ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип. 65. С.158-163

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Mat. 2006. Vol.65. P.158-163

УДК 539.3

ЧИСЛОВІ АЛГОРИТМИ ПРИ ПОБУДОВІ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ ТЕРМООБРОБКИ СКЛЯНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Олександр ГАЧКЕВИЧ[1,2], Микола ГАЧКЕВИЧ[1], Євген ІРЗА[1], Зигмунд КАСПЕРСЬКИЙ[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, 79053 Львів, Україна
[2]Політехніка Опольська, вул. Станіслава Миколайчука, 5, 45-271 Ополє, Польща

Запропоновано методику побудови оптимальних за міцнісними та деформаційними характеристиками (напруженнями та деформаціями) режимів високотемпературної термообробки широко використовуваних в інженерній практиці скляних тіл обертання. Розглянуто клас нелінійних некласичних екстремальних задач механіки, які виникають при такій оптимізації. В зв'язку з підвищеними температурами обробки згадані задачі описуються послідовно зв'язаними системами диференційних рівнянь теплопровідності і термов'язкопружності, які є нелінійними за рахунок температурної залежності характеристик матеріалу, функціональних нелінійних критеріїв оптимальності й обмежень на функції керування та параметри стану.

Ключові слова: термов'язкопружність, нелінійні задачі, числові алгоритми.

Є актуальною розробка методики побудови оптимальних за міцнісними та деформаційними характеристиками (напруженнями та деформаціями) режимів високотемпературної термообробки широко використовуваних в інженерній практиці скляних тіл обертання. В літературі відоме формулювання задач оптимізації режимів нагріву скляних тіл, коли характеристики матеріалу приймають постійними, а процес деформування є пружним. У праці розглянуто клас нелінійних некласичних екстремальних задач механіки, які виникають при такій оптимізації, в яких враховано в'язкопружний характер деформування при підвищених температурах, температурну залежність характеристик матеріалу, ефект склування, а також наявність функціональних нелінійних критеріїв оптимальності й обмежень на функції керування та параметри стану.

Вихідні допущення та формулювання задачі. З метою отримання заданого рівня залишкових напружень у скляних тілах обертання типова термообробка таких тіл відбувається за два етапи. На першому етапі тіло нагрівається від температури t_0 до деякої максимальної температури t^*, яка є вищою від температури склування t_g [1], а на другому – до початкової температури.

Сформулюємо математичну модель кількісного опису й оптимізації за напруженнями і деформаціями фізико-механічних процесів, які відбуваються при такій термообробці.

Приймаємо, що віднесене до криволінійної ортогональної системи координат $Ox^1x^2x^3$, скляне тіло займає область Ω евклідового простору R^3 і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею Г. Тіло піддається нагріву зовнішнім середовищем з температурою t_c через поверхню Γ. В тілі є розподілені джерела тепла густиною Q. Максимальна температура нагріву тіла є t* (порядку 900°C для скла С-93). Потім тіло охолоджується зовнішнім середовищем з температурою t_c до стану з максимальною температурою t_k, яка є нижчою за температуру склування. На частині Γ_u поверхні тіла Г задані переміщення $\overline{u} = \left(u_1^0, u_2^0, u_3^0\right)$, а на частині Γ_σ – силове навантаження, яке характеризується вектором $\overline{p} = (p^1, p^2, p^3)$, $(\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma)$.

Задачу формулюємо в квазістатичному формулюванні і в переміщеннях (з врахуванням залежності теплофізичних характеристик скла від температури).

За прийнятих припущень розподіл температури в тілі описується рівнянням теплопровідності [1]

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla(\lambda \nabla t) + Q \tag{1}$$

при таких граничних і початкових умовах

$$\left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha(t - t_c)\right]_\Gamma = 0\,;\; t(M,0) = t_0. \tag{2}$$

У зв'язку з тим, що максимальні температури нагріву є порядку 900°C, коефіцієнт α може враховувати теплообмін випромінюванням з зовнішнім середовищем [1].

Для кількісного опису напружено-деформованого стану скляних тіл при тепловому навантаженні врахуємо, що приріст компонент тензора повної деформації має вигляд [1]

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^t + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^{ost}. \tag{3}$$

Тут $d\varepsilon_{ij}^e = \dfrac{1}{2G} dS_{ij} + \dfrac{1}{9K} g_{ij} d\sigma$ – приріст компонент тензора пружної деформації в діапазоні температур $[t_0, t_g]$; $d\varepsilon_{ij}^t = \alpha_t g_{ij} dt$ – приріст компонент тензора термічної деформації; $d\varepsilon_{ij}^c = \dfrac{1}{2G\eta} S_{ij} d\tau$ – приріст компонент тензора деформації в'язкості в діапазоні температур $[t_g, t^*]$; $d\varepsilon_{ij}^{ost} = -\alpha_t g_{ij} d\Phi$ – приріст компонент тензора залишкової деформації при проходженні температури склування tg;. S_{ij}, σ – відповідно девіаторна та кульова частини тензора напружень; α_t – лінійний коефіцієнт температурного розширення скла; K – модуль об'ємного стискування; G – модуль зсуву; η – коефіцієнт в'язкості; τ – час; g_{ij} – коваріантний метричний тензор.

Крім співвідношень (1)–(3), в області $\overline{\Omega}$ повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\nabla_j \sigma^{ij} + F^i = 0 \tag{4}$$

і механічні граничні умови

$$\left(n_j \sigma^{ij} - p^i\right)_{\Gamma_\sigma} = 0; u_{i/\Gamma_u} = u_i^0; \ (i = 1,..,3). \tag{5}$$

Обмежимось випадком малих деформацій. Зв'язок між компонентами тензора деформацій $\hat{\varepsilon}$ і вектором переміщень $\overline{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ є лінійним, тобто

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right). \tag{6}$$

Співвідношення (1)–(6) становлять повну систему рівнянь прямої задачі для визначення температурного поля, вектора переміщень, тензорів деформацій і напружень при заданих значеннях температури навколишнього середовища t_c, густині внутрішніх джерел тепла Q і зовнішнього навантаження $\overline{p}$.

Задача оптимізації. Формулюється задача оптимізації за напруженнями і деформаціями режимів теплового навантаження (нагріву і охолодження) тіла при заданих механічних умовах.

На етапі нагріву від стану з початковою температурою t_0 до стану з максимальною температурою t^* функцією управління є температура навколишнього середовища t_c (позначимо її надалі умовно h), густина внутрішнього джерела тепла Q вважається заданою.

Задана функція управління h задовольняє такі умови:

$$h \in \left\{S_1\right\} : \forall h \in \left\{S_1\right\}, \exists \tau^* \in [0, \tau], \ \max t\left(M, \tau^*\right) = t^*, M \in \overline{\Omega}, \tag{7}$$

при заданих обмеженнях на температуру, напруження і деформації

$$t_0 \leq t(M, \tau) \leq t^*; \max \sigma_i (M, \tau) \leq \sigma_d; \max \varepsilon_i \leq \varepsilon_d;$$

$$M \in \overline{\Omega}, \tau \in \left[0, \tau^*\right], i = 1,..,3, \tag{8}$$

де σ_i, ε_i – головні значення тензора нормальних напружень і деформацій; σ_d, ε_d – допустимі рівні напружень і деформацій; S_1 – множина функцій, на яких шукається розв'язок.

За критерій оптимальності вибираємо мінімальний час нагрівання до температури t^*. Тоді

$$I = \min \tau^* . \tag{9}$$

На етапі охолодження від стану з максимальною температурою t^* до стану з максимальною температурою t_k функція управління h повинна задовольняти умови

$$h \in \{S_2\} \ : \forall h \in \{S_2\}, \exists \tau_k \in [0,\tau], \ \max t(M,\tau_k) = t_k, M \in \overline{\Omega} , \tag{10}$$

де S_2 – множина функцій, на яких шукається розв'язок.

Повинні виконуватися обмеження (8). За критерій оптимальності вибираємо мінімум функціонала

$$I = \min F\left(\sigma_i^{ost}, \sigma_0\right) , \tag{11}$$

який забезпечує досягнення мети термообробки – досягнення заданого рівня залишкових напружень у тілі.

Тут F – функціонал, який характеризує відхилення компонентів тензора залишкових напружень від заданих величин залишкових напружень σ_0; σ_i^{ost} – головні значення тензора залишкових напружень, які зумовлені залишковими деформаціями "заморожування" в момент склування.

У цьому формулюванні оптимізація за напруженнями режимів локального теплового навантаження скляних тіл полягає в мінімізації функціоналів (9), (11) за рахунок вибору функції управління h, при обмеженнях (7), (8), (10) і в'язях (1)–(6).

Методика розв'язування прямих задач. Ключове місце в схемі оптимізації займає побудова розв'язку прямої задачі, яка охоплює розв'язування задачі теплопровідності і термов'язкопружності. Оскільки геометрична конфігурація області, що займає тіло, часто досить складна, то використовуємо метод зважених нев'язок в поєднанні з кінцево-елементним підходом [3], який дає змогу отримувати наближені розв'язки сформульованих задач.

У зв'язку з цим співвідношення (1)–(6) піддаємо просторовій дискретизації на елементі розбиття і часовій дискретизації. Отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь, які можна записати у вигляді [3]

$$\left[K_T\right]\{T\} = \left\{F_T\right\}; \quad \left[K_{U,T}\right]\{U\} = \left\{F_{U,T}\right\}, \tag{12}$$

де $[K_T]$, $[K_{U,T}]$ – відповідні матриці жорсткості; $\{F_T\}$, $\{F_{U,T}\}$ – вектори навантаження [3].

Система алгебричних рівнянь (12) загалом є нелінійною і може бути розв'язана за допомогою відповідного ітераційного методу.

Методика побудови розв'язку задачі оптимізації. Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будуємо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [4]. В рамках запропонованого підходу мінімізація функціоналів (9), (11) зводиться до задачі нелінійного програмування на знаходження мінімуму відповідних функцій вигляду $J = J(h_1, \ldots, h_n)$, аргументами яких є значення функції управління h_i в дискретні моменти часу τ_i [4]. Отож, оптимізація за напруженнями і деформаціями режимів теплового навантаження тіл обертання зводиться до задачі на умовний екстремум функції J при в'язях (12) і обмеженнях (7), (8), (10). Для розв'язання цієї задачі застосовано метод прямого пошуку за Хуком і Джівсом [4].

Запропонована математична модель оптимізації використана при побудові оптимальних режимів зварки тонких скляних півсферичних оболонок.

Оптимізація режимів зварки скляних півсфер. Отриману методику використано для побудови оптимальних режимів зварки скляних півсфер, виготовлених із скла С-93. За нульове наближення прийнятий існуючий на виробництві режим зварки [1]. На рис. 1 штрихова крива відповідає нульовому наближенню функції управління t_c, а суцільна оптимальному

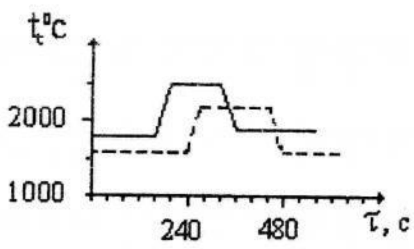

Рис. 1

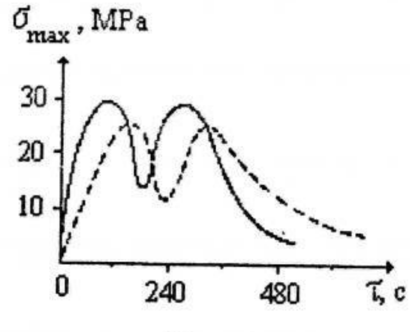

Рис. 2

розв'язку. Рис. 2 ілюструє відповідну зміну максимального розтягуючого напруження протягом усього процесу зварювання. З аналізу одержаних результатів випливає, що оптимальний режим дає змогу скоротити тривалість процесу зварювання на 25% і забезпечити заданий рівень залишкових напружень ($\sigma_{доп}$=75 Мпа), не порушуючи наявних обмежень.

Запропонована чисельна методика знаходження оптимальних за напруженнями та деформаціями режимів термообробки скляних тіл обертання, дає підстави врахувати в'язкопружний характер деформування в околі температури склування, термочутливість характеристик матеріалу і нелінійність відповідних обмежень, що допомагає ефективніше описати теплові та механічні процеси в скляних тілах при різного типу обмеженнях теплової і механічної природи, які наявні в реальних виробничих умовах.

1. *Будз С.Ф., Ірза Є.М.* Визначення залишкових напружень в зварних з'єднаннях скляних конструкцій // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1996. – 39. – № 1. – С. 23–30.

2. *Гачкевич О., Гачкевич М., Ірза Є., Тріщ Б., Касперський З.* Методика розрахунку режимів гартування скляних елементів машин і конструкцій // Машинознавство. – 2002. – № 2. – С. 3–6.

3. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М., 1986.

4. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М., 1975.

NUMERICAL ALGORITHMS FOR OPTIMAL REGIMES OF THERMAL TREATMENT OF AXIS-SYMMETRIC CIRCULAR GLASS SHELLS

Olexandr Hachkevych[1,2], Mikola Hachkevych[1], Evgen Irza[1], Zigmund Kaspersky[2]

[1]*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*
[2]*Technical University of Opole, Stanislawa Mikolajchuka Str., 5, 45-271 Opole, Poland*

Methodology of optimal high temperature treatment regimes for wide used production of glass circular shells is proposed. Non linear non classical extremal mechanical problems which occur during such optimization is considered. As a result of high temperature treatment the above mentioned problems are described by combined differential equation systems of temperature conduction and thermal elastic viscosity which are non linear owning to temperature dependence of material characteristic, non linear optimal criteria, non linear limits of control function etc.

Key worlds: thermal elastic viscosity, non-linear problem, numerical algorithms.

Стаття надійшла до редколегії 04.08.2005
Прийнята до друку 22.11.2006