

УДК 539.3

КОНТАКТ ЖОРСТКИХ ЗНОШУВАНИХ ТІЛ ПІД ДІЄЮ ЗМІНЮВАНОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Георгій СУЛИМ¹, Олександр ЛЮБІН²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

² Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, 29016 Хмельницький, Україна

Запропонована математична модель контактної взаємодії двох жорстких тіл з урахуванням зношування одного з них за моделлю старіння. З використанням аналітичного розв'язку контактної задачі сформульовано задачу керування зношуванням, коли як керуючу функцію використано діюче на з'єднання змінне навантаження. Задача керування розв'язана числовим методом. Для конкретного прикладу вивчено вплив параметрів у законі зношування на ресурс з'єднання.

Ключові слова: контактні напруження, зношування, модель старіння, керування зношуванням, циліндричний вузол тертя.

Процеси контактної взаємодії між елементами трибосистем ковзання зумовлені дією постійного чи змінного навантаження. У низці праць [1, 2, 4, 8], що містять аналітичні підходи до розв'язування контактних задач зі зношуванням, накладені на змінюване в часі навантаження обмеження, пов'язані лише з нехтуванням динамічними ефектами [1] чи необхідністю збільшення розмірів контактної області [2, 8]. Змінне навантаження використане як функції керування в задачах про керування зношуванням [6, 7]. Зазначимо, що можливість керування зношуванням пов'язана з вирішенням проблеми подовження надійної роботи трибосистеми, зокрема, а також із прогнозуванням її ресурсу.

Як розвиток результатів [7], ми розглянули задачу про керування зношуванням під час контакту жорстких тіл для однієї з моделей неусталеного зношування.

У працях [2, 9, 10] отримані

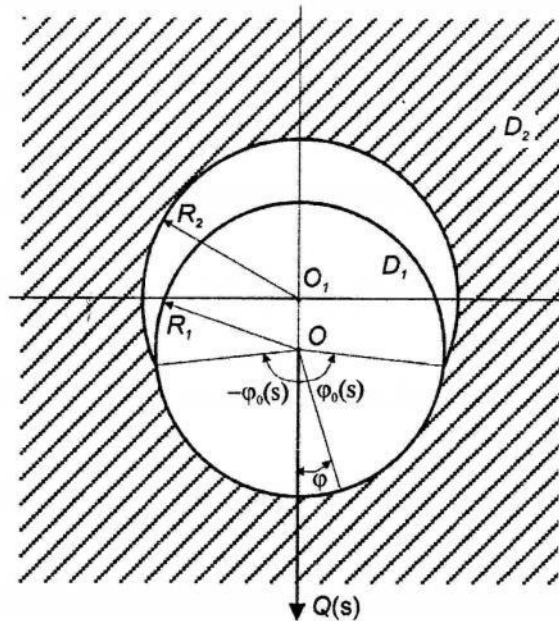


Рис. 1. Схема з'єднання

розв'язки зносоконтактних задач для пружних елементів з'єднань і зроблено висновок про те, що для зростаючого зношування зазначені розв'язки асимптотично наближаються до розв'язків спрощених задач, в яких елементи вважаються абсолютно жорсткими. Як видно з подальшого викладення, "жорстке" формулювання контактної задачі дає змогу одержати її точний аналітичний розв'язок, а це спрощує формулювання та розв'язування задачі керування.

Розглянемо контактну взаємодію між жорстким довгим суцільним циліндром D_1 радіуса R_1 , який з радіальним початковим прозором Δ поміщений у жорсткий корпус (обойму) D_2 внутрішнього радіуса $R_2 = R_1 + \Delta$ (рис. 1). Циліндр D_1 обертається навколо осі з постійною кутовою швидкістю ω та притиснутий до внутрішньої поверхні корпусу D_2 вертикальним змінюваним навантаженням $Q(s)$, яке припадає на одиницю довжини циліндра. Осі тіл D_1, D_2 – паралельні; зміщення осі циліндра колінеарне до діючого навантаження.

За припущенням, під час контактної взаємодії відбувається зношування внутрішньої поверхні корпусу, силами тертя для визначення нормальних контактних напружень та зношуванням циліндра нехтуємо.

Математична модель зносоконтактної задачі містить:

1) умову контакту

$$u_w(\varphi, s) = \Delta \left[\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0(s)} - 1 \right]; \quad (1)$$

2) умову рівноваги циліндра D_1 –

$$Q(s) = R_1 \int_{-\varphi_0(s)}^{\varphi_0(s)} \sigma(\varphi, s) \cos \varphi d\varphi; \quad (2)$$

3) закон зношування внутрішньої поверхні корпусу

$$\frac{\partial u_w(\varphi, s)}{\partial s} = k_w \alpha [\sigma(\varphi, s)]^m s^{\alpha-1}. \quad (3)$$

Тут $u_w(\varphi, s)$ – лінійне зношення; $\sigma(\varphi, s)$ – контактний тиск; φ – кутова координата, що веде відлік від лінії дії сили $Q(s)$ ($-\varphi_0(s) \leq \varphi \leq \varphi_0(s)$); $\varphi_0(s)$ – змінюваний півкут контакту; s – шлях тертя для точки корпусу з координатою $\varphi = 0$, яка контактує від самого початку процесу; $k_w, m \geq 1, 0 < \alpha \leq 1$ – числові характеристики зношування матеріалу, які визначають на підставі експериментальних випробовувань.

Закон зношування у формі (3) відповідає зношуванню за моделлю старіння [5], причому для $\alpha = 1$ маємо загальний степеневий закон залежності інтенсивності зношування від контактної тиску.

Мета розв'язання зносоконтактної задачі – визначити кут $\varphi_0(s)$, контактний тиск $\sigma(\varphi, s)$ та зношування $u_w(\varphi, s)$ за заданих прозору та навантажувальної сили. Для досягнення мети спочатку здиференціюємо за s обидві частини (1), внаслідок чого

$$\frac{\partial u_w(\varphi, s)}{\partial s} = \Delta \cos \varphi \frac{\sin \varphi_0(s) d\varphi_0(s)}{\cos^2 \varphi_0(s) ds}. \quad (4)$$

З урахуванням закону зношування (3) з (4) отримаємо для контактної тиску залежність

$$\sigma(\varphi, s) = \left[\frac{\Delta}{k_w \alpha s^{\alpha-1}} \frac{\sin \varphi_0(s) d\varphi_0(s)}{\cos^2 \varphi_0(s) ds} \right]^{1/m} \cos^{1/m} \varphi. \quad (5)$$

Підставивши (5) в умову рівноваги (2), обчислюємо рівнодійну контактної тиску

$$Q(s) = R_1 \left[\frac{\Delta}{k_w \alpha s^{\alpha-1}} \frac{\sin \varphi_0(s) d\varphi_0(s)}{\cos^2 \varphi_0(s) ds} \right]^{1/m} F[\varphi_0(s), m], \quad (6)$$

$$F[\varphi_0(s), m] = \int_{-\varphi_0(s)}^{\varphi_0(s)} \cos^{m+1} \varphi d\varphi$$

і, порівнюючи співвідношення (5) і (6), одержимо залежність

$$\sigma(\varphi, s) = \frac{Q(s) \cos^{1/m_2} \varphi}{R_1 F[\varphi_0(s), m]}, \quad (7)$$

згідно з якою тиск не залежить безпосередньо від параметра α у законі зношування (3).

На підставі диференціального рівняння (6) знаходимо залежність між s та $\varphi_0(s)$

$$\frac{k_w \alpha}{\Delta R_1^m} \int_0^s \xi^{\alpha-1} [Q(\xi)]^m d\xi = \int_0^{\varphi_0(s)} \frac{\sin z}{\cos^2 z} F^m[z, m] dz. \quad (8)$$

Після його розв'язання за відомою функцією $\varphi_0(s)$ лінійне зношування $u_w(\varphi, s)$ внутрішньої поверхні корпусу визначається за допомогою співвідношення (1).

Для жорстких тіл D_1, D_2 з формули (7) випливає, що контактний тиск не є нульовим на краях області контакту, що збігається з (2.33) [2, с. 92].

Формулювання та розв'язування задачі керування. На підставі отриманого аналітичного розв'язку зносоконтактної задачі (1)–(3) сформулюємо задачу керування зношуванням внутрішньої поверхні корпусу для подовження ресурсу заданого з'єднання.

Відповідно до конструкторської практики технічний ресурс вузла тертя визначають як напрацювання (в одиницях часу чи довжини шляху тертя) від початку експлуатації до переходу його у так званий граничний стан, за якого його подальше використання недоцільне або недопустиме. Досягнення граничного стау зумовлене одним з факторів: а) цілковитим зношуванням антифрикційного елемента (покриття); б) гранично-допустимими значеннями радіального прозору чи зношування; в) гранично-допустимим кутом контакту.

На підставі (1) максимальне зношування поверхні корпусу простежується в точці з координатою $\varphi = 0$, тобто

$$\max[u_w(\varphi, s)] = u_w(0, s) = \Delta \left(\frac{1}{\cos \varphi_0(s)} - 1 \right). \quad (9)$$

Нехай граничний стан спряження визначається граничнодопустимим зношуванням u_w^{zp} або пов'язаним із ним граничнодопустимим кутом контакту $2\varphi_0^{zp}$. З (9) впливає конкретизація цієї залежності у вигляді

$$u_w^{zp} = \Delta \left(\frac{1}{\cos \varphi_0^{zp}} - 1 \right), \quad (10)$$

або

$$\varphi_0^{zp} = \arccos \frac{\Delta}{u_w^{zp} + \Delta}. \quad (11)$$

Подамо діюче навантаження $Q(s)$, яке за змістом задачі керування зростає зі зміною шляху тертя s , у вигляді такої функції:

$$Q(s) \equiv Q(s, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \mu_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2,$$

обмежимо $Q(s)$ граничним навантаженням Q_{zp}

$$Q(s) \leq Q_{zp}. \quad (12)$$

Після цього сформулюємо задачу керування так: визначити такі значення параметрів μ_0, μ_1, μ_2 функції $Q(s)$, щоб забезпечити досягнення заданих величин u_w^{zp} або φ_0^{zp} за максимально можливого значення шляху тертя $s = s_{\max}$.

Відповідно до цього математична модель задачі керування полягає у знаходженні максимуму функції

$$V(s, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{k_w \alpha}{\Delta R_1^m} \int_0^s \xi^{\alpha-1} (\mu_0 + \mu_1 \xi + \mu_2 \xi^2)^m d\xi \quad (13)$$

з обмеженнями

$$\begin{aligned} \mu_0 > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, s > s_{\min}, \mu_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2 \leq Q_{zp}, \\ |U(\varphi_0^{zp}) - V(s, \mu_0, \mu_1, \mu_2)| \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (14)$$

де s_{\min} – деяке задане мінімальне значення шляху тертя, яке може змінюватися під час розв'язування задачі для досягнення $s = s_{\max}$; ε – точність визначення кореня рівняння (8)

$$U(\varphi_0^{zp}) = \int_0^{\varphi_0^{zp}} \frac{\sin z}{\cos^2 z} \left[\int_{-z}^z (\cos \varphi)^{\frac{1}{m}+1} d\varphi \right]^m dz.$$

Розв'язування задачі (13), (14) можна успішно виконувати, використовуючи числові методи. Це можливе і з використанням комерційних математичних пакетів Mathcad, Mathematica, Matlab, Derive. Наприклад, Mathcad має для вирішення цього завдання ефективно діючу вбудовану функцію Maximize [3].

Хороша керованість процесом числового розв'язування задачі (13), (14) забезпечується поряд з математичною розробленістю реалізації багатьох числових процедур, а також і тим, що для знайдених числових значень параметрів μ_0, μ_1, μ_2 і відповідного закону зміни навантаження $Q(s)$ рівняння (8) має дійсні додатні корені (значення шляху тертя s) для всього проміжку зміни кутів $\varphi_0(s) \in [0, \varphi_0^{zp}]$.

Для вивчення впливу параметрів m та α на величину ресурсу s_{\max} , зміну навантаження $Q(s)$ та контактний тиск $\sigma_{\max} = \sigma(0, s)$ зроблено тестові розрахунки для таких даних:

$$R_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \Delta = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}; k_w = 1 \cdot 10^{-15} \text{ Па}^{-m} \cdot \text{м}^{1-\alpha};$$

$$\varphi_0^{zp} = 50^\circ (0,873 \text{ рад}); Q_{zp} = 1 \cdot 10^6 \text{ Н/м.}$$

Рис. 2–4 відображають графіки зміни шляху тертя, навантаження та максимального контактного тиску для наведених геометричних даних і величин $k_w, Q_{zp}, \varphi_0^{zp}$ для п'яти різних комбінацій значень параметрів m, α . Номери кривих на усіх рисунках відповідають таким значенням параметрів: 1. $m = 1; \alpha = 0,7$; 2. $m = 1,2; \alpha = 0,7$; 3. $m = 1,4; \alpha = 0,7$; 4. $m = 1; \alpha = 0,5$; 5. $m = 1; \alpha = 1$. Оскільки розкид у визначенні шляху тертя за цих параметрів може сягати п'яти порядків, то для можливості відображення отриманих результатів на одному рисунку (рис. 2) введені

масштабні множники: у зв'язку з чим введена функція $S = 10^{-k}s$, де для відповідних кривих – 1. $k = 5$; 2. $k = 4$; 3. $k = 3$; 4. $k = 8$; 5. $k = 4$.

Виконані обчислення дають змогу зробити такі основні висновки.

1. Зміною навантаження вдається досягти максимуму шляху тертя, а отже, й оптимізувати процес зношування пари тертя.

2. Оптимальний шлях тертя досягається під час пришвидшеного порівняно зі збільшенням внаслідок зношування кута контакту збільшення

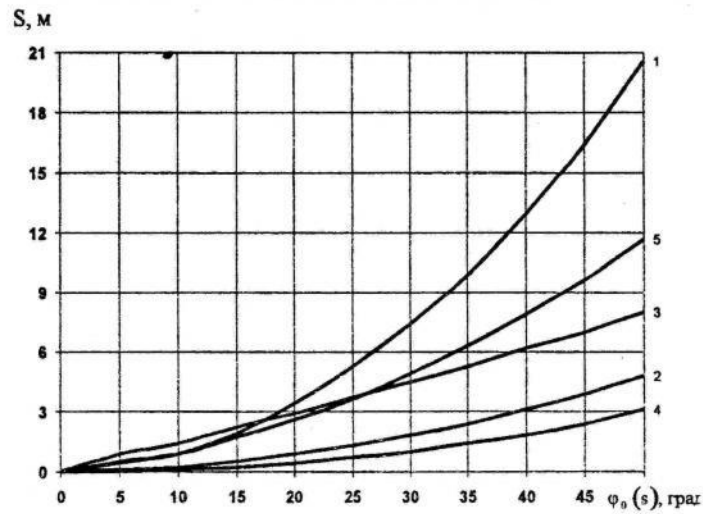


Рис. 2. Залежність $[s, \varphi_0(s)]$

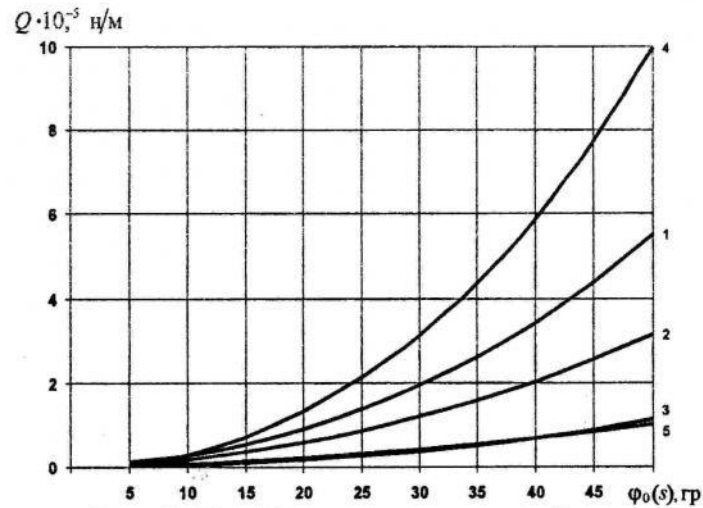


Рис. 3. Графіки навантаження $Q(s)$

навантаження Q вузла тертя. Тобто, поступове розвантажування чи введення ощадних режимів навантажування не вимагається.

3. Під час зростання параметра m в діапазоні $[1; 1,4]$ ресурс з'єднання (максимальний шлях тертя) зменшується приблизно у $2,5 \cdot 10^2$ раз. Зміна

параметра α в межах $[0,5; 1]$ спричиняє ще суттєвіший вплив, зменшуючи ресурс приблизно у $2,7 \cdot 10^3$ разів.

4. Зміна параметрів m, α якісно однаково впливає і на зміну максимального навантаження, і на максимальний контактний тиск: зміна параметра m від 1 до 1,4 зменшує максимальне навантаження і максимальний контактний тиск приблизно у 5 разів; зміна параметра α від 0,5 до 1 зменшує максимальне навантаження і максимальний контактний тиск приблизно у 10 разів.

5. Те, що на рис. 2 лінії 1 і 5 перетинають лінію 1, а на рис. 4 крива 4 перетинає лінії 1 та 2 і лінія 3 та 5 теж мають взаємоперетин, свідчить про взаємний вплив параметрів m та α на процеси зношування і їхню різну роль за малих і великих областей третьового контакту.

Для оцінки величин максимальних шляхів тертя (ресурсу) s_{\max} , одержаних в результаті розв'язання задачі керування, порівняно зі шляхами тертя s_{\max}^* при дії

постійного навантаження, виконані розрахунки величин s_{\max}^* для:

- $Q(s) = Q_{zp}$;
- $Q(s) = Q(s_{\max})$;
- $Q(s) = \eta Q(s_{\max})$,

де коефіцієнт η підбирали так, щоб для досягнення кута φ_0^{zp} шляхи s_{\max} та s_{\max}^* були однакові.

Для постійного навантаження Q_0 залежність між s та $\varphi(s)$ на підставі (8) набуває вигляду

$$s = \left[\frac{\Delta R_1^m}{k_w Q_0^m} \int_0^{\varphi_0(s)} \frac{\sin z}{\cos^2 z} F^m[z, m] dz \right]^{\alpha^{-1}}, \quad (15)$$

який для згаданих випадків а-в дає змогу знаходити

$$s_{\max}^* = \left[\frac{\Delta R_1^m}{k_w Q_0^m} \int_0^{\varphi_0^{zp}} \frac{\sin z}{\cos^2 z} F^m[z, m] dz \right]^{\alpha^{-1}}. \quad (16)$$

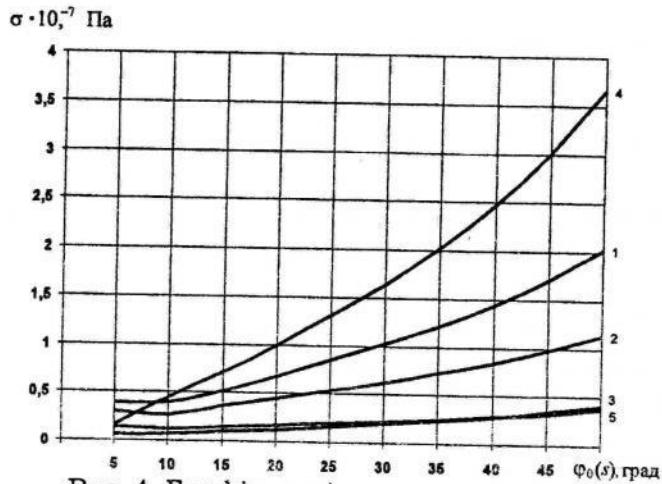


Рис. 4. Графіки зміни максимального контактного тиску $\sigma_{\max} = \sigma(0, s)$

Розрахунки s_{\max}^* виконані для тих самих даних, що і в задачі керування, при цьому отримані такі найважливіші результати. 1. Величини s_{\max}^* для $Q(s) = Q_{gr}$ від 9 до $7 \cdot 10^3$ разів менші за величини s_{\max} залежно від параметрів m та α . На зміну ресурсу суттєвіше впливає зміна параметра m , ніж параметра α . 2. Величини s_{\max}^* для $Q(s) = Q(s_{\max})$ від 2 до 9 разів менші за величини s_{\max} . Для $\alpha = 0,7$ і $m \in [1; 1,4]$ різниця в ресурсах змінюється від 4 до 9 разів, а для $m = 1$ і $\alpha \in [0,5; 1]$ ця різниця сягає від 2 до 9 разів. 3. Для того щоб величини s_{\max} і s_{\max}^* були приблизно однаковими, навантаження у з'єднанні повинно бути $\eta Q(s_{\max})$, де $\eta \in [0,3; 0,5]$ для розглянутого діапазону зміни параметрів m та α .

Отож, ми з'ясували, що за керованого процесу зношування прогнозований ресурс з'єднання суттєво зростає порівняно з ресурсом, розрахованим за дії постійного навантаження.

-
1. Александров В.М., Коваленко Е.В. Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал-втулка // Трение и износ. – 1987. – 8. – № 6. – С. 985–995.
 2. Галахов М.А., Усов П.П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. – М., 1990.
 3. Дьяконов В. Mathcad 2000: Учебный курс. – С.-Пб., 2000.
 4. Коваленко Е.В. К расчету изнашивания сопряжения вал-втулка // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 6. – С. 66–72.
 5. Кузьменко А.Г., Кузьменко В.А., Насер Гассан Ахмед. Модели переходных процессов при изнашивании // Проблемы трибологии /Problems of Tribology/. – 1997. – № 3. – С. 81–121.
 6. Левицький В.П., Бурнаєв О.М. Оптимізація зношування з урахуванням теплоутворення від тертя // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1993. – 29. – № 5. – С. 91–94.
 7. Любин А.Г. Об управлении процессом изнашивания вкладыша радиального подшипника скольжения // Проблемы трибологии /Problems of Tribology/. – 2003. – № 2. – С. 81–85.
 8. Солдатенков И.А. Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. – 1987. – 8. – № 2. – С. 206–213.
 9. Солдатенков И.А. О необходимых условиях существования установившегося режима при изнашивании тонких покрытий // Трение и износ. – 1989. – 10. – № 5. – С. 837–843.

10. Усов П.П. Внутренний контакт цилиндрических тел близких радиусов при изнашивании их поверхностей // Трение и износ. – 1985. – 6. – № 3. – С.403–414.

CONTACT PROBLEM FOR RIGID WEARING BODIES UNDER VARIABLE LOAD

Georgij Sulym¹, Olexandr Lyubin²

*¹Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

*²National University of Khmelnytsky,
Instytuyska Str., 11, 29016 Khmelnytsky, Ukraine*

The mathematical model of contact interaction of rigid bodies with take into consideration for wear are proposed. On based by analytical solving tribocontact problem life-time for joints and numerical solution for control problem of wear are obtained. The results of numerical analysis are presented.

Key words: contact stress, wear, ageing model, wear control, cylindrical friction joint.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.2005
Прийнята до друку 22.11.2006