q_1\varsigma + Q_2\varsigma^2 + \ldots + Q_n\varsigma^n;$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ – невідомі сталі. У функціях $\varphi_0(\varsigma)$ $\Omega_0(\varsigma)$ враховуються особливості функцій $\varphi_1(z)$ в точках z_j; поліном $Q(1/\varsigma)$ введений з врахуванням полюса n-го порядку в точці $\varsigma=0$ функції $\overline{\omega}(1/\varsigma)$ (невідомі коефіцієнти полінома визначимо далі).

Функції $\varphi(\varsigma)$, $\Omega(\varsigma)$ зобразимо у вигляді

$$\varphi(\varsigma) = \varphi_0(\varsigma) + \varphi_*(\varsigma), \quad \Omega(\varsigma) = \Omega_0(\varsigma) + \overline{Q}(1/\varsigma) + \Omega_*(\varsigma), \tag{4}$$

де $\varphi_*(\varsigma), \Omega_*(\varsigma)$ – аналітичні при $|\varsigma| \le 1$ функції. Після множення (2) і спряженої до неї рівності, на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma - \varsigma}$ та інтегрування вздовж дуги кола $|\sigma|=1$ з врахуванням (4), отримаємо

$$\varphi(\varsigma) = U(\varsigma) - Q(\varsigma), \quad \Omega(\varsigma) = V(\varsigma) + \overline{Q}(1/\varsigma). \tag{5}$$

Тут

$$\begin{gathered} U(\varsigma) = \varphi_0(\varsigma) - \overline{\Omega}_0(1/\varsigma) + F_1(\varsigma), \quad V(\varsigma) = \Omega_0(\varsigma) - \overline{\varphi}_0(1/\varsigma) + F_2(\varsigma), \\ F_1(\varsigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma - \varsigma}, \quad F_2(\varsigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma - \varsigma}; \end{gathered} \tag{6}$$

γ – контур кола $|\sigma|=1$.

Довільні сталі, що виникають при інтегруванні, які не впливають на напружений стан, в (5) та (6) зафіксовані. Після перетворень із (6) знаходимо

$$U(\varsigma) = U_0(\varsigma) + \sum_{j=1}^{n} \overline{\gamma}_j \overline{P}_j \frac{\varsigma_{j*}^2}{\varsigma - \varsigma_{j*}}; \quad V(\varsigma) = V_0(\varsigma) + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j P_j \frac{1}{\varsigma - \varsigma_j}, \tag{7}$$

де

$$U_0(\varsigma) = -\sum_{j=1}^{n} P_j \left[\ln(\varsigma - \varsigma_j) + \alpha \ln(\varsigma - \varsigma_{j*})\right];$$

$$V_0(\varsigma) = \sum_{j=1}^{n} \overline{P}_j \left[\ln(\varsigma - \varsigma_{j*}) + \alpha \ln(\varsigma - \varsigma_j)\right], \quad \varsigma_{j*} = 1/\overline{\varsigma}_j.$$

На підставі формул (3) та (5) знаходимо

$$\psi(\varsigma) = \overline{Q}(1/\varsigma) + \overline{\omega}(\frac{1}{\varsigma})\frac{\varphi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}(Q - U)' + V. \tag{8}$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів полінома використаємо те, що функція $\psi(\varsigma)$ є аналітичною функцією в околі точки $\varsigma=0$, тому вираз справа у формулі (8) є також аналітичною функцією. Розвинемо функцію, що стоїть у правій частині формули (8) в ряд Лорана в околі точки $\varsigma=0$. Вимагаючи, щоби коефіцієнти в цьому ряді при від'ємних степенях були нульовими, отримаємо систему рівнянь для визначення сталих $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$

$$\begin{cases} Q_1 + b_1\overline{X}_1 + \ldots + n\overline{X}_n b_n = 0, \\ Q_2 + b_2\overline{X}_1 + 2b_3\overline{X}_2 + \ldots + (n-1)b_n\overline{X}_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n + b_n\overline{X}_1 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

де $X_j=Q_j - U_j$, U_j – коефіцієнти розвинення в ряд Тейлора функції $U(\varsigma)$ в околі точки $\varsigma=0$. Тут використано розвинення в ряд Лорана в околі $\varsigma=0$ функції

$$\frac{\overline{\omega}(1/\varsigma)}{\omega'(\varsigma)} = \overline{b}_n\varsigma^n + \overline{b}_{n-1}\varsigma^{n-1} + \ldots + \overline{b}_0 + \sum_{k=1}^{n}\overline{b}_{-k}\varsigma^{-k}, \tag{10}$$

де b_j – комплексні сталі.

Систему (9) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} X_1 + \overline{X}_1 b_1 + \ldots + n\overline{X}_n b_n = -U_1, \\ X_2 + \overline{X}_1 b_2 + 2\overline{X}_2 b_3 + \ldots + (n-1)\overline{X}_{n-1} b_n = U_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n + \overline{X}_1 b_n = -U_n. \end{cases} \tag{11}$$

Перейшовши до спряжених величин в (11), отримаємо

$$\begin{cases} \overline{X}_1 + X_1\overline{b}_1 + \ldots + nX_n\overline{b}_n = -\overline{U}_1, \\ \overline{X}_2 + X_1\overline{b}_2 + 2X_2\overline{b}_3 + \ldots + (n-1)X_{n-1}\overline{b}_n = -\overline{U}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{X}_n + X_1\overline{b}_n = -\overline{U}_n. \end{cases} \tag{12}$$

Об'єднана система (11, 12) є лінійно залежною [1].

Для знаходження однозначного розв'язку отриманої системи достатньо зафіксувати уявну частину [1]. Для цього замінимо в (12) перше рівняння на

$$\frac{X_1}{\omega'(0)} - \frac{\overline{X}_1}{\overline{\omega}(0)} = 0.$$

Випишемо співвідношення, які потрібні для обчислення пружно-деформованого стану пластинчастого елемента.

А. Переміщення та напруження визначають через введені функції за формулами

$$2G(u - iv) = \chi\overline{\varphi(\varsigma)} - \Omega(\varsigma) - A_1\varphi'(\varsigma)\omega'(\varsigma),$$
$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(\varsigma),\ \ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2F(\varsigma), \tag{13}$$

де

$$\Phi(\varsigma) = \frac{\varphi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)},\ \ F(\varsigma) = A_1(\varsigma)\varphi''(\varsigma) + B_1(\varsigma)\Phi(\varsigma) + \Omega_1,\ \ \Omega_1(\varsigma) = \frac{\Omega'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)},$$
$$A_1(\varsigma) = \frac{\overline{\omega(\varsigma)} - \overline{\omega}(1/\varsigma)}{\left[\omega'(\varsigma)\right]^2},\ \ B_1(\varsigma) = \frac{\overline{\omega'}(1/\varsigma)}{\varsigma^2\omega'(\varsigma)} - A(\varsigma)\omega''(\varsigma).$$

Похідні від комплексних потенціалів мають вигляд

$$\varphi'(\varsigma) = U'(\varsigma) - Q'(\varsigma), \varphi''(\varsigma) = U''(\varsigma) - Q''(\varsigma),$$
$$\Omega'(\varsigma) = V'(\varsigma) - \overline{Q'}(1/\varsigma)/\varsigma^2.$$

Тут

$$U'(\varsigma) = U_0'(\varsigma) - \sum_{j=1}^{n}\overline{\gamma}_j\overline{P}_j\frac{\varsigma_{j*}^2}{(\varsigma - \varsigma_{j*})^2}; U''(\varsigma) = U_0'' + \sum_{j=1}^{n}2\overline{\gamma}_j\overline{P}_j\frac{\varsigma_{j*}^2}{(\varsigma - \varsigma_{j*})^3};$$
$$V'(\varsigma) = V_0' - \sum_{j=1}^{n}\gamma_j P_j\frac{1}{(\varsigma - \varsigma_j)^2};\ \ V_0'(\varsigma) = \sum_{j=1}^{n}\overline{P}_j\left[\frac{1}{\varsigma - \varsigma_{j*}} + \frac{\alpha}{\varsigma - \varsigma_j}\right];$$
$$U_0'(\varsigma) = -\sum_{j=1}^{n}P_j\left[\frac{1}{\varsigma - \varsigma_j} + \frac{\alpha}{\varsigma - \varsigma_{j*}}\right]; U_0''(\varsigma) = \sum_{j=1}^{n}P_j\left[\frac{1}{(\varsigma - \varsigma_j)^2} + \frac{\alpha}{(\varsigma - \varsigma_{j*})^2}\right].$$

Б. Коефіцієнти розвинення в ряд функції U, які входять до правої частини системи рівнянь, визначають за формулами

$$U_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{P_j}{n}(\varsigma_j^{-n} + \alpha\varsigma_{j*}^{-n} - \overline{P}_j\overline{\gamma}_j\varsigma_{j*}^{-n+1}\right) + f_n(\varsigma),$$

де f_n – коефіцієнт розвинення в ряд Тейлора функції $F_1(\varsigma)$ в околі точки $\varsigma=0$.

В. Визначимо коефіцієнти розвинення $b_1,\ldots, b_n$. Для цього (11) запишемо у вигляді

$$\frac{\overline{c}_1}{\varsigma} + \frac{\overline{c}_2}{\varsigma^2} + \ldots + \frac{\overline{c}_n}{\varsigma^n} = (\overline{b}_n\varsigma^n + \overline{b}_{n-1}\varsigma^{n-1} + \ldots + \overline{b}_0 + \sum_{k=1}^{n}\overline{b}_{-k}\varsigma^{-k})(c_0' + c_1'\varsigma + \ldots + c_{n-1}'\varsigma^{n-1}),$$

де $c_j' = (j+1)c_{j+1}$. Перемноживши справа ряди і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ς, отримаємо рекурентні формули для знаходження коефіцієнтів

$$b_n = \frac{c_n}{\bar{c}_0}; b_{n-k} = \frac{c_{n-k}}{\bar{c}_0} - \frac{b_{n-k+1}c_1' + \ldots + b_n c_k'}{\bar{c}_0}, k = 1, \ldots, n,$$

$$b_{n+k} = -\frac{b_{n-k+1}c_1' + \ldots + b_{2n-k-1}c_{n-1}'}{\bar{c}_0}, k = n+1, \ldots$$

Перетворення побудованого розв'язку. Проведені розрахунки при достатньо великих n показали, що при зменшенні значень змінних ς та ς_j точність обчислених напружень і переміщень суттєво знижується. Це пов'язано з тим, що в наведений розв'язок входять величини, які визначають через поліноми від змінних $1/\varsigma$ та $1/\varsigma_j$, які можуть набувати великих значень. При обчисленнях відбувається втрата точності, оскільки виникає необхідність віднімання великих чисел. Тому наведений достатньо простий розв'язок може бути використаний тільки при невеликому значенні n (n-ступінь полінома ω) або в околі границі області за умови, що сили також розміщені близько границі.

Провівши перетворення наведених співвідношень так, щоб у розв'язок не входили вирази, які мають великі значення (процес проведення перетворень опускаємо у зв'язку з обмеженням тексту), запишемо похідні від знайдених функцій, які потрібні для знаходження напружень і переміщень

$$\Phi(\varsigma) = \frac{\varphi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}; \Psi(\varsigma) = \frac{\psi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}; \frac{d\Phi(\varsigma)}{dz} = \frac{\varphi''(\varsigma)\omega'(\varsigma) - \varphi'(\varsigma)\omega''(\varsigma)}{\left(\omega'(\varsigma)\right)^3};$$

$$\varphi'(\varsigma) = U_0'(\varsigma) + \sum_{j=1}^{n} \overline{\Gamma}_j \overline{P}_j \varsigma_{j^*} \frac{n\varsigma - (n+1)\varsigma_{j^*}}{(\varsigma - \varsigma_{j^*})^2} \varsigma^n - S'(\varsigma),$$

$$\varphi''(\varsigma) = U_0''(\varsigma) + \sum_{j=1}^{n} \overline{\Gamma}_j \overline{P}_j \varsigma_j \frac{n(n-1)\varsigma^2 - 2(n^2-1)\varsigma\varsigma_{j^*} + n(n+1)\varsigma_{j^*}^2}{(\varsigma - \varsigma_{j^*})^2} \varsigma^{n-1} - S''(\varsigma),$$

$$\psi(\varsigma) = \psi_A(\varsigma) + \psi_B(\varsigma),$$

$$\psi_A'(\varsigma) = V_0'(\varsigma) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{P}_j \overline{\Gamma}_j \varsigma_j}{\omega'(\varsigma)(\varsigma - \varsigma_j^{*})^2} \left(\frac{\omega_1'(\varsigma)\omega'(\varsigma) - \omega_1(\varsigma)\omega''(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)} \left[n\varsigma - (n+1)\varsigma_{j^*} \right] + \right.$$

$$\left. + \omega_1(\varsigma) \frac{(n+2)\varsigma_{j^*} - n\varsigma}{\varsigma - \varsigma_{j^*}} \right);$$

$$\psi_B'(\varsigma) = w'(\varsigma)\left[S'(\varsigma) - U_0'(\varsigma)\right] + w(\varsigma) \cdot \left[S''(\varsigma) - U_0''(\varsigma)\right] +$$

$$+ S_*'(\varsigma) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left[\overline{\frac{\omega(\varsigma_j)}{\omega'(\varsigma_j)}} - w(\varsigma_j) \right] \frac{P_j}{(\varsigma - \varsigma_{j^*})^2} + \alpha P_j \frac{w(\varsigma_{j^*})}{(\varsigma - \varsigma_{j^*})^2},$$

де

$$\omega_1(\varsigma) = \varsigma^n \overline{\omega}(1/\varsigma) = \bar{c}_1\varsigma^{n-1} + \bar{c}_2\varsigma^{n-2} + \ldots + \bar{c}_n;$$

$$\varphi(\varsigma) = U_0(\varsigma) + \sum_{j=1}^{n} \overline{\Gamma}_j \overline{P}_j \frac{\varsigma_j^*}{\varsigma - \varsigma_j^*}\varsigma^{n+1} - S(\varsigma),$$

$$\Gamma_j = \gamma_j \cdot \varsigma_j; \;\; S(\varsigma) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\gamma}_j \overline{P}_j \varsigma_j^{-k-1}; \;\; w(\varsigma) = \frac{\overline{\omega}(1/\varsigma)}{\omega'(\varsigma)} - \left(\frac{\bar{b}_n}{\varsigma^n} + \frac{\bar{b}_{n-1}}{\varsigma^{n-1}} + \ldots + \frac{\bar{b}_1}{\varsigma}\right).$$

Використовуючи побудовані необхідні співвідношення, які підставляємо у формули напружень і переміщень, одержуємо розв'язки плоскої задачі теорії пружності.

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.

RESEARCH OF THE RESILIENT STATE OF PLATES ELEMENT OF CONSTRUCTION, THAT IS UNDER ACTION OF THE CONCENTRATED POWER FACTORS

Volodymyr Maksymovych[1], Ostap Dumanskiy[2]

[1]*Lutsk State Technical University,*
Lvivska Str., 75, 43018 Lutsk, Ukraine
[2]*National Forestry University of Ukraine,*
General Chuprinka Str., 103, 79057 Lviv, Ukraine

The generalized solution of elastic-deformable state for a lamellar element which is weakened by curvilinear apertures and situated under action of concentrated force factors has been developed using analytical functions and conformal mapping apparatus.

Key words: plate, concentrated power factors, concentration of tensions.

Стаття надійшла до редколегії 07.09.2005
Прийнята до друку 22.11.2006