ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип. 65. С.152-157

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Mat. 2006. Vol.65. P.152-157

УДК 539.3

ВПЛИВ КОНТАКТУ БЕРЕГІВ ДВОХ СПІВВІСНИХ ТРІЩИН НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ В УМОВАХ ЧИСТОГО ЗГИНУ

Віктор ОПАНАСОВИЧ[1], Роман СЕЛІВЕРСТОВ[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна
[2]Львівський регіональний інститут державного управління Національної академії державного управління при Президентові України, вул. Сухомлинського, 16, 79491 Львів, Україна

Використовуючи теорію згину пластин шостого порядку, проаналізовано напружений стан трансверсально-ізотропної пластини з двома колінеарними наскрізними тріщинами, береги яких контактують під час деформування пластини. З'ясовано, що врахування контакту берегів тріщин знижує коефіцієнти інтенсивності напружень, контактне зусилля не стале вздовж тріщини, як у класичній теорії згину, а збільшується з наближенням до вершини тріщини.

Ключові слова: трансверсально-ізотропна пластина, тріщина, згин, контактне зусилля.

Напружений стан ізотропних пластин з тріщинами, береги яких не контактують під час згину пластини, достатньо проаналізований. Результати цих досліджень зібрані в [1]. В монографії [2] показано спосіб поширення цих результатів на випадок трансверсально-ізотропних пластин у межах уточнених теорій шостого порядку. Врахування контакту берегів тріщини при згині пластини за класичною теорією розглянуто в працях [3, 4], вважалося, що контакт відбувається вздовж лінії на стиснутому боці пластини. У [5, 6] методом скінченних елементів досліджено вплив закриття тріщини на напружений стан пластини Рейснера в умовах чистого згину, причому в [6] ділянка контакту не вважалася наперед лінійною, а визначалася в процесі розв'язування задачі. Мета нашої праці, – застосовуючи теорію згину пластин типу Тимошенка [7] і підхід, запропонований в [8, 9], дослідити коефіцієнти інтенсивності напружень і моментів у вершинах двох співвісних тріщин, береги яких взаємодіють під час деформування пластини в розумінні праць [3–5].

Формулювання задачі. Розглянемо безмежну трансверсально-ізотропну пластину завтовшки h, ослаблену двома співвісними прямолінійними наскрізними тріщинами завдовжки $2l$ кожна і з відстанню $2c$ між їхніми сусідніми (внутрішніми) вершинами. До берегів тріщин прикладені самозрівноважені сталі згинальні моменти M, а на нескінченності навантаження немає. Вважаємо, що під час деформування пластини береги тріщин контактують вздовж лінії на її стиснутому боці (поверхня $\tilde{z} = h/2$).

Зіставимо серединну площину пластини (площину ізотропії) з площиною xOy декартової системи координат $Oxy\tilde{z}$ так, щоб береги тріщин були паралельними до осі Ox, а початок координат був посередині відрізка, який сполучає внутрішні вершини тріщин. У геометричних центрах тріщин, які визначаються координатами $\left(\mp(c+l);\ 0;\ 0\right)$, виберемо локальні системи координат $O_k x_k y_k$ $\left(k=1,\ 2\right)$, осі $O_k x_k$ яких спрямовані вздовж берегів тріщин.

Розв'язком сформульованої задачі є суперпозиція двох розв'язків [3, 8]: плоскої задачі теорії пружності з крайовими умовами

$$\sigma_{y_k}^{\pm} + i\sigma_{x_k y_k}^{\pm} = -T^{(k)}/h \quad \left(\left|x_k\right| < l, \quad k = 1,\ 2\right), \tag{1}$$

та задачі про згин пластини за таких крайових умов:

$$M_{y_k}^{\pm} + iH_{x_k y_k}^{\pm} = hT^{(k)}/2 - M\,,\ Q_{y_k}^{\pm} = 0 \ \left(\left|x_k\right| < l, \quad k = 1,\ 2\right), \tag{2}$$

де σ_{y_k}, $\sigma_{x_k y_k}$ – компоненти тензора напружень у локальній системі координат; $T^{(k)}$ – невідомі контактні зусилля (вважаємо, що $T^{(k)} > 0$, тобто контакт відбувається вздовж усієї довжини тріщини); індекси "+" і "–" позначають граничні значення функцій при $y_k \to \pm 0$.

Крім того, повинні виконуватись умови контакту

$$\left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right]_{\text{п}}^{+} - \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right]_{\text{п}}^{-} + \left(\left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right]_{\text{з}}^{+} - \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right]_{\text{з}}^{-}\right)_{\tilde{z}=\frac{h}{2}} = 0\,. \tag{3}$$

Тут v_k – компонента вектора переміщення в локальній системі координат $O_k x_k y_k$ у напрямі осі $O_k y_k$; індекси "п" і "з" позначають величини, пов'язані відповідно з плоскою задачею теорії пружності і задачею згину пластини.

Зведення задачі до системи інтегральних рівнянь. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для загального випадку розташування тріщин у пластині наведено в [10]. У випадку двох співвісних тріщин він набуде вигляду

$$T^{(k)} = -\frac{h}{\pi}\sum_{j=1}^{2}\int_{-l}^{l} K_{kj}\left(t, x_k\right) g_j\left(t\right) dt \quad \left(k = 1,\ 2\right), \tag{4}$$

де

$$g_j\left(x\right) = \frac{E}{4}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[v^{+} - v^{-}\right]; \tag{5}$$

$$K_{jj}\left(t, x_k\right) = \frac{1}{t - x_j};\ K_{kj}\left(t, x_k\right) = \frac{1}{t - x_k + 2(-1)^j\left(l - c\right)} \quad (k \neq j);$$

E – модуль пружності матеріалу пластини в площині ізотропії.

Згин пластини досліджується за теорією, запропонованою І. О. Прусовим [7], визначальні співвідношення якої запишемо так:

$$M_{y_k} + iH_{x_k y_k} = m\left[\Phi_k\left(z_k\right) + \overline{\Phi_k\left(z_k\right)}\right] + n\left[z_k\overline{\Phi_k'\left(z_k\right)} + \overline{\Psi_k\left(z_k\right)}\right] +$$

$$+\rho\left[2\overline{\Phi_k''(z_k)}+i\overline{\frac{\partial^2\Omega_k(z_k,\overline{z}_k)}{\partial z_k^2}}\right]; \tag{6}$$

$$Q_{x_k}-iQ_{y_k}=-2D\left[2\Phi_k'(z_k)-i\frac{\partial\Omega_k(z_k,\overline{z}_k)}{\partial z_k}\right], \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_k+iv_k)=\frac{h}{2}\Big\{2\operatorname{Re}\ \ \Phi_k(z_k)+z_k\overline{\Phi_k'(z_k)}+\overline{\Psi_k(z_k)}+$$
$$+\frac{\rho}{n}\left[2\overline{\Phi_k''(z_k)}+i\frac{\partial^2\Omega_k(z_k,\overline{z}_k)}{\partial\overline{z}_k^2}+i\frac{k_*^2}{4}\Omega_k(z_k,\overline{z}_k)\right]\Big\}, \tag{8}$$

де $m=-D(1+\nu)$; $n=D(1-\nu)$; $\rho=\dfrac{4D}{k_*^2}$; $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $z_k=x_k+iy_k$;

$\Phi_k(z_k)$, $\Psi(z)$ – комплексні потенціали типу Колосова-Мусхелішвілі; $\Omega_k(z_k,\ \overline{z}_k)$ – функція, яка задовольняє рівняння Гельмгольца

$$4\frac{\partial^2\Omega_k(z_k,\overline{z}_k)}{\partial z_k\partial\overline{z}_k}=k_*^2\Omega_k(z_k,\ \overline{z}_k),\quad k_*^2=\frac{12}{h^2}\frac{G'}{G};$$

G і G' – модулі зсуву матеріалу пластини відповідно в площині ізотропії та в перпендикулярному до неї напрямі. Зазначимо також, що співвідношення (8) записане для основи пластини $\tilde{z}=h/2$, уздовж якої береги тріщин взаємодіють.

Врахувавши результати праць [6, 8] і принцип суперпозиції розв'язків [10], комплексний потенціал $\Phi_k(z_k)$ та функцію $\Omega_k(z_k,\ \overline{z}_k)$ шукаємо у вигляді

$$\Phi_k(z_k)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2}\int_{-l}^{l}\frac{f_j(t)}{t-z_{kj}}dt;$$

$$\Omega_k(z_k,\ \ \overline{z}_k)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Im}\int_{-l}^{l}\frac{w_{kj}K_1(w_{kj})}{t-z_{kj}}f_j(t)\,dt,$$

де $z_{kj}=x_k+x_k^0-x_j^0$; x_k^0 – абсциса центру k-ї тріщини; $K_1(x)$ – функція Макдональда першого порядку; $w_{kj}=k_*\sqrt{(t-z_{kj})(t-\overline{z}_{kj})}$, $f_j(t)$ – шукані дійсні функції.

На підставі формули (8) та залежності (5) для плоскої задачі теорії пружності, з умови (3) знайдемо зв'язок між функціями $g_j(x)$ і $f_j(x)$

$$g_j(x)=-\frac{Eh}{2(1-\nu)}f_j(x). \tag{9}$$

Використавши розв'язок задачі згину пластини з двома співвісними тріщинами без врахування контакту їхніх берегів [8] і розв'язок плоскої задачі теорії пружності (4) шляхом задоволення крайових умов (2) та з врахуванням того, що напружено-деформований стан пластин симетричний щодо осі Oy, одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомої функції $\rho(x) = f_1\left(x_1/l\right) = -f_2\left(-x_1/l\right)$, яка після зведення інтегрування до проміжку $[-1;\ 1]$ і доповнення її умовами однозначності переміщень при обході тріщин по замкнутому контурі матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\left[\dfrac{m_2 + 2\tilde{K}_2\left(|t - x|/\lambda\right)}{t - x} + \dfrac{m_2 + 2\tilde{K}_2\left(|t - x + \gamma|/\lambda\right)}{t - x + \gamma}\right]\rho(t)\,dt = \dfrac{2M}{n}; \\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\rho(t)\,dt = 0 \quad (|x| < 1), \end{cases} \tag{10}$$

де $m_1 = 4/(1-\nu)$; $m_2 = 3 + 2\nu$; $\lambda = h/\left(l\sqrt{12G'/G}\right)$; $\gamma = 2\left(1 + c/l\right)$; $\tilde{K}_2(x) = K_2(x) - 2/x^2$; $K_2(x)$ – функція Макдональда другого порядку.

Розв'язуючи СІР (6.10), треба стежити, щоб контактні тиски $T^{(k)}$ були додатними вздовж кожної тріщини. В протилежному випадку потрібно змінювати формулювання задачі.

Числовий аналіз результатів і висновки. Проаналізовано поведінку коефіцієнтів інтенсивності згинальних моментів і розподіл контактного тиску вздовж тріщин, розв'язавши систему інтегральних рівнянь (10) з використанням методу механічних квадратур. Зведені коефіцієнти інтенсивності згинальних моментів обчислювали за формулою

$$\tilde{K}_M^{\pm} = -K_M^{\pm}/\left(M\sqrt{l}\right) = \mp 2q\tilde{\rho}(\pm 1),\ \tilde{\rho}(x) = n\sqrt{1 - x^2}\,\rho(x)/(2M),$$

коефіцієнти інтенсивності напружень пов'язані з ними співвідношенням

$$k_1^{\pm} = -6K_M^{\pm}/h, \tag{11}$$

яке випливає з (9) та означення коефіцієнтів інтенсивності, а вираз для зведеного контактного тиску $\tilde{T} = hT/(2M)$ набуде вигляду

$$\tilde{T} = -\frac{6q}{S}\sum_{s=1}^{S}\left[\frac{1}{T_s - X_r} + \frac{1}{T_s - X_r + (-1)^j\gamma}\right]\tilde{\rho}(T_s)\ \left(r = 1,\ 2,\ \ldots S - 1\right),$$

де S – кількість вузлів методу механічних квадратур;

$$T_s = \cos\frac{\pi(2s - 1)}{2S};\ X_r = \cos\frac{\pi r}{S};$$

$$\rho(1) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}(-1)^{s+1}\rho(T_s)\operatorname{ctg}\frac{(2s - 1)\pi}{4S};$$

$$\rho(-1) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}(-1)^{s+S}\rho(T_s)\operatorname{tg}\frac{(2s - 1)\pi}{4S}.$$

Результати числового аналізу задачі для випадку $\nu = 0,3$ показано на рис. 1–3. Щодо впливу параметра λ і відстані між тріщинами на напружений стан пластини, то якісно він такий самий, як і при нехтуванні контактом берегів тріщин [10]. Врахування контакту берегів тріщин суттєво зменшує значення зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів (у 2–3 рази), але водночас зумовлює появу коефіцієнтів інтенсивності напружень. Графічні залежності для них не наведені, оскільки їх можна обчислити безпосередньо на підставі співвідношення (11). Як видно з рис. 1, для пластини нульової товщини контактний тиск не змінюється вздовж тріщини, що узгоджується з результатами згину пластини за класичною теорією [3].

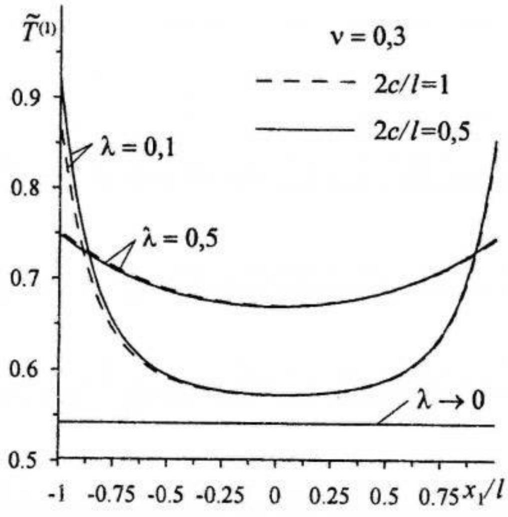

Рис. 1

При $\lambda > 0$ поблизу вершин

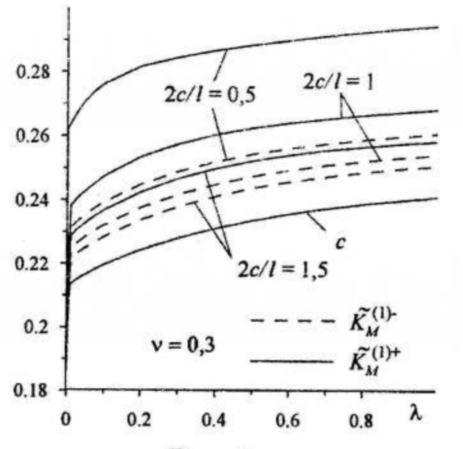

Рис. 2

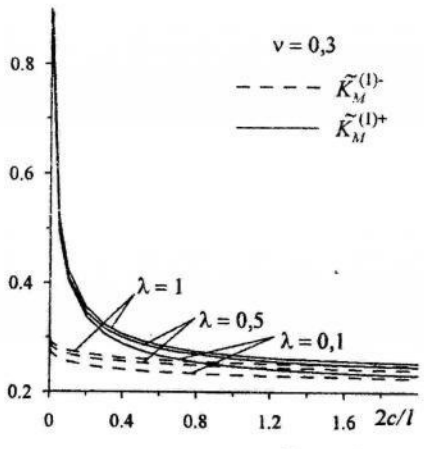

Рис. 3

тріщин $\tilde{T}$ спадає зі зменшенням λ, у середній частині тріщини – зростає, причому у зовнішніх вершинах він більший, ніж у внутрішніх. Зазначимо також, що вплив відстані між тріщинами на контактний тиск незначний порівняно з впливом параметра λ. При $c \to \infty$ результати збігаються з одержаними для випадку однієї тріщини [9].

---

1. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х т. / Под ред. Ю. Мураками. – М., 1990.

2. *Мазурак Л. П., Бережницкий Л. Т.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К., 1990.
3. *Шацький І. П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
4. *Kwon Y. W.* Finite element analysis of crack closure in plate bending // Comp. and Struct. – 1989. – Vol. 32. – N 6. – P. 1439–1445.
5. *Heming F. S.* Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate // Int. J. of Fracture. – 1980. – Vol. 16 – N 4. – P. 289–304.
6. *Joseph P. F., Erdogan F.* Surface crack problems in plates // Int. J. of Fracture. – 1989. – Vol. 41. – P. 105–131.
7. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск, 1975.
8. *Опанасович В. К., Селіверстов Р. Г.* Згин плити з двома рівними прямолінійними колінеарними тріщинами за теорією Рейснера // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 1. – С. 53–56.
9. *Опанасович В. К., Новосад В. П., Селіверстов Р. Г.* Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Збірник наукових праць. – Вип. 5 / За заг. ред. О. Є. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарника. – Львів. – 2002. – С. 148–153.
10. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.

THE INFLUENCE OF CLOSURE OF TWO COLLINEAR CRACKS ON THE STRESS STATE OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATE UNDER PURE BENDING

Viktor Opanasovych[1], Roman Seliverstov[2]

[1] *Ivan Franko National University of Lviv, Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*
[2] *Lviv Regional Institute of Public Administration of the NAPA Sukhomlynskoho Str., 16, 79491 Lviv, Ukraine*

Using Prusov's plate bending theory the stress state of transversal-isotropic plate with two collinear through cracks under pure bending is considered at the assumption of crack closure along line on compressed side. It is obtained that interaction between crack faces lead to decreasing of intensity of bending moments and to appearing plane stresses. The contact force is not constant as in the frames of classical theory and reach maximum value near the crack tips.

Key words: transversal-isotropic plate, crack, bending, contact force.

Стаття надійшла до редколегії 08.06.2005
Прийнята до друку 22.11.2006